ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

EsTalMat Castilla y León

PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático

Prueba de selección

4 de junio de 2022

Nombre:……………………………………………………………..

Apellidos:…………………………………………………………...

Fecha de nacimiento:……………………………………………...

Teléfonos:…………………………………………………………..

Centro y curso:………………………………………………………………………………

UNA PREGUNTA (RESPONDE LIBREMENTE LO QUE SIENTES):

¿Te apetece y estás dispuesto realmente a acudir a clases de resolución de problemas y del mundo de las matemáticas, que no se ven en el instituto, durante las tardes de la mayoría de los miércoles lectivos de los próximos dos años? ....

....

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS (con un descanso de 15 minutos)

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Tienes dos horas en total con un descanso de 15 minutos después de los dos primeros problemas. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30 minutos para cada ejercicio.

Te deseamos mucho éxito.

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA

Junta de Castilla y León

1. CÍRCULOS APILADOS

En las tres figuras se muestran círculos apilados de forma que cada una tiene una fila más que la anterior. La figura 1ª tiene tres puntos de contacto, marcados en negro.

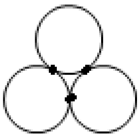


Figura 1ª

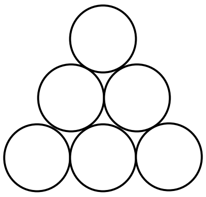


Figura 2ª

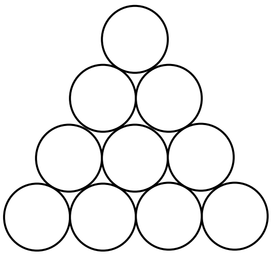


Figura 3ª

a) Cuenta el número de puntos de contacto que hay entre los círculos de las figuras segunda y tercera.

b) Construye la figura siguiente (la cuarta) y cuenta el número de puntos de contacto entre los círculos.

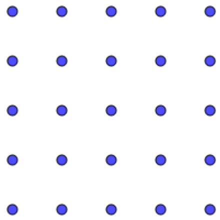
c) ¿Cuántos puntos de contacto habrá en la figura número 20?

(Continúa detrás)

d) ¿Qué número de figura tiene 1584 puntos de contacto?

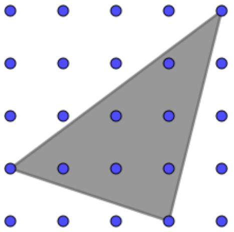
e) ¿Por qué no puede haber ninguna figura que tenga 372 puntos de contacto? ¿Cuáles son los números de las dos figuras en las que el número de puntos de contacto se acerca más a 372?

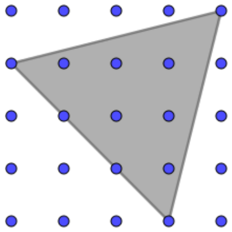
2. TRIÁNGULOS EN UN CUADRADO

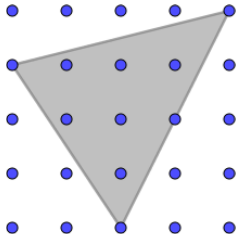


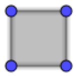
En esta retícula cuadrada de 4 x 4 celdas vamos a dibujar triángulos uniendo el punto del extremo superior derecho con un punto del lado izquierdo y otro punto del lado inferior.

Aquí puedes ver algunos ejemplos:

A) 

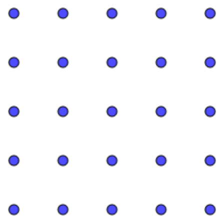
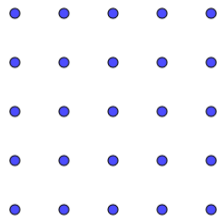
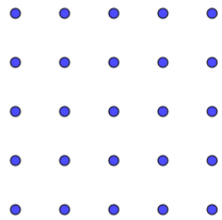
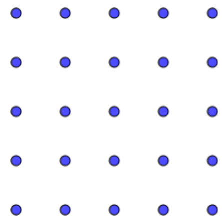
B) 

C) 

a) Tomando como unidad de medida  = 1 cm^2 , explica cómo calculas el área de los triángulos dibujados en A) , B) y C)?

(Continúa detrás)

b) Imagina todos los triángulos que se pueden dibujar de la misma forma: Un vértice fijo en el extremo superior derecho, otro vértice en un punto cualquiera del lado izquierdo y el tercer vértice en un punto cualquiera del lado inferior. ¿Cuál es el área más pequeña que puede tener uno de esos triángulos? ¿Y el área más grande? Dibuja algún ejemplo de cada caso.

c) Entre el área más pequeña y la más grande, ¿qué números pueden ser área de un triángulo de ese tipo?

3. DIVIDIR ENTRE CINCO

Roi escribe en una pizarra cuatro números elegidos entre 0, 1, 2, 3 ó 4. Si quiere, puede repetir números: por ejemplo 0,1,0,1 ó 1,3,2,4.

Teo realiza repetidas veces la siguiente operación: cambia uno de los números, el que quiera, por el resto de dividir entre 5 el producto de otros dos números de la pizarra, a su elección.

Por ejemplo: de 1,2,3,4 pasa a 1,2,3,1 porque cambia el 4 por el resto de dividir 2x3 entre 5, que es 1. Esta operación la escribimos:

$$1,2,3,4 \longrightarrow 1,2,3,1$$

a) Roi ha escrito en la pizarra al menos un 0. Teo logra que los cuatro números de la pizarra sean 0 realizando varias veces la operación permitida. ¿Cuál es el máximo número de veces que tendrá que repetir la operación para lograr su objetivo? Explica tu respuesta.

b) Suponte ahora que al menos dos de los cuatro números que Roi ha escrito en la pizarra son 1. Teo puede lograr que los cuatro números de la pizarra sean todos iguales realizando varias veces la operación permitida. ¿Cuántas veces tiene que repetir la operación como máximo para lograrlo?

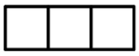
(Continúa detrás)

Cada vez que Roi escribe cuatro números en la pizarra, el objetivo de Teo es lograr que los cuatro números sean iguales después de realizar varias veces la operación permitida.

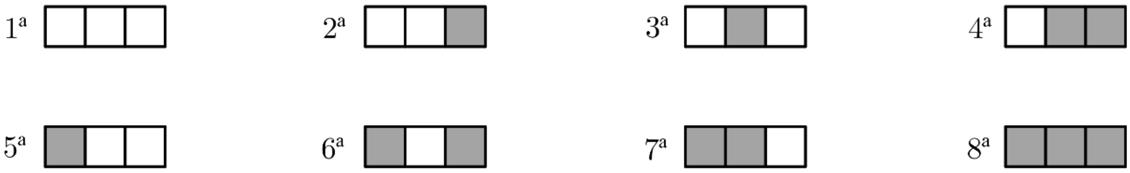
c) Si Roi escribe al menos un 2, ¿podrá Teo conseguir su objetivo? Justifica tu respuesta.

d) ¿Puede Roi elegir 4 números de modo que Teo no pueda lograr su objetivo? Explica tu respuesta

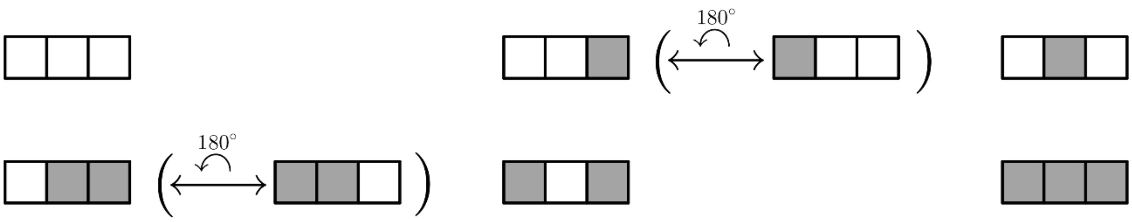
4. COLOREAR FIGURAS

Consideramos la siguiente figura formada por tres cuadrados: 

Nos planteamos contar de cuántas formas distintas es posible colorearla eligiendo, para cada uno de los cuadrados que la componen, pintarlo de negro o dejarlo en blanco. En principio como hay tres cuadraditos y para cada uno de ellos hay dos opciones (blanco/negro), hay 8 posibilidades distintas ($2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$).



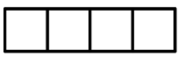
Ahora bien, si suponemos que estas figuras se pueden mover, (por ejemplo, si se tratara de trozos de papel recortados con esa forma) observamos que las posibilidades 2º y 5ª son en realidad la misma: bastaría girar 180° una de ellas para obtener la otra. Y lo mismo ocurre con la 4ª y la 7ª. Podemos entonces contar cuántas posibilidades realmente diferentes hay (entendiendo que si podemos pasar de una posibilidad a otra mediante un giro, esas dos posibilidades son la misma)



Como vemos, con esta premisa solo existen seis formas distintas de colorear la figura.

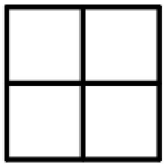
Para las cuestiones que se plantean a continuación, supondremos en todo momento que cuando una figura está compuesta por otras más sencillas, tenemos dos opciones para cada una de las partes que la componen: pintarla de negro o dejarla en blanco. Además, consideraremos que estas figuras se pueden mover y que, si podemos pasar de una forma de colorear la figura a otra mediante un giro, las dos son en realidad la misma forma.

a) ¿De cuántas maneras distintas se puede colorear esta figura formada por cuatro cuadraditos?

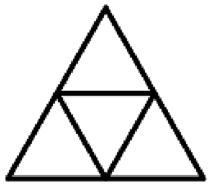


(Continúa detrás)

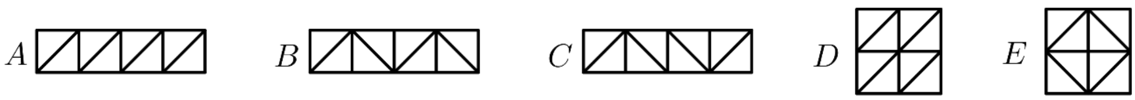
b) ¿Y esta, en la que los cuadraditos están dispuestos de otra forma? Recuerda que buscamos coloraciones **distintas** de modo que no haya un giro que permita pasar de una coloración a otra.



c) En esta situación, la figura está formada por cuatro triángulos más pequeños. ¿Cuántas coloraciones **distintas** hay?



Observa las siguientes figuras. Como puedes ver, se han obtenido dividiendo en triángulos de distintas maneras los cuadraditos que formaban dos de las figuras con las que hemos trabajado anteriormente.



d) ¿En cuál de ellas crees que habrá más formas distintas de colorearla? ¿En cuál crees que habrá menos? Explica por qué.

(No intentes encontrar todas las posibilidades para cada una de las figuras, pueden ser muchísimas...)