La antena parabólica

Cuántas veces hemos pensado para qué sirven cosas tan "raras" de las matemáticas como la ecuación de segundo grado, por ejemplo. En la vida cotidiana, ¿dónde están?
Pues bien, aunque no la veamos explícitamente, sí que vemos sus resultados como una antena parabólica. Su forma no es caprichosa, es la consecuencia de una ecuación de segundo grado. Te invito a descubrir este mundo.
¡Adelante!

Bloque III

Módulo IV

Unidad 3

Índice

1. ¿Qué es una ecuación de segundo grado? **3**
2. Resolución de ecuaciones de segundo grado **3**
2.1 Completas 3
2.2 Incompletas 4
2.3. Discusión de las soluciones de una ecuación de segundo grado 5
3. Ecuaciones bicuadradas **7**
4. Resolución gráfica de ecuaciones de segundo grado **8**
Glosario **10**
Actividades **10**
Soluciones a los practica **11**
Bibliografía recomendada. **14**

1. ¿Qué es una ecuación de segundo grado?

Una ecuación, como ya sabes por anteriores unidades, es una igualdad algebraica y diremos que es de segundo grado porque la incógnita está elevada al cuadrado. La expresión general de una ecuación de segundo grado con una incógnita es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en donde a, b y c son números.

Ejemplo:

$2x^2 + 3x - 8 = 0$

Cuando una ecuación de segundo grado presenta todos sus términos se dice que es una **ecuación de segundo grado completa**, en caso contrario se dice que es una **ecuación de segundo grado incompleta**.

La ecuación de segundo grado tiene, a diferencia de las de primer grado, **dos soluciones**, aunque podría darse el caso de que la solución fuera única o que no tuviera.

2. Resolución de ecuaciones de segundo grado

Para resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita lo primero que debemos hacer es ordenarla, esto es, colocar todos los términos en un miembro y en el otro quedará, lógicamente, igualado a cero. Tenemos dos apartados:

2.1 Completas

Estamos ante una ecuación de segundo grado completa cuando presenta todos sus términos expresándose de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$.

Para su resolución existe una expresión que es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Al solucionar esta expresión obtendremos dos posibles soluciones que también reciben el nombre de raíces.

Ejemplo:

Sea la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$

A la vista de ella vemos que: a = 1; b = -3; c = 2

Aplicamos la expresión general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \bullet a \bullet c}}{2 \bullet a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \bullet 1 \bullet 2}}{2 \bullet 1}$$

Y desarrollando la expresión, vemos que tenemos **dos** soluciones

$$\mathbf{x} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$\mathbf{x} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$\mathbf{x} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{2} \qquad x_2 = \frac{3-1}{2}$$

$$x_1 = \frac{4}{2} \qquad x_2 = \frac{2}{2}$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$$

2.2 Incompletas

En la resolución de una ecuación de segundo grado incompleta pueden darse dos casos:

- ***Que falte el término bx***

La ecuación de segundo grado quedará de la siguiente forma: $ax^2 + c = 0$

Para su resolución procedemos de la siguiente forma:

1. Despejamos la x^2

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}} \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Ejemplo:

Sea la ecuación

$$3x^2 - 12 = 0$$

Despejamos la x^2

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = \frac{12}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{12}{3}}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = +\sqrt{4} \qquad x_2 = -\sqrt{4}$$

$$x_1 = +2 \qquad x_2 = -2$$

- ***Que falte el término c***

La ecuación de segundo grado quedará de la siguiente forma: $ax^2 + bx = 0$

Para su resolución procedemos de la siguiente forma:

1. Sacamos factor común a la ***x***

$$ax^2 + bx = 0$$

2. Tenemos un producto igual a ***0***. Esto solo puede ser posible si uno de los dos factores es cero, así que:

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = 0 \qquad\qquad x_2 = \frac{-b}{a}$$

Ejemplo:

Sea la ecuación $3x^2 - 15 = 0$

1. Sacamos factor común a la x

$$x(3x - 15) = 0$$

2. Tenemos un producto igual a 0. Esto solo puede ser posible si uno de los dos factores es cero, así que:

$$x = 0 \qquad\qquad 3x - 15 = 0$$

$$3x = +15$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = 0 \qquad\qquad x_2 = \frac{15}{3} = 5$$

Practica:

1 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 3x - 4 = 0$

b) $x^2 + (x+2) = 580$ *PLS sept.2012*

c) $3x^2 - 27 = 0$

d) $5x^2 - 180 = 0$

e) $2x^2 + x = 0$

f) $5x^2 = 30x$

2.3. Discusión de las soluciones de una ecuación de segundo grado

Discutir o estudiar las soluciones de una ecuación de segundo grado consiste en saber, antes de realizar todas las operaciones, si la ecuación tendrá dos soluciones, una o ninguna.

Para ello, dentro de la fórmula que ya conocemos, nos fijamos en la parte de la raíz cuadrada:

$$\mathbf{x} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}} \longrightarrow \mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}$$

A esta parte $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}$ se la denomina **discriminante,** y según sea tendremos tres situaciones:

a) Si $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac} > 0$. La ecuación tiene **dos** soluciones.

Ejemplo: Sea la ecuación $2x^2 - 7x - 4 = 0$

A la vista de ella vemos que: a = 2; b = -7; c = -4	
Aplicamos la fórmula general	$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \bullet 2 \bullet (-4)}}{2 \bullet 2}$
Nos quedamos con el discriminante	$(-7)^2 - 4 \bullet 2 \bullet (-4)$
	$49 + 32$
	$81 > 0$
Tiene dos soluciones	x_1 x_2

b) Si $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$. La ecuación tiene **una** solución.

Ejemplo: Sea la ecuación **x^2 – 2x + 1 = 0**

A la vista de ella vemos que: a = 1; b = -2; c = 1	
Aplicamos la fórmula general	$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \bullet 1 \bullet 1)}}{2 \bullet 2}$
Nos quedamos con el discriminante	$(-2)^2 - 4 \bullet 1 \bullet 1$
	$4 - 4$
	$0 = 0$
Tiene una solución. Si el discriminante es cero, con tan sólo con continuar haciendo las operaciones vemos que el resultado es único al efectuar la división resultante	x_1

c) Si $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$. La ecuación **no** tiene solución.

Ejemplo: Sea la ecuación **x^2 + x + 3 = 0**

A la vista de ella vemos que: a = 1; b = 1; c = 3	
Aplicamos la fórmula general	$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \bullet 1 \bullet 3)}}{2 \bullet 2}$
Nos quedamos con el discriminante	$1^2 - 4 \bullet 1 \bullet 3$
	$1 - 12$
	$-11 < 0$
No tiene solución porque no existe la raíz cuadrada de un número negativo	**Sin solución**

Practica:

2 Indica el número de soluciones de cada ecuación:

a) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

d) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

e) $x^2 + x + 2 = 0$

f) $x^2 - 3x + 10 = 0$

3. Ecuaciones bicuadradas

Las **ecuaciones bicuadradas** son ecuaciones de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Como ves, no existen términos de grado 3 ni de grado 1.

Para resolver estas ecuaciones podemos emplear la fórmula de las ecuaciones de segundo grado pero antes debemos realizar un cambio de variable. Esto es, a la x^2 la llamaremos z, quedando la ecuación de la siguiente forma: $az^2 + bz + c = 0$ Y ahora aplicaríamos la fórmula de resolución de ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo: Sea la ecuación $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Realizamos el cambio de variable $x^2 = z$	$z^2 - 3z + 2 = 0$	
A la vista de ella vemos que: a = 1; b = -3; c = 2 Aplicamos la fórmula general	$\mathbf{z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \bullet 1 \bullet 2}}{2 \bullet 1}}$ $\mathbf{z = \frac{+3 \pm \sqrt{9-8}}{2}}$ $\mathbf{z = \frac{+3 \pm \sqrt{1}}{2}}$	
Tiene dos soluciones	$\mathbf{z_1 = \frac{+3+1}{2}}$ $\mathbf{z_1 = \frac{+4}{2} = 2}$	$\mathbf{z_2 = \frac{+3-1}{2}}$ $\mathbf{z_2 = \frac{+2}{2} = 1}$
Ahora sustituimos en el cambio de variable	$x^2 = 2$	$x^2 = 1$
Despejamos la x	$x = \sqrt{2}$	$x = \sqrt{1}$

La raíz cuadrada, como sabes, tiene dos soluciones. Así que dos soluciones cada una de ellas hacen en total **cuatro (4).**	$x_1 = +\sqrt{2}$	$x_2 = -\sqrt{2}$	$x_3 = +1$	$x_4 = -1$

La ecuación bicuadrada tiene 4 soluciones.

Practica:

3 Resuelve estas ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $-x^4 + 6x^2 - 5 = 0$

4. Resolución gráfica de ecuaciones de segundo grado

Para resolver gráficamente una ecuación de segundo grado debemos tener presente lo estudiado en la unidad dedicada a las gráficas y las funciones porque en definitiva, tenemos ante nosotros una función $y = 4x^2 - 20x + 25$.

Nuestro objetivo es calcular las soluciones de la ecuación de segundo grado viendo su representación gráfica. Y a eso vamos con este ejemplo.

Ejemplo:

Representemos la función $y = x^2 + 2x - 3$

Construimos la **tabla de valores**

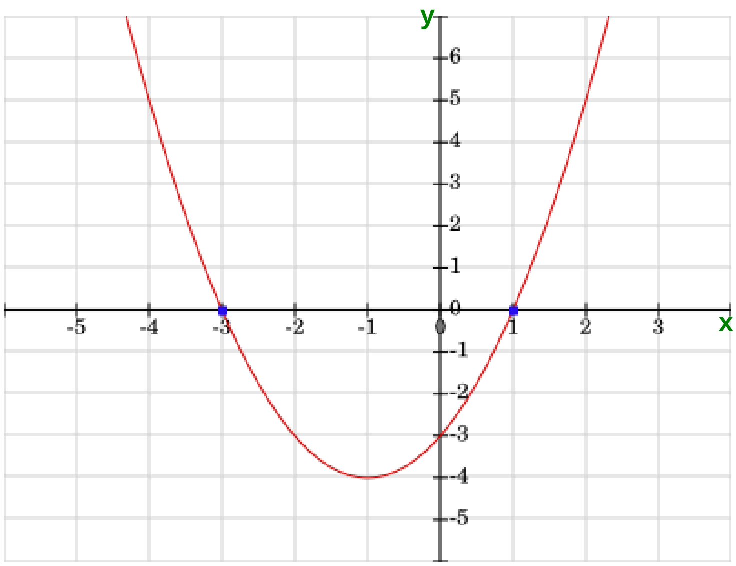
X	-2	-1	0	1	2	3
y	4	0	-2	-2	0	4

Ahora representamos los pares de puntos resultantes obteniendo una curva que recibe el nombre de **parábola**. Ahora queremos conocer las soluciones de la ecuación de segundo grado. Verás que está igualada a cero

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = y$$

y si te fijas respecto de la función, notamos que la y = 0. ¿Qué puntos de la gráfica cumplen que y = 0 ?. Miramos en la tabla de valores y comprobamos que hay dos:



P(-3,0) y P'(1,0). Por tanto los valores de la x son: $x_1 = -3$ $x_2 = 1$

Hemos calculado que las soluciones de la ecuación de segundo grado: $y = x^2 - 2x - 2$ son:

$$x_1 = -3 \quad y \quad x_2 = 1.$$

Ahora nos quedaría comprobarlo resolviendo la ecuación de segundo grado completa mediante la expresión que ya conoces.

Sea la ecuación

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

A la vista de ella vemos que: a = 1; b = 2; c = -3

Aplicamos la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \bullet a \bullet c}}{2 \bullet a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \bullet 1 \bullet 3}}{2 \bullet 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

Y desarrollando la fórmula, vemos que tenemos **dos** soluciones

$$x_1 = \frac{-2 + 4}{2} \qquad x_2 = \frac{-2 - 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{2}{2} \qquad x_2 = \frac{-6}{2}$$

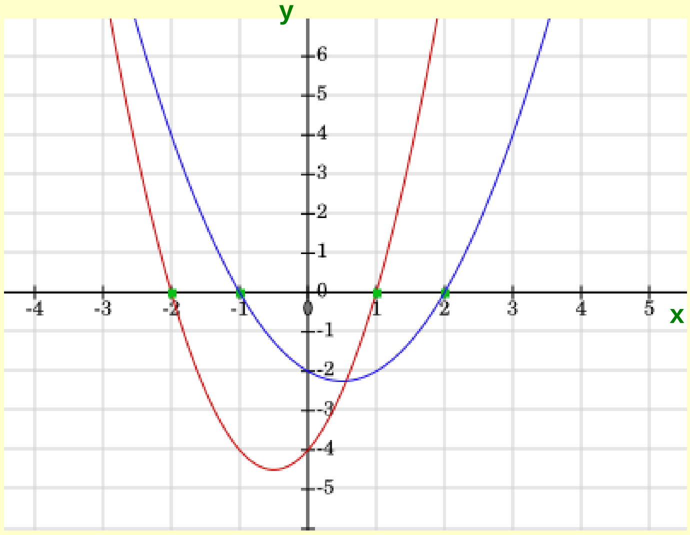
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -3$$

Hemos comprobado que resolviendo la ecuación de segundo grado mediante la fórmula o bien representándola gráficamente, obtenemos los mismos resultados.

Consolidación:
En la representación gráfica de la función de segundo grado, las soluciones a la misma son los puntos de corte de la parábola con el eje x.

Practica:

4 ¿Cuáles son las soluciones de estas ecuaciones de segundo grado?:
$2x^2 + 2x - 4 = 0$ e $x^2 - x - 2 = 0$



Glosario

- **Ecuación de segundo grado:** es aquella que tiene la incógnita elevada al cuadrado**.**
- **Discriminante:** es esta parte de la fórmula de la ecuación de segundo grado**.** $\mathbf{b^2 - 4ac}$
- **Ecuación bicuadrada:** es aquella que tiene la incógnita elevada a cuatro y no tiene términos de grado 3 ó 1**.**
- **Parábola:** gráfica de una función de segundo grado**.**

Actividades

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $9x^2 - 25 = 0$ b) $x^2 + 100 = 0$ c) $2x^2 - 8 = 0$

2. Resuelve las ecuaciones:

a) $5x^2 - 3x = 0$ b) $3x^2 + 5x = 0$ c) $3x^2 = 12x$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^2 + 2x - 35 = 0$ b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ c) $3x^2 - 7x + 5 = 0$

4. Calcula el valor de m para que la ecuación $x^2 - mx + 25 = 0$

a) Tenga una única solución.

b) Tenga dos soluciones.

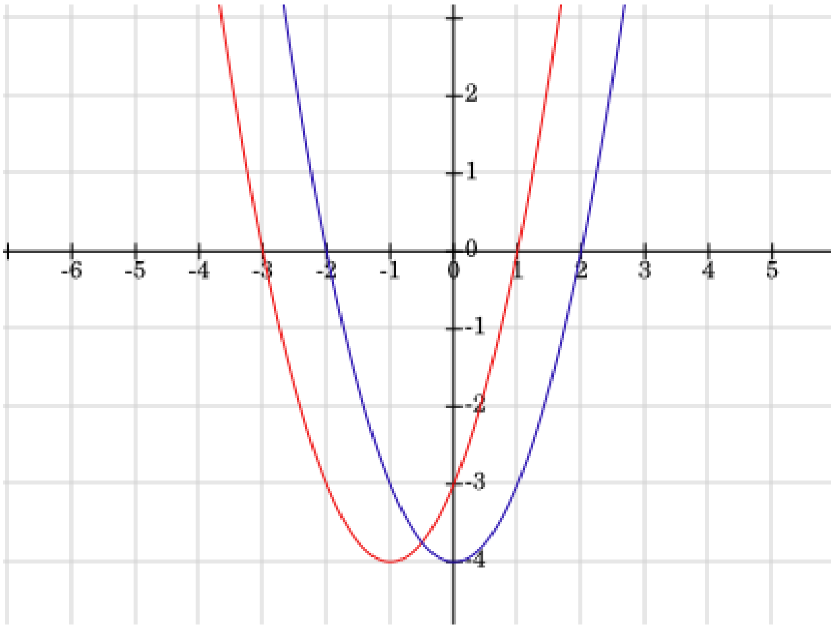
c) No tenga ninguna solución.

5. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ b) $x^4 + 7x^2 - 144 = 0$

6. ¿Cuáles son las soluciones de estas ecuaciones de segundo grado?:

$\mathbf{x^2 + 2x - 3 = 0}$ $\mathbf{x^2 - 4 = 0}$



Soluciones a los practica

Practica 1

a) ***$x^2 - 3x - 4 = 0$***

$$a = 1\,;\, b = -3\,;\, c = -4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \bullet a \bullet c}}{2 \bullet a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \bullet 1 \bullet (-4)}}{2 \bullet 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 5}{2} \qquad x_2 = \frac{3 - 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{8}{2} \qquad x_2 = \frac{-2}{2}$$

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = -1$$

b) ***$x^2 + (x + 2)^2 = 580$*** *PLS sept. 2012*

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 580$$

$$2x^2 + 4x - 576 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \bullet a \bullet c}}{2 \bullet a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \bullet 2 \bullet (-576)}}{2 \bullet 2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4608}}{4}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4624}}{4}$$

$$x = \frac{-4 \pm 68}{4}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 68}{4} \qquad x_2 = \frac{-4 - 68}{4}$$

$$x_1 = \frac{64}{4} \qquad x_2 = \frac{-72}{4}$$

$$x_1 = 16 \qquad x_2 = -18$$

c) ***$3x^2 - 27 = 0$***

$3x^2 = 27$

$$x^2 = \frac{27}{3}$$

) ***$5x^2 - 180 = 0$***

$5x^2 = 180$

$$x^2 = \frac{180}{5}$$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x_1 = \pm 3$

$x_1 = +3$ $x_1 = -3$

$x^2 = 36$

$x = \pm\sqrt{36}$

$x = \pm 6$

$x_1 = +6$ $x_2 = -6$

e) ***$2x^2 + x = 0$***

$x(x+1) = 0$

$x_1 = 0$ $x + 1 = 0$

$x = -1$

$x_1 = 0$ $x_2 = -1$

$5x^2 = 30$

$5x^2 = 30$

$x^2 = \frac{30}{5}$

$x^2 = 6$

$x = \pm\sqrt{6}$

$x = +\sqrt{6}$ $x = -\sqrt{6}$

Practica 2

a) ***$4x^2 - 20x + 25 = 0$***

$a = 4$ $b = -20$ $c = 25$

$b^2 - 4 \bullet a \bullet c$

$(-20)^2 - 4 \bullet 4 \bullet 25$

$400 - 400$

$0 = 0$

1 solución

b) ***$x^2 - 5x + 6 = 0$***

$a = 1$ $b = -5$ $c = 6$

$b^2 - 4 \bullet a \bullet c$

$(-5)^2 - 4 \bullet 1 \bullet 6$

$25 - 24$

$1 > 0$

2 soluciones

c) ***$-2x^2 + 3x + 2 = 0$***

$a = -2$ $b = 3$ $c = 2$

$b^2 - 4 \bullet a \bullet c$

$(3)^2 - 4 \bullet (-2) \bullet 2$

$9 + 16$

$25 > 0$

2 soluciones

d) ***$9x^2 + 6x + 1 = 0$***

$a = 9$ $b = 6$ $c = 1$

$b^2 - 4 \bullet a \bullet c$

$(6)^2 - 4 \bullet 9 \bullet 1$

$36 - 36$

$0 = 0$

1 solución

e) ***$x^2 + x + 2 = 0$***

$a = 1$ $b = 1$ $c = 2$

$b^2 - 4 \bullet a \bullet c$

f) ***$x^2 - 3x + 10 = 0$***

$a = 1$ $b = -3$ $c = 10$

$b^2 - 4 \bullet a \bullet c$

$(1)^2 - 4 \bullet 1 \bullet 2$	$(-3)^2 - 4 \bullet 1 \bullet 10$
$1 - 8$	$9 - 40$
$-7 < 0$	$-36 < 0$
No tiene solución	*No tiene solución*

Practica 3

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$z = x^2$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \bullet a \bullet c}}{2 \bullet a}$$

$$z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \bullet 1 \bullet 4)}}{2 \bullet 1}$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$z = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$z_1 = \frac{5+3}{2} \qquad z_2 = \frac{5-3}{2}$$

$$z_1 = 4 \qquad z_2 = 1$$

Como $x^2 = z$

$x^2 = 4$ $\qquad$ $x^2 = 1$

$$x = \pm\sqrt{4} \qquad x = \pm\sqrt{1}$$

b) $-x^4 + 6x^2 - 5 = 0$

$z = x^2$

$-z^2 + 6z - 5 = 0$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \bullet a \bullet c}}{2 \bullet a}$$

$$z = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \bullet (-1) \bullet (-5)}}{2 \bullet (-1)}$$

$$z = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{-2}$$

$$z = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{-2}$$

$$z = \frac{-6 \pm 4}{-2}$$

$$z_1 = \frac{-6+4}{-2} \qquad z_2 = \frac{-6-4}{-2}$$

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = 5$$

Como $x^2 = z$

$x^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 = 5$

$$x = \pm\sqrt{1} \qquad x = \pm\sqrt{5}$$

$x_1 = 2$	$x_2 = -2$	$x_3 = 1$	$x_4 = -1$	$x_1 = 1$	$x_2 = -1$	$x_3 = -\sqrt{5}$	$x_4 = -\sqrt{5}$

Practica 4

$2x^2 + 2x - 4 = 0$	$x^2 - x - 2 = 0$
Busco los puntos donde la y = 0	*Busco los puntos donde la y = 0*
P(-2,0) P'(1,0)	*P(-1,0) P'(2,0)*
$x_1 = -2$ $\qquad$ $x_2 = 1$	$x_1 = -1$ $\qquad$ $x_2 = 2$

Bibliografía recomendada.

- Gobierno de Aragón. *Matemáticas y Tecnología, módulo 4. Educación Secundaria para Personas Adultas*. España. Gobierno de Aragón. 2011. 126 p.
- INTEF (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado) Web: http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/.
- Web: http://fooplot.com/