

Matemáticas “método Singapur”

Pedro Ramos Alonso
Facultad de Educación
Universidad de Alcalá
pedro.ramos@uah.es



+ ideas
- cuentas

<http://masideas-menoscuantas.com/>
@MsldeasMnosCtas

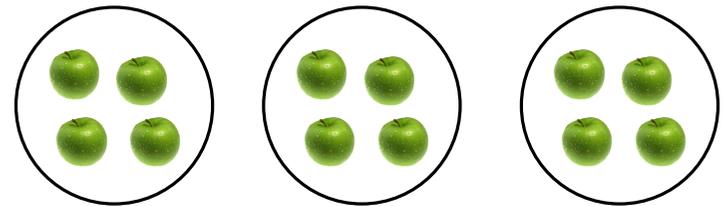
La multiplicación

- * ¿Cómo se puede introducir?
- * Una opción: “multiplicado por”

$$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$$

- * La alternativa: “veces”

3×4 significa 3 veces 4



$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$$

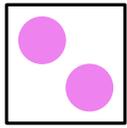
Veces \leftrightarrow Multiplicado por

- * A nivel internacional, no hay mayoría clara.
- * Controversia en el periódico.
¿Por qué no es lo mismo 5×3 que 3×5 ?

http://verne.elpais.com/verne/2015/10/31/articulo/1446292466_

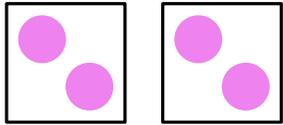
- * La ventaja de usar “veces”: inmediato de entender.
- * Pero, ojo: “veces” y las tablas de multiplicar.
- * Lo más importante: evitar contradicciones.
¿El doble de 6?

Aprendizaje comprensivo ↔ Memorización



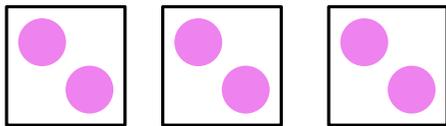
$$1 \times 2 = 2$$

1 grupo de 2 es 2
1 vez 2 es 2



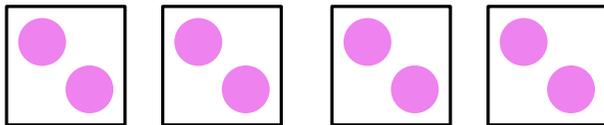
$$2 \times 2 = 4$$

2 grupos de 2 son 4
2 veces 2 son 4



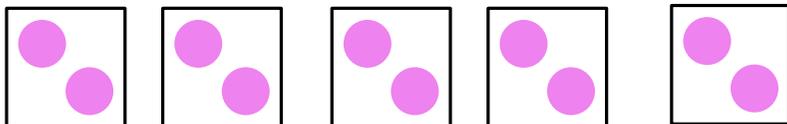
$$3 \times 2 = 6$$

3 grupos de 2 son 6
3 veces 2 son 6



$$4 \times 2 = 8$$

4 grupos de 2 son 8
4 veces 2 son 8



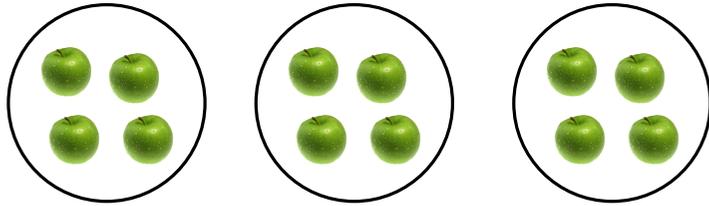
$$5 \times 2 = 10$$

5 grupos de 2 son 10
5 veces 2 son 10

* ¿Aprender **de memoria** o aprender **con la memoria**?

Modelos de la multiplicación

1. Suma repetida.



$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$$

tres grupos de cuatro
tres veces cuatro

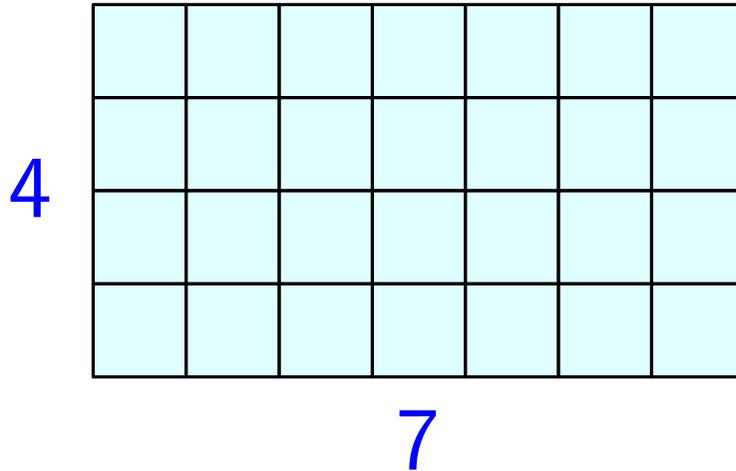
- * Es el significado más adecuado para la introducción de la multiplicación.
 - intuitivo
 - conexión con la suma, ya conocida

Modelos de la multiplicación

2. Modelo de área.

$$4 \times 7$$

$$7 \times 4$$



- a) Muy útil para entender varias propiedades de la multiplicación.
- b) Conexión con la geometría.

Modelos de la multiplicación

3. Modelo de proporcionalidad, escalado.

Multiplicado por: si leemos 5×2 como “cinco multiplicado por dos”, ¿qué significa?

- a) Conexión con la división: multiplicar por 3, operación inversa a dividir entre 3.

Modelos de la multiplicación

4. Modelo combinatorio.

Si tengo 3 pantalones y 4 camisetas, ¿de cuántas formas distintas puedo vestirme?

- a) Es un modelo importante en resolución de problemas y con varias aplicaciones.
- b) Accesible a los alumnos desde el principio de primaria.
- c) Poco trabajado en España.

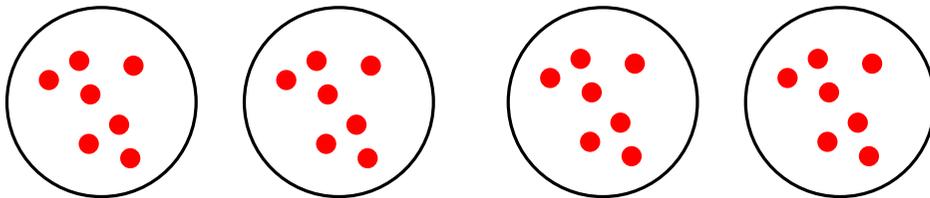
Problemas

- * Si tengo 3 pantalones, 4 camisetas y 2 gorras, ¿de cuántas formas distintas puedo vestirme?
- * ¿Cuántos números de 3 cifras empiezan por una cifra impar y son múltiplos de 5?
- * En una matrícula de un coche, ¿qué es más probable, que haya alguna cifra repetida, o que todas las cifras sean distintas?

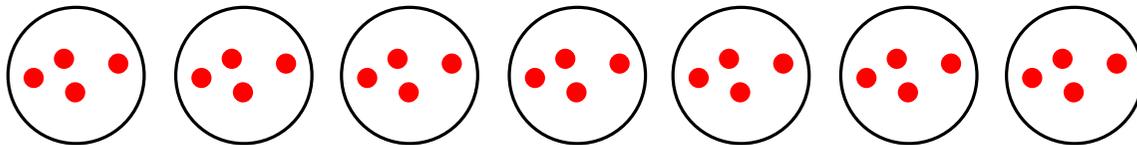
Propiedades de la multiplicación

* Conmutativa

* Ojo: no es **nada** intuitivo que 4 veces 7 sea igual que 7 veces 4

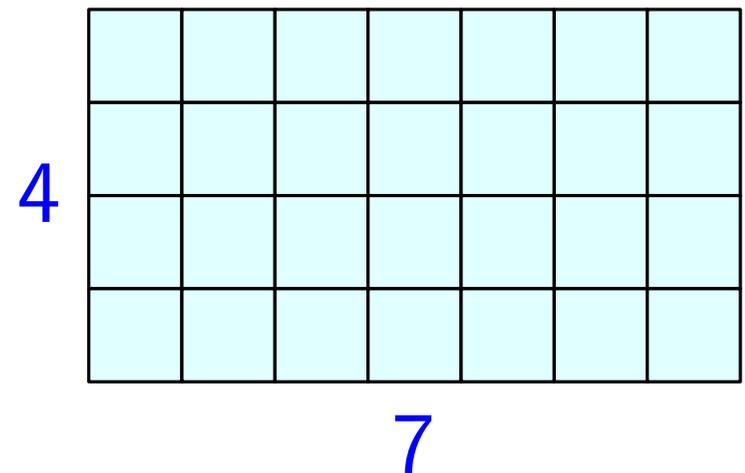


$$4 \text{ veces } 7 \leftrightarrow 4 \times 7$$



$$7 \text{ veces } 4 \leftrightarrow 7 \times 4$$

* Modelo de área.



Propiedades de la multiplicación

- * Propiedad distributiva
- * ¿Qué sentido tiene en primaria?
- * En los libros de texto ...

$$\begin{array}{ccc} 7 \times (3 + 5) & = & 7 \times 3 + 7 \times 5 \\ \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 7 \times 8 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 56 \end{array} & & \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 21 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 56 \end{array} & + & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 35 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 56 \end{array} \end{array} \end{array}$$

Propiedad distributiva

* Fundamental para:

i) manipulaciones algebraicas: $2(x + 3) = 2x + 6$

ii) cálculo **natural** (pensado, mental):

$$12 \times 7 =$$

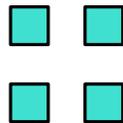
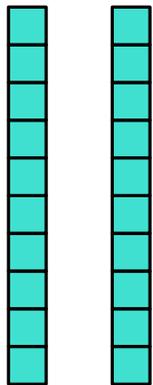
iii) algoritmo tradicional (y otras variantes) de la multiplicación.

Hacia el algoritmo de la multiplicación

* Una cuestión previa: $8432 \times 10 = 84320$

¿Por qué?

* Los materiales (en particular, los bloques de base 10) siguen siendo muy útiles.

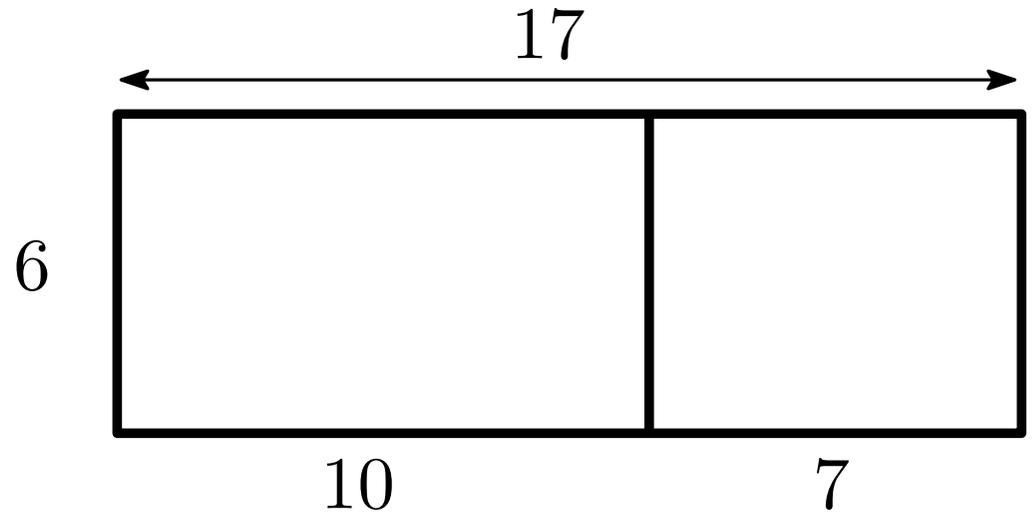


$$3 \times 24 =$$

El modelo de área

- * Una excelente ayuda para la comprensión de las propiedades y para la introducción del algoritmo.

$$6 \times 17 = 6 \times 10 + 6 \times 7$$



$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 6 \\ \hline 42 \\ + 60 \\ \hline 102 \end{array}$$

Problema (3° Primaria)

- * Nos dicen que Juan pesa 5 veces más que su perro, y que entre los dos pesan 42 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?

La división

* “Dividir es repartir”. ¿Siempre?

1) Luis lleva 20 caramelos al colegio y quiere repartirlos entre 4 amigos. ¿Cuántos caramelos le da a cada amigo?

2) Luis tiene 20 caramelos y hace bolsas con 4 caramelos. ¿Cuántas bolsas puede hacer?

* El segundo significado es la **división de agrupamiento**.

Tiene el sentido de “hacer grupos iguales”.

(No se trabaja lo suficiente en nuestras aulas).

Relación con **medida**: ¿cuántas veces “cabe” 4 en 20?

Inventa dos problemas

camisetas

96 euros

16

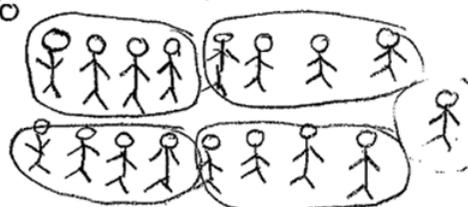
- * En uno de ellos, la división debe tener sentido de reparto; en el otro, de hacer grupos.

División: el procedimiento y su interpretación

- * El error en nuestras aulas: nos centramos en el algoritmo, y nos olvidamos de darle significado.

II) Para celebrar mi cumpleaños nos vamos de excursión al zoo, queremos ir 17 amigos, nos llevarán nuestras mamás en sus coches con asientos para cuatro de nosotros, ¿cuántos coches serán necesarios para transportarnos?

Se necesitan 4 coches
y me sobra un niño



- * Un ejemplo de pregunta de TIMSS (4º de primaria)

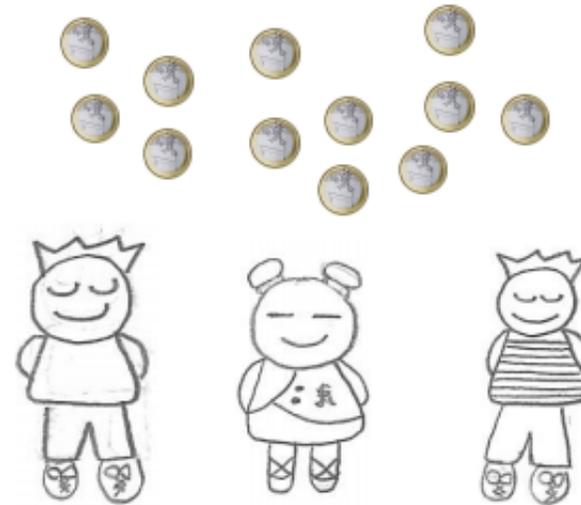
La pintura viene en latas de 5 litros. Santi necesita 37 litros de pintura. ¿Cuántas latas debe comprar?

- 5
- 6
- 7
- 8

Introducción de la división

- 1 Agrupa las monedas de la figura, para repartirlas por igual entre los tres amigos.

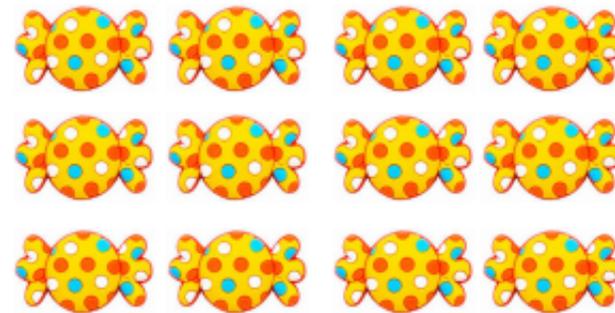
$$12 : 3 = 4$$



- e) Con los caramelos de la figura, hacemos bolsas con 4 caramelos cada una.

Necesitamos bolsas

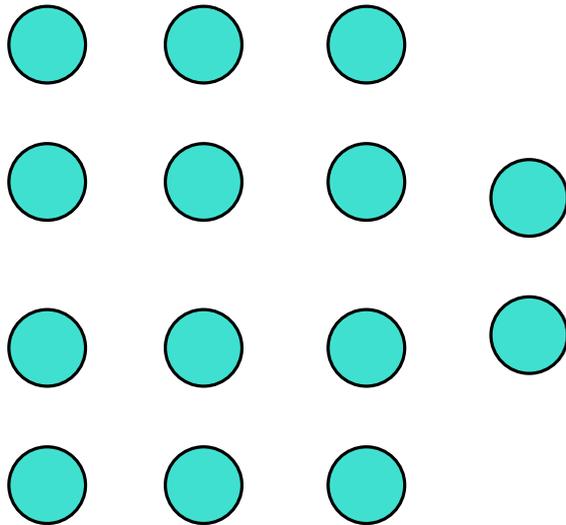
$$12 : 4 = 3$$



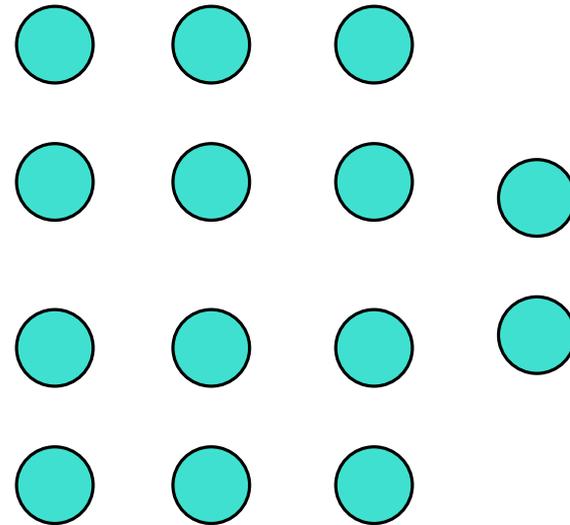
Introducción a la división

- * Con los puntos de las figuras:
 1. Haz dos grupos iguales.
 2. Haz grupos de dos.

1



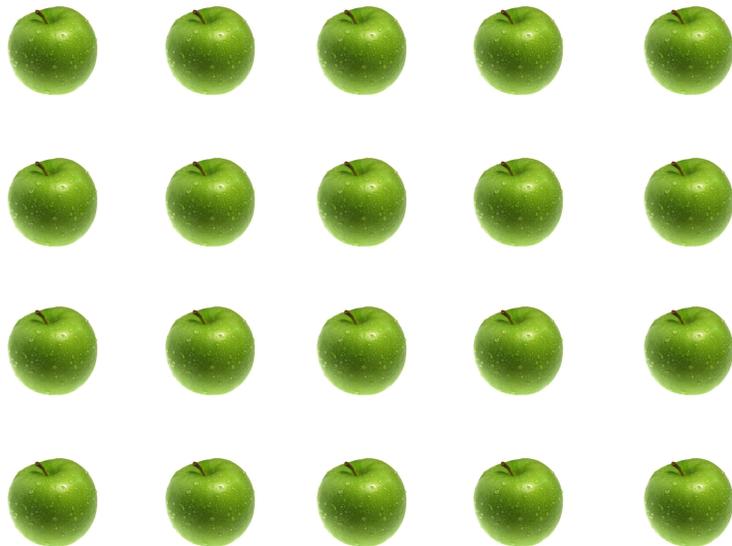
2



Multiplicación y división

- * Es importante trabajar la relación entre multiplicación y división, como operaciones inversas.

(Incluyendo también la diferencia entre reparto y agrupamiento)



División con resto

- * **División entera** (con resto, o euclídea)

Dados dos números naturales D (dividendo) y d (divisor), existen unos únicos números naturales c (cociente) y r (resto) tales que

$$D = c \times d + r \quad \text{y} \quad 0 \leq r < d.$$

- * Idea de cualquier algoritmo de división:

Aproximar por defecto el dividendo por múltiplos del divisor.

$$16 = \square \times 3 + \square$$

^
3

$$D = c \times d + r$$

* Ventajas de esta notación:

★ se adapta muy bien al cálculo mental y la estimación:

$$140 = \square \times 9 + \square$$

★ ayuda a entender el significado de la división (y de sus resultados, el cociente y el resto)

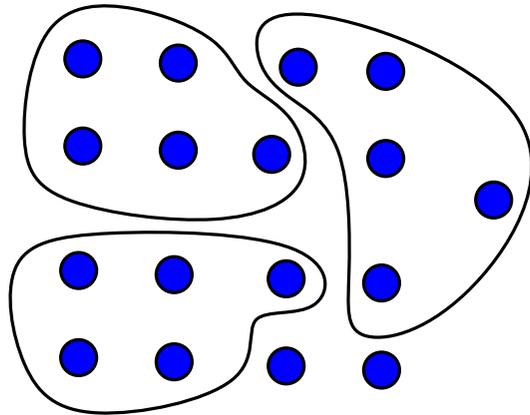
* Problema: Un astronauta empezó su viaje un martes a las 9 de la mañana. Si el viaje duró 115 horas, ¿qué día y a qué hora aterrizó?

* ¿Qué día de la semana será dentro de un año? ¿Por qué?

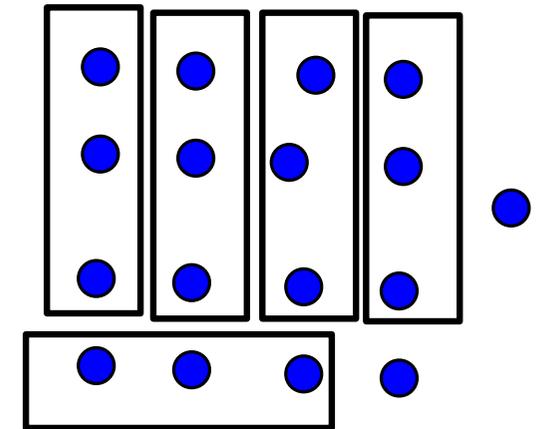
Introducción del algoritmo

* Repartimos 17 caramelos entre 3 amigos.

1. ¿cuántos caramelos le damos a cada amigo?
2. ¿cuántos caramelos sobran?



$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ - 15 & 5 \\ \hline 2 & \end{array}$$



¿Notación para la división?

$$17 \div 3 = 5 R 2$$

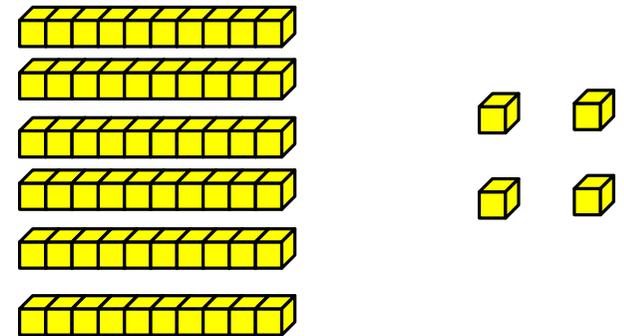
$$17 = 3 \times 5 + 2$$

Algoritmo de la división: introducción

- * También aquí debemos apoyarnos en los materiales, al principio.

- * Queremos hacer la división $64 \div 2$.

¿Cómo la interpretamos?



- * ¿Y si queremos hacer la división $52 \div 4$?

Divisiones en 4º – Singapur

(c)

$$\begin{array}{r}
 \overline{) 6480} \\
 \underline{4} \\
 8 \\
 \underline{8} \\
 0 \\
 \underline{0} \\
 0
 \end{array}$$

d 2 *q* *D*

(d)

$$\begin{array}{r}
 \overline{) 2184} \\
 \underline{14} \\
 78 \\
 \underline{70} \\
 84 \\
 \underline{84} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2184 \quad | \quad 7 \\
 \underline{21} \\
 08 \\
 \underline{7} \\
 14 \\
 \underline{14} \\
 0
 \end{array}$$

- * Los divisores de dos (o más) cifras han desaparecido del currículo (ya hace algunos años).

Algoritmos de división

- * Algoritmo tradicional: dos versiones.

Algoritmo “extendido”

$$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 0 \quad | \quad 2 \quad 3 \\ -4 \quad 6 \quad \quad | \quad 2 \quad 7 \\ \hline 1 \quad 8 \quad 0 \\ -1 \quad 6 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 9 \end{array}$$

Algoritmo “usual”
(“comprimido”)

$$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 0 \quad | \quad 2 \quad 3 \\ 1 \quad 8 \quad 0 \quad | \quad 2 \quad 7 \\ \hline 1 \quad 9 \end{array}$$

¿Otros algoritmos?

ABN

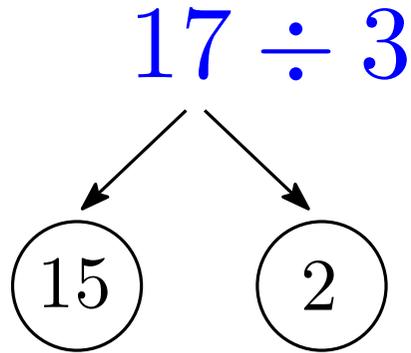
Una propuesta

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 4 \ 2 \ 7 \\ - 1 \ 5 \ 0 \\ \hline 2 \ 7 \ 7 \\ - 1 \ 5 \ 0 \\ \hline 1 \ 2 \ 7 \\ - 1 \ 2 \ 0 \\ \hline 7 \end{array} & \begin{array}{r} 1 \ 5 \\ \hline 1 \ 0 \\ 1 \ 0 \\ + \ 8 \\ \hline 2 \ 8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 4 \ 2 \ 7 \\ - 3 \ 0 \ 0 \\ \hline 1 \ 2 \ 7 \\ - 1 \ 2 \ 0 \\ \hline 7 \end{array} & \begin{array}{r} 1 \ 5 \\ \hline 2 \ 0 \\ + \ 8 \\ \hline 2 \ 8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 4 \ 2 \ 7 \\ - 3 \ 7 \ 5 \\ \hline 5 \ 2 \\ - 4 \ 5 \\ \hline 7 \end{array} & \begin{array}{r} 1 \ 5 \\ \hline 2 \ 5 \\ + \ 3 \\ \hline 2 \ 8 \end{array} \end{array}$$

Algoritmo de los “cocientes parciales”

¿Otros algoritmos?

- * Basado en las descomposiciones de números:



- * Haz estos cálculos con los algoritmos indicados:
 - i) $147 \div 8$, descomponiendo y con cocientes parciales.
 - ii) $1347 \div 26$, con cocientes parciales.

Un problema ¿de 5.º?

- * Alicia tiene el triple de dinero que Benito, y Lucía tiene 16 euros más que Benito. Si entre los tres tienen 186 euros, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

Primaria-Secundaria: dos dificultades concretas

- * El significado del signo “=”

En la resolución de problemas es usual encontrarse expresiones como

$$7 \times 4 = 28 + 7 = 35$$

- * Es importante entender que el signo “=” es bidireccional.
- * Una idea que puede ayudar. Además de

$$3 + \square = 8$$

- * Proponer también

$$9 = 4 + \square$$

$$2 + 6 = \square + 3$$

$$25 = 7 \times \square + 4$$

El paso aritmética-álgebra

- * La iniciación al lenguaje algebraico se trata en el año K-6 en muchos países.

- * Cuentas como

$$\pi + 2\pi = 3\pi$$

son una introducción excelente.

- * En Singapur, en los problemas sobre circunferencias y círculos, tratan π de estas tres formas distintas:

a) aproximando $\pi \approx 3,14$ (con calculadora).

b) de manera *exacta*.

c) aproximando $\pi \approx \frac{22}{7}$.

La calculadora (y otros dispositivos)

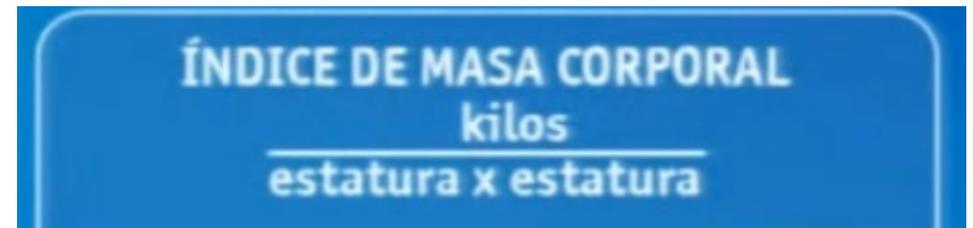
- * Está en el currículo, y habría que integrarla en el aula.

aunque solo sea para que no ocurra esto:

<https://www.youtube.com/watch?v=zclITKd4ivQ>

- * Usa tu calculadora para averiguar tu índice de masa corporal.

(La estatura es en metros)



ÍNDICE DE MASA CORPORAL

$$\frac{\text{kilos}}{\text{estatura} \times \text{estatura}}$$

- * Dos aspectos distintos:

- (1) su uso para hacer operaciones “complicadas”, o para comprobar resultados.
- (2) su utilidad en el diseño de actividades de aprendizaje.

Un ejemplo de actividad de aprendizaje

- * Calculadoras estropeadas.

BROKEN CALCULATOR

1 and 5 | 2 and 3 | 3 and 4 | **4 and 5** | 5 and 2 | More Calculator Activities

Use the keys on this broken calculator to make the totals from 1 to 20. Five has already been done as an example, see below.

1	2	3	+
4	5	6	-
7	8	9	x
C	0	=	÷

1 = 5 - 4
2 =
3 =
4 =
5 = 54 - 45 - 4
6 =
7 =
8 =
9 =
10 =
11 =
12 =
13 =
14 =

https://www.transum.org/Software/SW/Starter_of_the_day/Students/Broken_Calculator.asp