Ámbito Científico-Tecnológico | Módulo III | Bloque 3 | Unidad 3

Las letras y los números: un cóctel perfecto

En esta unidad vas a comenzar el estudio del álgebra, el lenguaje de las matemáticas. Vas a aprender a utilizar las letras para trabajar con ellas como si fueran valores conocidos.
Esta parte de las matemáticas es muy útil y enseguida lo descubrirás. Ahora familiarízate con las expresiones algebraicas en su conjunto, practica las operaciones básicas que se pueden hacer con ellas y pronto verás su utilidad.
¡Adelante!.

Bloque III

Módulo III

Unidad 3

Índice

1. Expresiones algebraicas

Muchas veces en matemáticas tenemos que trabajar con valores desconocidos. En estos casos los números que no conocemos los representamos mediante letras y se llaman incógnitas. Estamos ante el **álgebra** (parte de las matemáticas que nos permite estudiar y trabajar con expresiones en las que aparecen números y letras relacionados con las operaciones matemáticas).

Cierto es que al principio cuesta un poco “traducir” enunciados del lenguaje escrito o hablado al algebraico, pero con un poco de práctica enseguida lo dominarás. Aquí tienes unos ejemplos en donde al número desconocido o incógnita lo representamos mediante la letra **x**.

Ejemplos:

Lenguaje hablado o escrito	**Lenguaje algebraico**
El doble de un número	$2x$
El triple de un número más 8 unidades	$3x – 8$
El quíntuplo de un número menos el doble de ese mismo número	$5x – 2x$
La tercera parte de un número	$x/3$
El producto de un número y su siguiente	$x(x + 1)$

Practica:

1 Escribe en lenguaje algebraico estos enunciados:

El triple de un número menos cinco unidades

Un número más su cuádruplo

La mitad de un número más la tercera parte del mismo número

La mitad de la suma de dos números distintos

El cuadrado de un número menos su tercera parte

2. Monomios

Un **monomio** es una expresión algebraica (consta de números y letras que se multiplican). Tiene dos partes. El coeficiente o número y la parte literal o las letras.

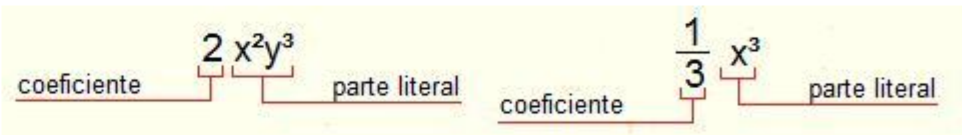

Imagen: Matemáticas y Tecnología. Gobierno de Aragón

Ejemplos: $5x^2$ $2xy^3$ $4xy^2z^4$ x^3 $3x$

Grado de un monomio: Se llama grado de un monomio a la suma de los exponentes de la parte literal.

Ejemplo: $-6x^3y^3z$ Grado del monomio: 3+3+1 = 7 (la z tiene exponente 1)

Monomio	Grado	Coeficiente	Parte literal
$2x^2y^3$	5	2	x^2y^3
$\frac{-2x^8}{5}$	8	$\frac{-2}{5}$	x^8
$-xyz^2$	4	-1	xyz^2
$3x^2y$	3	3	x^2y

Monomios semejantes son aquellos que tienen la misma parte literal.

Ejemplo: $2x^2y$ y $-7x^2y$ son semejantes. $4x^3$ y $4x^4$ no son semejantes

Practica:

2 Completa la tabla:

Monomios	Grado	Coeficiente	Parte literal
$-5x$			
$6x^2y^3z^2$			
$-6/7x^5z$			
$8x^5y^6$			
x^2			

2.1. Operaciones con monomios

- ***Suma y resta de monomios.***

Para poder sumar o restar monomios, éstos han de ser semejantes. De esta manera, sumamos o restamos los coeficientes y dejamos la parte literal.

Ejemplos: $3\underline{x^2y} + 8\underline{x^2y} - 5\underline{x^2y} = \mathbf{6\underline{x^2y}}$ $6x^2 - 5x^2 + 10x^2 = \mathbf{11x^2}$

- ***Multiplicación de monomios***

Para multiplicar monomios procedemos de la siguiente forma: el coeficiente es la multiplicación de los coeficientes y la parte literal será el producto de ambas partes literales (multiplicaremos las potencias de misma base).

Recordatorio: *Repasa lo que has aprendido respecto a la multiplicación y división de potencias con la misma base. Te será muy útil ahora.*

Ejemplos: $3x \cdot 7x = 3 \cdot 7 \cdot x \cdot x = \mathbf{21x^2}$

$5x \cdot (-2x^3) = 5 \cdot (-2) \cdot x \cdot x^3 = \mathbf{-10x^4}$

$4x^2y^3 \cdot 6x^3y^3z = 4 \cdot 6 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^3 \cdot z = \mathbf{24x^5y^6z}$

- ***División de monomios***

Para dividir monomios se hace de forma parecida a la multiplicación: el coeficiente es la división de los coeficientes y la parte literal será la división de ambas partes literales (dividiremos las potencias que tengan la misma base). Lo mejor es simplificar las expresiones algebraicas.

Ejemplos:

$$\frac{8x^2}{4x} = 2x \qquad \frac{16x^5y^4}{10x^3y} = \frac{8}{5}x^2y^3$$

Practica:

3 Realiza estas operaciones con monomios:

$5x^2 - 7x^2 =$	$2xy \cdot 3xy^4 =$	$(-4x^2y^2) : (-2x^2y) =$
$8x^2y^3 + 2x^2y^3 =$	$(-5)x^5 \cdot (-4)x^5 =$	x^8 **:** $(-3x^3) =$
$-x^3y^4 + 3x^3y^4 =$	$2x^2y^3 \cdot 4xy^5z \cdot 7x^3z^4 =$	$10x^3y4z^2$ **:** $5xyz =$

3. Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica compuesta por dos o más monomios. Se suelen escribir colocando sus términos ordenados por orden descendente de su grado.

Ejemplos: $5x^3 - 2x^2 + 4x + 8$ $\qquad$ $8x^6 + 5x^4 - 3x2 + x$

Grado de un polinomio: es el mayor grado de los monomios que lo componen.

El <u>término independiente</u> de un polinomio es el monomio de grado cero, es decir, el que no tiene letras

Ejemplos:

Polinomio	Grado	Término independiente
$2x + 9$	1	9
$8x^6 + 5x^4 - 3x^2 + x$	6	No tiene
$5x^3 - 2x^2 + 4x + 8$	3	8
$x^{10} - x^4 - 9x^2 + 7$	10	7

Valor numérico de un polinomio: es el valor que se obtiene de sustituir la incógnita (letra) por el número correspondiente y realizar las operaciones.

Ejemplo: Calcula el valor numérico del polinomio **$P(x) = 5x^3 – 2x^2 + 4x + 8$** para **$x = 1$**

Donde está la x, ponemos el valor **1**	$P(1) = 5 \cdot \mathbf{1}^3 – 2 \cdot \mathbf{1}^2 + 4 \cdot \mathbf{1} + 8$
Hacemos las operaciones	$5 – 2 + 4 + 8$
El valor del polinomio P(x) para x = 1 es 15	15

Ejemplo: Calcula el valor numérico del polinomio **$P(x) = 5x^3 – 2x^2 + 4x +8$** para **$x = -1$**

Donde está la x, ponemos el valor **-1**	$P(-1) = 5 \cdot (\mathbf{-1})^3 – 2 \cdot (\mathbf{-1})^2 + 4 \cdot (\mathbf{-1}) + 8$
Hacemos las operaciones	$-5 - 2 - 4 + 8 = -3$
El valor del polinomio P(x) para x = 1 es -3	-3

Practica:

4 Halla el valor numérico de $P(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 3$ para $x = 2$; $x = -2$ y $x = 0$

3.1. Operaciones con polinomios

- ***Suma de polinomios***

Para sumar dos o más polinomios, se agrupan los monomios semejantes y se simplifican.

Ejemplo: Vamos a sumar los polinomios **$P(x)= 9x^3 – 6x – 10$** y **$Q(x)= –12x^3 + 2x^2 + 8$**

Colocamos los polinomios enfrentando los	$9x^3$		$- 6x$	-10
monomios semejantes.	$-12x^3$	$+2x^2$		$+8$
Sumamos	**$-3x^3$**	**$+2x^2$**	**$- 6x$**	**$- 2$**

- ***Resta de polinomios***

Antes de nada, debes saber a qué se llama **opuesto de un polinomio**. Es el que resulta de cambiar de signo todos sus monomios.

Ejemplo: El opuesto de $P(x)= 9x^3 – 6x – 10$ es $-P(x)= -9x^3 +6x + 10$

Pues bien, para restar polinomios, se suma al primero el opuesto del segundo.

Ejemplo: Vamos a restar los polinomios **$Q(x)= -12x^3 + 2x^2 + 8$ menos $P(x)= 9x^3 - 6x - 10$**

Primero hallamos el opuesto de P(x).	$-P(x) = -9x^3 + 6x +10$			
Seguidamente sumamos Q(x) con el opuesto –P(x)	$-12x^3$	$+2x^2$		$+8$
como ya sabemos.	$-9x^3$		$+6x$	$+10$
Sumamos.	**$-21x^3$**	**$+2x^2$**	**$+6x$**	**$+18$**

Practica:

5. Dados los polinomios:

$P(x) = 3x^2 – 3x + 3$ **$Q(x) = x^4 + 2x^3 – x + 2$** **$R(x) = -10x^2 + x – 1$**

Haz las siguientes operaciones:

$P(x) + Q(x) =$ **$P(x) + R(x) =$** **$Q(x) – P(x) =$** **$P(x) – R(x) =$**

- ***Multiplicación de polinomios***

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno por todos los demás del otro, y después se suman los polinomios obtenidos.

Ejemplo: vamos a multiplicar los polinomios **$P(x) = x^2 + 2x - 3$** y **$Q(x) = -3x^2 - 2x – 5$**

Colocamos los polinomios uno arriba y otro debajo			x^2	$+2x$	-3
			$-3x^2$	$-2x$	-5
Multiplicamos el **-5** por los monomios de arriba y colocamos en su sitio			$-5x^2$	$-10x$	$+15$
Multiplicamos el **-2x** por los monomios de arriba y colocamos en su sitio		$-2x^3$	$-4x^2$	$+6x$	
Multiplicamos el **$-3x^2$** por los monomios de arriba y colocamos en su sitio	$-3x^4$	$-6x^3$	$+9x^2$		
Sumamos los monomios semejantes	**$-3x^4$**	**$-8x^3$**		**$-4x$**	**$+15$**

Resultado final: $-3x^4 – 8x^3 – 4x + 15$

- ***División de polinomios***

Para dividir polinomios es necesario que el grado del polinomio dividendo sea mayor o igual que el grado del polinomio divisor. Hagamos un ejemplo despacio.

Ejemplo: vamos a dividir los polinomios **$P(x) = 4x^2 + 2x - 14$** y **$Q(x) = 2x – 5$**

Colocamos los polinomios para dividir	**$+4x^2$**	**$+2x$**	**-14**	**$+2x$**	**-5**
Dividimos el 1º monomio del dividendo ($+4x^2$) por el 1º del divisor (+2x) y nos da +2x (al cociente).	$-4x^2$	$+10x$		$+2x$	$+6$
+2x se multiplica por los monomios del divisor (-5 y +2x) y los resultados se colocan frente a sus semejantes cambiados de signo para restar. Resto y bajo el siguiente monomio (-14)	--	$+12x$	-14		
Repito el proceso: divido el primer monomio que tengo (+12x) entre el 1º del divisor (+2x) y nos da +6 que va al cociente		$-12x$	$+30$		
+6 se multiplica por los monomios del divisor (-5 y +2x) y los resultados se colocan frente a sus semejantes cambiados de signo para restar. Resto. Como no hay para bajar, se acabó la división.		--	16		

Por tanto, el resultado de la división de **P(x) = 4x2 + 2x -14** entre **Q(x) = 2x – 5** es **2x + 6** y de resto queda **+16**

Practica:

6. Dados los polinomios:

P(x) = $2x^3$ - $5x^2$ -14x + 10	**Q(x) =2x + 3**
Haz las siguientes operaciones:	
P(x) • Q(x) =	**P(x) : Q(x) =**

4. Identidades notables

Una **identidad** es una igualdad algebraica que es cierta para cualquier valor de las letras (incógnitas) que se elijan.

Así por **ejemplo** 3x + 5x = 8x es una identidad porque si:

x = **1**	3 • **1** + 5 • **1** = 8 • **1**	3 + 5 = 8	8 = 8
x = **5**	3 • **5** + 5 • **5** = 8 • **5**	15 + 25 = 40	40 =40
x = **-2**	3 • **(-2)** + 5 • **(-2)** = 8 • **(-2)**	-6 – 10 = -16	-16 = -16

En este apartado vamos a ver las llamadas identidades notables, muy conocidas en matemáticas.

- ***Cuadrado de la suma***

"El cuadrado de una suma (a + b) es igual al cuadrado del primero (a) más el cuadrado del segundo (b), <u>más</u> el doble del primero por el segundo".

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

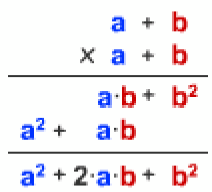

Imagen: Matemáticas y Tecnología. Gobierno de Aragón

Ejemplos:

$(x + 3)^2$ =	$x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2$ =	$x^2 + 6x + 9$
$(2x + 4)^2$ =	$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 4 + 4^2$ =	$4x^2 + 16x + 16$

- ***Cuadrado de la diferencia***

"El cuadrado de una diferencia (a - b) es igual al cuadrado del primero (a) más el cuadrado del segundo (b), <u>menos</u> el doble del primero por el segundo".

$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

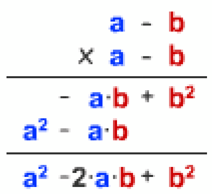

Imagen: Matemáticas y Tecnología. Gobierno de Aragón

Ejemplos:

$(x - 3)^2$ =	$x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2$ =	$x^2 - 6x + 9$
$(3x - 5)^2$ =	$(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2$ =	$9x^2 - 30x + 25$

- ***Suma por diferencia***

"El producto de la suma de dos monomios (a + b) por su diferencia (a –b) es igual a la <u>diferencia</u> de los cuadrados de ambos monomios".

$$\mathbf{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

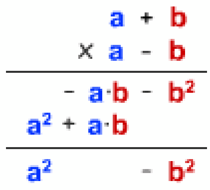

Imagen: Matemáticas y Tecnología. Gobierno de Aragón

Ejemplos:

$(x + 3) \cdot (x - 3)$ =	$x^2 - 3^2 =$	$x^2 - 9$
$(4x + 2) \cdot (4x - 2)$ =	$4x^2 - 2^2 =$	$16x^2 - 4$

Practica:

7. Resuelve estas identidades notables:

$(5x + 5)^2$ =	$(2x – 7)^2$ =	$(2x + 2) \cdot (2x – 2)$ =
$(x + 10)^2$ =	$(x – 1)^2$ =	$(x +1) \cdot (x – 1)$ =

Glosario

Álgebra: parte de las matemáticas que nos permite estudiar y trabajar con expresiones en las que aparecen números y letras relacionados con las operaciones matemáticas.

Monomio: es una expresión algebraica (consta de números y letras que se multiplican). Tiene dos partes: el coeficiente o número y la parte literal o letras.

Polinomio: es una expresión algebraica compuesta por dos o más monomios.

Identidad: es una igualdad algebraica que es cierta para cualquier valor de las letras (incógnitas) que se utilicen.

Actividades

1. **Expresa en lenguaje algebraico:**
   a) El cuadrado de un número menos su triple.
   b) El producto de dos números consecutivos.
   c) La mitad de la suma de dos números.
   d) Un número más su cuarta parte.
   e) El cuadrado de la suma de dos números.
   f) La suma de los cuadrados de dos números.

2. Indica el grado de los siguientes monomios y escribe uno semejante a cada uno.

a) $-3xy$ b) $2x^4$ c) $1/2x^2y$ d) $-5x$

3. Efectúa las operaciones y simplifica la expresión resultante:

a) $5x^3 - 3x^3 + x^3 =$ b) $7x^2 - 4x + 2x - 3x^2 =$

c) $3x\,(-6x^5) =$ d) $2xy^2(-xy^2) =$

4. Indica el grado y término independiente de los siguientes polinomios:

a) $4x^4 - x^3 + 7$ b) $x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ c) $3x^2 - 8x$

5. Calcula el valor numérico de $2x^3 - 3x^2 + x - 6$ para x = 0, x = 2 y x = -1

6. Dados los polinomios $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 8x + 1$, $Q(x) = x^3 - 5x + 7$ y $R(x) = x - 4$

Calcula:

a) $P(x) + Q(x) =$ c) $P(x) - Q(x) =$

b) $Q(x) \cdot R(x) =$ d) $Q(x) : R(x) =$

7. Opera y simplifica:

a) $(3x^2 + 1) \cdot (x - 2) - 4x \cdot (x - 1) =$

b) $(9x + 3) \cdot (2x^2 - 5x + 4) - 6(3x^3 + 2) =$

8. Resuelve estas identidades notables:

a) $(x + 8)^2 =$ b) $(3x - 3)^2 =$

c) $(4x + 2) \cdot (4x - 2) =$ d) $(x - 10)^2 =$

e) $(x + 1)^2 =$ f) $(x + 9) \cdot (x - 9) =$

Soluciones a los practica

Practica 1

$3x - 5$

$x + 4x$

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

$\frac{x + y}{2}$

$x^2 - \frac{x}{3}$

Practica 2

Monomios	Grado	Coeficiente	Parte literal
$-5x$	1	-5	x
$6x^2y^3z^2$	7	6	$x^2y^3z^2$
$\frac{-6}{7}x^5z$	6	$\frac{-6}{7}$	x^5z
$8x^5y^6$	11	8	x^5y^6

x^2	*2*	*1*	x^2

Practica 3

$-2\,x^2$	$6x^2y^5$	$2y$
$10\,x^2y^3$	$20x^{10}$	$-1/3x^5$
$2x^3y^4$	$56x^6y^8z^5$	$2x^2y^3z$

Practica 4

Para $x = 2$ $P(x) = 9$ *Para* $x = -2$ $P(x) = -31$ *Para* $x = 0$ $P(x) = -3$

Practica 5

P(x) + Q(x) = $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$

P(x) + R(x) = $-7x^2 - 2x + 2$

Q(x) – P(x) = $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

P(x) – R(x) = $13x^2 - 4x + 4$

Practica 6

P(x) • Q(x) = $4x^4 - 4x^3 - 43x^2 - 22x + 30$

P(x) : Q(x) = $x^2 - 4x - 1$ *Resto: 13*

Practica 7

$(5x + 5)^2 = 25x^2 + 50x + 25$ $(2x - 7)^2 = 4x^2 - 28x + 49$ $(2x + 2) \cdot (2x - 2) = 4x^2 - 4$

$(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$ $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ $(x + 1) \cdot (x - 1) = x^2 - 1$

Bibliografía

- Gobierno de Aragón. Matemáticas y Tecnología, módulo 3. Educación Secundaria para Personas Adultas. España. Gobierno de Aragón. 2011. 134 p.
- Web: www.vitutor.com