



NÚMEROS

# HISTORIA

No podemos decir que conocemos la forma por la que empezamos a utilizar los números.

Había muchos motivos y situaciones cotidianas por las que nos impulsaran a cuantificar el mundo que nos rodeaba.

Era necesario encontrar un método de conteo, los motivos podían ser variados, desde conocer el número de animales que tenían, a sus armas, o para saber los terrenos que disponían. Casi siempre se llegaba a la misma solución al alcanzar un determinado número se hace una marca diferente que representa a todos.

Este número es la base. Y la base que más se ha venido utilizando por las distintas culturas fue la base 10, es muy probable que sea por ser igual al número de los dedos con los que contamos.

Los egipcios usaban los números antes del 3.000 A.C. Su interés por los números tenía que ver mucho con el Nilo y con sus inundaciones. Estos números fueron necesarios en sus ciudades y por sus comerciantes, para sus negocios. Usaban los números en base diez usando jeroglíficos. Daba igual usar un número las veces que hiciera falta, e igualmente podían escribirlos de izquierda a derecha o de arriba abajo. Al dar igual el orden muchas veces los escribían en un orden por puramente estética.

1 =		10 =		100 =		1000 =	
2 =		20 =		200 =		2000 =	
3 =		30 =		300 =		3000 =	
4 =		40 =		400 =		4000 =	
5 =		50 =		500 =		5000 =	

Los mayas utilizaban un sistema de numeración de base 20 y de base 5. Al igual que los egipcios las representaciones de números se hacían por medio de jeroglíficos. Para los mayas los números eran importantes para medir el tiempo, por eso los números mayas tienen relación con los días, meses y años. Solo necesitan tres símbolos para representar los números, estos son el punto que tiene valor uno, la raya que tiene valor cinco y el caracol con valor cero.

0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	6	7	8	9
	• 	•• 	••• 	•••• 
10	11	12	13	14
	• 	•• 	••• 	•••• 
15	16	17	18	19
	• 	•• 	••• 	•••• 

Los hindúes contaban con los dedos de la mano, contaban del 0 al 9, y al igual que nosotros nuestro sistema es el decimal. Los mayas que también usaban el cero en sus cuentas, contaban con los dedos de la mano y de los pies, sus primeros números van del 0 al 19 por eso su sistema es vigesimal.

—	=	⊥	⊥	⋄	⋄	⋄	⋄	⋄	⋄
1	2	4	6	7	9	10	10	10	
0	⊥	∞	⋄	⋄	⋄	⋄	⋄	⋄	⋄
20	60	80	100	100	100	200		400	
⋄	⊥	⊥	⋄	⋄	⋄	⋄	⋄	⋄	⋄
700	1000		4000	6000	10,000		20,000		

Los números son el alfabeto universal del lenguaje de las matemáticas

- En esta sesión vamos a tratar con números enteros. Sería conveniente disponer de una calculadora o de un ordenador con el que hacer los cálculos que se indican.
- Vamos a trabajar con números enteros y ver algunas de sus propiedades. Trataremos los números escritos en base 10 y daremos propiedades de los números según sus cifras. El objetivo que se pretende con esta sesión es que te familiarices con el manejo de números y que realice cálculos con números significativamente grandes, así como ver la regularidad de ciertos comportamientos de determinados números o familias de números.

- 1. Manejo de números Ejercicio 1.1. Considera las siguientes listas de números.

- |                     |                   |
|---------------------|-------------------|
| • 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | 9 8 7 6 5 4 3 2 1 |
| • 1 2 3 4 5 6 7 8 0 | 0 8 7 6 5 4 3 2 1 |
| • 1 2 3 4 5 6 7 0 0 | 0 0 7 6 5 4 3 2 1 |
| • 1 2 3 4 5 6 0 0 0 | 0 0 0 6 5 4 3 2 1 |
| • 1 2 3 4 5 0 0 0 0 | 0 0 0 0 5 4 3 2 1 |
| • 1 2 3 4 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 4 3 2 1 |
| • 1 2 3 0 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 0 3 2 1 |
| • 1 2 0 0 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 0 0 2 1 |
| • 1 0 0 0 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 0 0 0 1 |

¿Cuál de las dos sumas es mayor?

- Ejercicio 1.2. Comprueba que se verifica:

$$1 \times 8 + 1 = 9$$

$$12 \times 8 + 2 = 98$$

$$123 \times 8 + 3 = 987 \dots$$

- ¿Explica por qué?
- Calcula los términos 19 y 20 de esta sucesión.

# NÚMERO NARCISISTA

- El número narcisista es aquel que es igual a la suma de cada uno de sus dígitos elevados a la  $n$  potencia (donde  $n$  es el número de cifras del número )
- La metáfora de su nombre alude a lo mucho que parecen "quererse a sí mismos" estas cifras. Por ejemplo, el **153** es un número narcisista puesto que  $1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$ .
- Los primeros números narcisistas son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 153, 370, ..., 1634, 8208, 9474 y 54748.

- Ejercicio 1.3 (Números narcisistas). Observa que 153 es la suma de los cubos de sus cifras, y que lo mismo ocurre con 370.
- Un número de hasta tres cifras se dice narcisista si es la suma de los cubos de sus cifras.
- (1) Determina los números narcisistas menores que 500.
- (2) ¿Cuántos números narcisistas de tres cifras hay?

- Ejercicio 1.4. Prueba que todo número impar es una diferencia de dos cuadrados de números consecutivos.

# NUMEROS AMIGOS SOCIALES Y PERFECTOS

- <https://www.youtube.com/watch?v=yCR0hi48rh>
- Dos números naturales  $x$  e  $y$  se llaman amigos si la suma de los divisores propios de  $x$  es igual a  $y$ , y viceversa. El primer ejemplo de pareja de números de números amigos lo encontramos ya en Pitágoras , de quien se cuenta que una vez le preguntaron “¿Qué es un amigo? ”, y contestó: “Un amigo es otro yo. Como lo son los números 220 y 284 ”.

- Si llamamos
- $\text{div}(x) = \{\text{divisores de } x\}$
- entonces  $x$  e  $y$  es una pareja de números amigos si
- $y = \text{Sumatorio div}(x)$        $x = \text{Sumatorio div}(y)$ .
- Observa que  $\text{div}(220) = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$
- y se tiene  $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ .
- Además  $\text{div}(284) = \{1, 2, 4, 71, 142\}$  y se tiene  $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$ .

- Cálculo de parejas de números amigos El primer procedimiento para construir parejas de números amigos se debe a Thabit ibn Qurra<sup>5</sup> ; este método fue después generalizado por L. Euler para obtener sus listas de parejas de números amigos. El procedimiento es el siguiente: Si  $n > 1$  es un entero tal que  $p = (3 \times 2^{n-1}) - 1$ ,  $q = (3 \times 2^n) - 1$ ,  $r = (9 \times 2^{2n-1}) - 1$  son números primos, entonces se tiene que  $2^n pq$  y  $2^n r$  forman una pareja de números amigos.
- Actividad 5 Calcula para  $n = 2, 4$  y  $7$  se tienen parejas de números amigos:

# NUMEROS SOCIALES

- En 1918 P. Poulet publica la primera cadena social de números: 12 496, 14 288, 15 472, 14 536 y 14 264.
- Sin embargo no se conoce ninguna cadena social de longitud tres, para las cuales reservamos el nombre de clan de números.
- Actividad 6. Comprueba que la cadena 12 496, 14 288, 15 472, 14 536 y 14 264 es una cadena social de números.

- **Números perfectos**

- Los números perfectos son números enteros positivos  $x$  tales que la pareja  $x, x$  es una pareja de números amigos, esto es,  $x$  es la suma de sus divisores propios.  
Actividad 3.1. Comprueba que 6 es un número perfecto y que 28 también lo es.
- Los números perfectos ya eran conocidos por Euclides, quien en el Libro IX de sus Elementos establece:  
Teorema 3.2 (Teorema de Euclides). Si  $(2^n) - 1$  es primo, entonces  $2^{(n-1)} ((2^n) - 1)$  es perfecto.  
Calcula para  $n=5$