XIII OLIMPIADA PROVINCIAL DE MATEMÁTICAS
San Pedro Manrique, 12 y 13 de mayo de 2007
4° E.S.O.

Número:

Tened en cuenta que al resolver un problema, el resultado es tan importante como el proceso que hayáis seguido para llegar a él. Por ello, os pedimos que al final deis la solución que hayáis encontrado y también que expliquéis cuáles fueron las ideas más importantes que os llevaron hasta ella.

1.- COMPAÑEROS MENTIROSOS

En un laboratorio de idiomas hay cinco alumnos con un profesor. Uno de los alumnos ha puesto en marcha el equipo de vídeo y el profesor quiere saber quién ha sido. Javier dice *ha sido Héctor o Tania*; Héctor dice *No hemos sido ni Esther ni yo* ; Tania dice *Los dos están mintiendo* ; Diego dice *No, uno dice la verdad pero el otro no*; Esther dice *No Diego, eso no es verdad* . El profesor sabe que tres dicen la verdad y dos mienten.

Con estas informaciones ¿sabrías decir quién encendió el equipo de vídeo?

1.- COMPAÑEROS MENTIROSOS

Solución:

Consideramos los 10 casos posibles en los que 3 dicen la verdad y dos mienten y estudiando cada uno de ellos con las condiciones del problema enseguida deducimos que la única posibilidad es que fue Tania la que puso en marcha el equipo.

XIII OLIMPIADA PROVINCIAL DE MATEMÁTICAS
San Pedro Manrique, 12 y 13 de mayo de 2007
4º E.S.O.

Número:

Tened en cuenta que al resolver un problema, el resultado es tan importante como el proceso que hayáis seguido para llegar a él. Por ello, os pedimos que al final deis la solución que hayáis encontrado y también que expliquéis cuáles fueron las ideas más importantes que os llevaron hasta ella.

2.- AÑO 2007

¿Cuál es la suma de las cifras del número 2007 x 999....99? número escrito con 2007 nueves.

2.- AÑO 2007

Solución

¿Cuál es la suma de las cifras del número 2007 x 999....99? número escrito con 2007 nueves.

Solución:

Empezamos haciendo las siguientes multiplicaciones

2007 x9 = 18063 S = 18

2007 x 99 = 198693 S = 36

2007 x 999 = 2004993 S = 27 = 9·3 (3 coincide con el número de nueves del factor)

2007 x 9999 = 20067993 S = 36 = 9·4 (4 coincide con el número de nueves del factor)

2007 x 99999 = 200697993 S = 45 = 9·5 (5 coincide con el número de nueves del factor)

2007 x 999999 = 2006997993 S = 54 = 9·6 (6 coincide con el número de nueves del factor)

Con la observación de la primera columna podemos deducir que:

2007 x 99999999=200699997993

2007 x 99999999999999 = 2006999999999997993

2007 x 99..^{2007}..99 = 200699..^{2003} ..97993

De lo anterior podemos deducir que:

2007 x 99999999=200699997993 S = 9·8=72

2007 x 99999999999999 = 2006999999999997993 S = 9.14=126

2007 x 99..^{2007}..99 = 200699..^{2003} ..7993 **S**= 9·2007 = **18063**

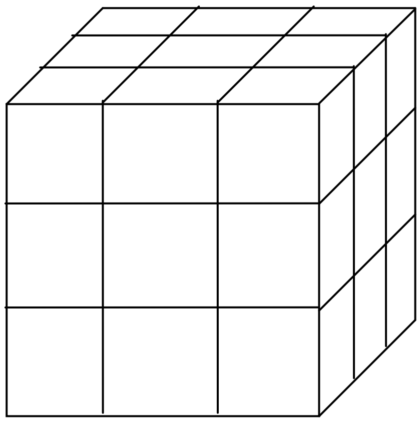
XIII OLIMPIADA PROVINCIAL DE MATEMÁTICAS
San Pedro Manrique, 12 y 13 de mayo de 2007
4º E.S.O.

Número:

Tened en cuenta que al resolver un problema, el resultado es tan importante como el proceso que hayáis seguido para llegar a él. Por ello, os pedimos que al final deis la solución que hayáis encontrado y también que expliquéis cuáles fueron las ideas más importantes que os llevaron hasta ella.

3.- EL CUBO PINTADO

Pintamos un cubo de color azul y después lo cortamos en 3 x3x 3 =27 cubitos.



¿Cuántos cubitos tendremos:

* Con una cara pintada.

* Con dos caras pintadas.

* Con tres caras pintadas.

* Sin caras pintadas?

Haz lo mismo con un cubo de 4 x 4 x 4 = 64cubos. ¿Cuántos cubos tienen ahora 1, 2, 3 ó ninguna caras pintadas?

Busca una fórmula para hallar el número de caras pintadas en un cubo de n x n x n

3.- EL CUBO PINTADO

Solución

	Nº de cubos con 3 caras azules	Nº de cubos con 2 caras azules	Nº de cubos con 1 cara azul	Nº de cubos con 0 caras azules
Cubo 3x3x3	8	12	6	1
Cubo 4x4x4	8	24	24	8
Cubo 5x5x5	8	36	54	27
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
Cubo nxnxn	8	12(n-2)	$6(n-2)^2$	$(n-2)^3$

Las expresiones generales, se pueden deducir, además de la mera observación de cada sucesión, de la siguiente manera:

Los cubitos con tres caras pintadas sólo aparecen en los vértices, luego siempre habrá 8, uno por vértice.

Los cubitos con dos caras pintadas aparecen en las aristas. Si en cada arista eliminamos los dos cubitos de los extremos, que tienen tres caras pintadas nos aparecen n – 2 cubitos por arista. Luego el número total será de 12 (n-2), puesto que el cubo tiene 12 aristas.

Los cubitos con una cara pintada aparecen en el 'interior' de las caras, o sea no ocupan la arista ni el vértice. Cada cara podemos considerarla como una cuadrícula n x n. Si eliminamos los cuadritos que contienen parte de la línea exterior nos queda una cuadrícula de (n-2)x(n-2) cuadritos, que se corresponden con $(n-2)^2$ cubitos con una única cara pintada. Como hay 6 caras, el número total de cubitos con una cara pintada es de $6(n-2)^2$.

Los cubitos sin ninguna cara pintada están en el interior del cubo. Aparecen al suprimir los cubitos que forman parte de las caras exteriores. Al eliminar estos cubitos 'exteriores nos queda un cubo con (n-2)x(n-2)x(n-2), o sea con $(n-2)^3$ cubitos.

XIII OLIMPIADA PROVINCIAL DE MATEMÁTICAS
San Pedro Manrique, 12 y 13 de mayo de 2007
4º E.S.O.

Número:

Tened en cuenta que al resolver un problema, el resultado es tan importante como el proceso que hayáis seguido para llegar a él. Por ello, os pedimos que al final deis la solución que hayáis encontrado y también que expliquéis cuáles fueron las ideas más importantes que os llevaron hasta ella.

4.- INVESTIGACIÓN MIA

En la Agencia de Investigaciones M.I.A. (Matemáticas Investigadas y Aclaradas), se han de resolver cierto número de misiones, pero disponemos de un número tal de agentes tal que: si encargamos una misión a cada agente, sobran x misiones, pero si damos x misiones a cada agente nos quedan x agentes sin misión. Como los agentes y las misiones suman menos de 15, ¿sabrías decirnos cuántos agentes y misiones son?

Por supuesto que nuestro agente especial 007 lo resolvió en dos patadas.

4.- INVESTIGACIÓN MIA

Solución

Llamando A al nº de agentes y m al nº de misiones, sabemos que:

A + m < 15, y que $\begin{cases} \mathrm{m} = \mathrm{A} + \mathrm{x} \\ \mathrm{m} = (A - \mathrm{x})\mathrm{x} \end{cases}$; donde x es entero y K múltiplo de él.

Eliminando A en el sistema obtenemos la siguiente ecuación de 2º grado: $2x^2 - mx + m = 0$, cuya solución es: $x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 8m}}{4}$ para ello $m^2 - 8m$ debe ser un cuadrado perfecto. Con estas condiciones y el hecho de que m no puede pasar de 15, probando se tiene que la única solución posible es m= 8. Se obtiene A = 6.

Por tanto hay 8 misiones y 6 agentes.