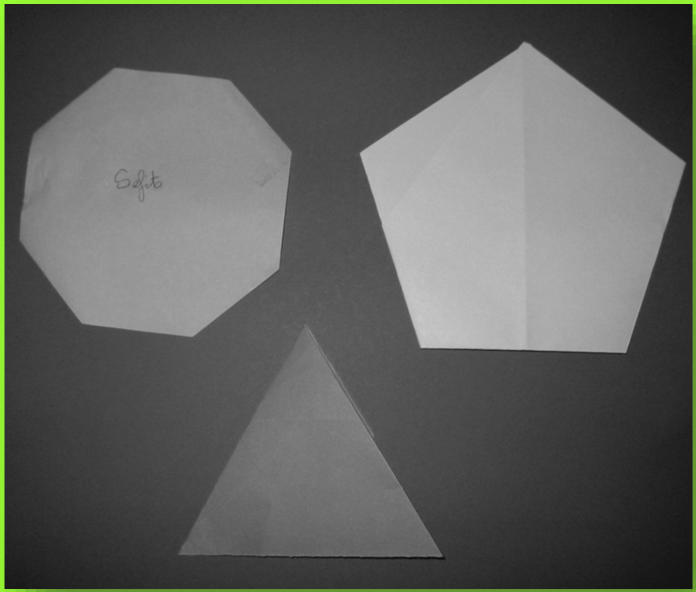
GEOMETRÍA PLANA

PAPIROFLEXIA Y DISECCIONES



Mª Encarnación Reyes Iglesias

E.T.S. Arquitectura

Universidad de Valladolid

17 DE SEPTIEMBRE DE 2018

PAPIROFLEXIA

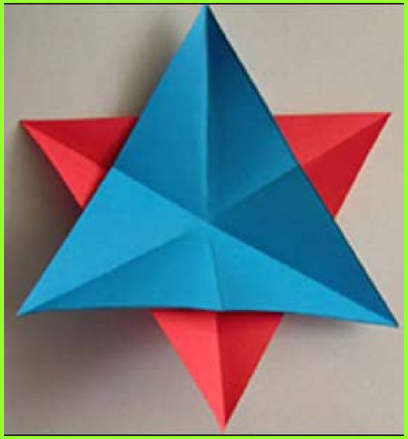
Arte y técnica de obtener diversas figuras mediante dobleces de hojas de papel. (Diccionario de la Real Academia)

Internacionalmente se conoce como ORIGAMI palabra japonesa compuesta por ORU (doblar) y KAMI (papel).

PAPIROFLEXIA GEOMÉTRICA:

Arte de obtener figuras geométricas mediante plegado de papel.

Recurso didáctico para la enseñanza y comprensión de la geometría de forma dinámica, manipulativa y visual.



PROPORCIÓN $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \in \mathbb{R},\ b,d \neq 0$

Proporción racional, conmensurable o estática si: $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Proporción irracional, inconmensurable o dinámica si: $\frac{a}{b} \in I$

ESTÁTICAS		DINÁMICAS	
Cuadrada	$\frac{a}{b} = 1$	Raíz de dos	$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$
Dupla	$\frac{a}{b} = 2$	Raíz de tres	$\frac{a}{b} = \sqrt{3}$
Sesquiáltera	$\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$	Áurea	$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Sesquitercia	$\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$	Plata	$\frac{a}{b} = 1+\sqrt{2}$
Pentatercia	$\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$	Bronce	$\frac{a}{b} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$
Etc.		Etc.	

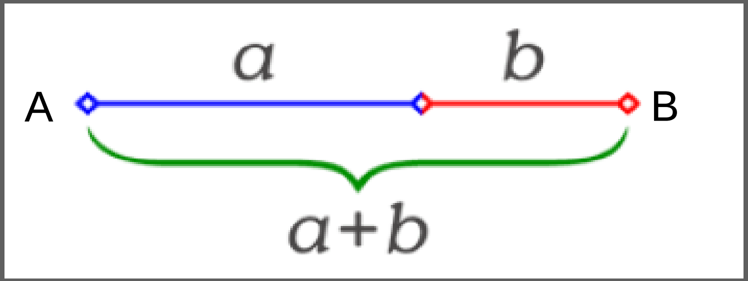
Otras: Cordobesa, Plástica, Platino...

En Geometría, el elemento más sencillo al que se puede aplicar el concepto de proporción es el segmento, dividiéndolo en dos partes. La proporción de éste es el resultado de comparar las longitudes de ambas.

Continua el rectángulo, y por último los polígonos.

En el caso de polígonos convexos o estrellados, se suelen asignar relaciones de proporción entre sus elementos notables; es decir, razones entre: las diferentes diagonales y lados, el radio y el lado, la apotema y el lado, etc.

Definición: Se dice que un segmento AB está dividido según la proporción áurea si la razón entre la parte mayor y la parte menor es igual a la razón entre el todo y la parte mayor.



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Leftrightarrow a^2 = ab + b^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \quad \text{con} \quad b \neq 0$$

Llamando $x = \frac{a}{b}$, tenemos $x^2 - x - 1 = 0$ y $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Denotamos por $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

PROPORCIÓN EN UN RECTÁNGULO

Definición: Dado un rectángulo de lados a y b, se define la proporción del rectángulo como

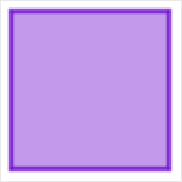
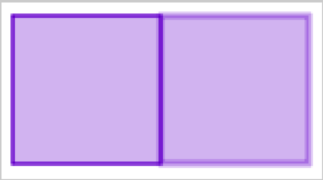
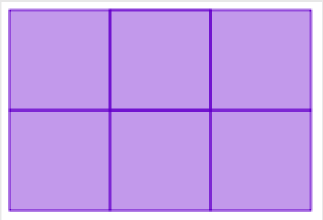
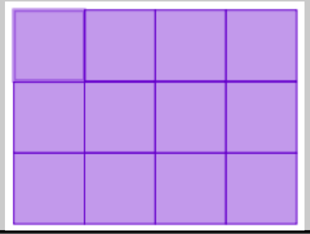
$$p(a,b) = \frac{max(a,b)}{min(a,b)}$$

Propiedades de la proporción de un rectángulo

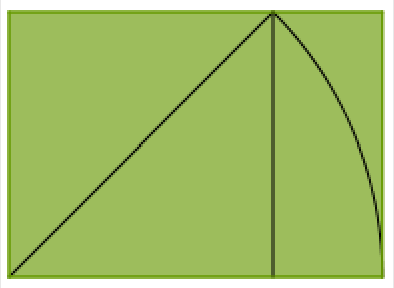
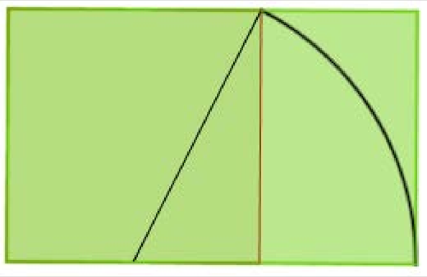
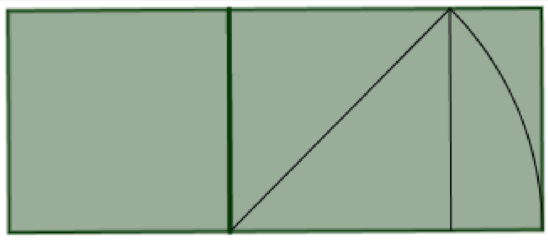
(1) $p(a,b) \geq 1$ y $p(a,b) = 1$ corresponde al cuadrado.

(2) $p(\lambda a, \lambda b) = p(a,b),$ λ > 0, es decir, la proporción en un rectángulo es invariante por homotecias y semejanzas.

RECTÁNGULOS ESTÁTICOS $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

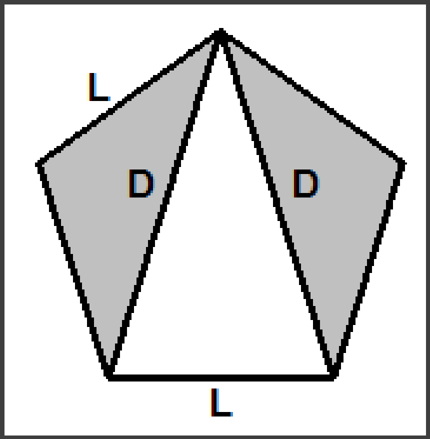
CUADRADO	$\frac{a}{b} = 1$	
DUPLO	$\frac{a}{b} = 2$	
SESQUIÁLTERO	$\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$	
SESQUITERCIO	$\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$	

RECTÁNGULOS DINÁMICOS $\frac{a}{b} \in I$

RAÍZ DE DOS	$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$	
ÁUREO	$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
PLATA	$\frac{a}{b} = 1+\sqrt{2}$	

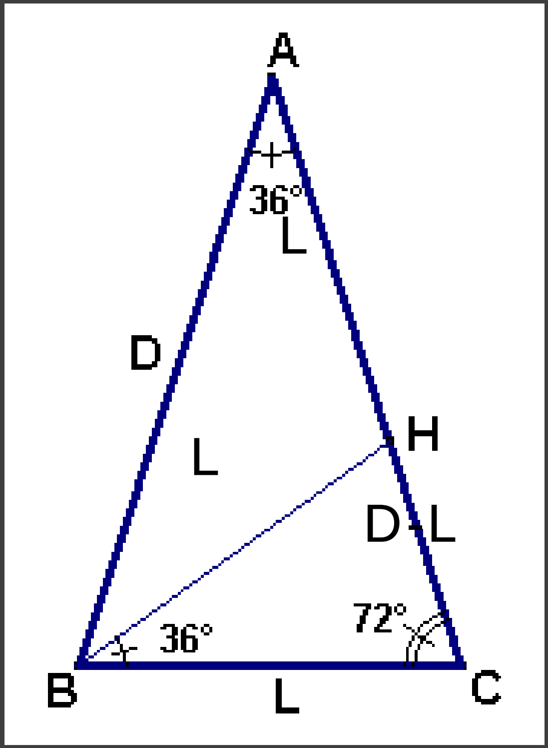
Razón entre la diagonal y el lado de un pentágono regular

TRIÁNGULO SUBLIME: isósceles de ángulo desigual 36º



Sea ABC un triángulo sublime, la bisectriz del ángulo en el vértice B corta al lado AC en un punto H.

El triángulo HBC semejante al inicial, ya que sus ángulos miden 36º, 72º y 72º.

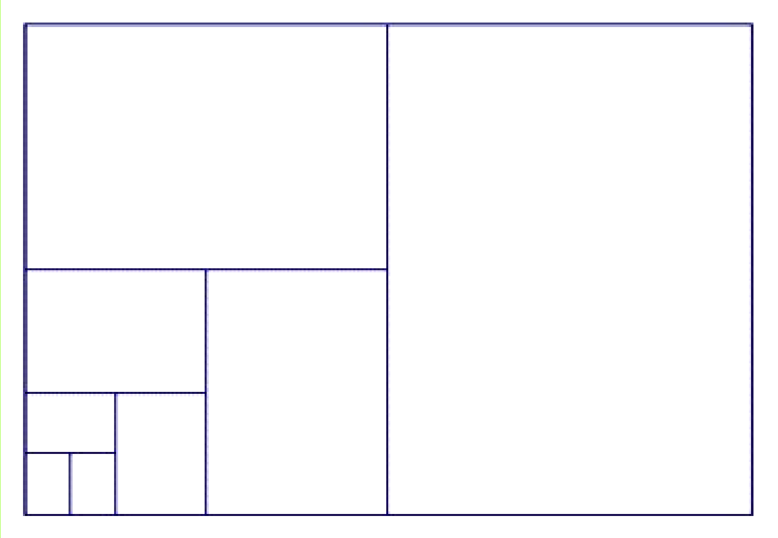


El triángulo BHA es isósceles por tener dos ángulos iguales de 36 grados. Por tanto, se verifica:

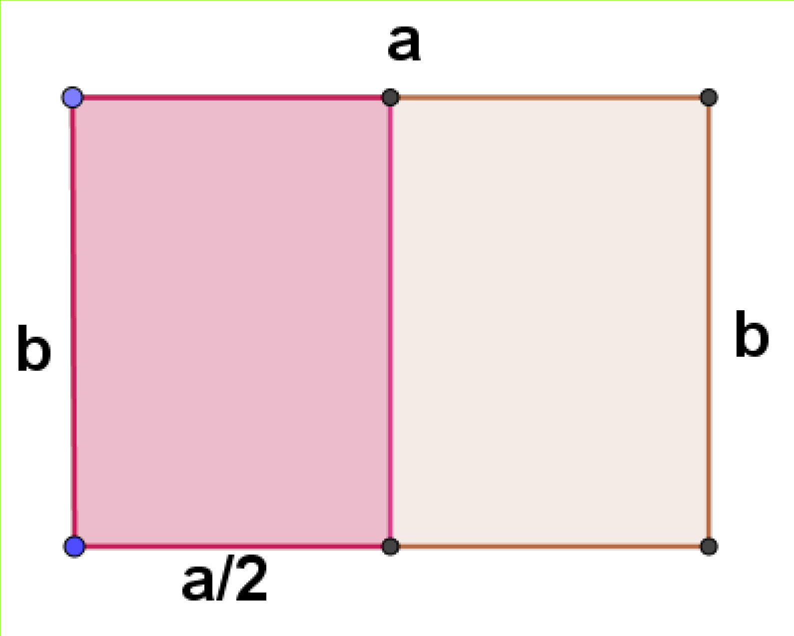
$$AB = D \quad y \quad BC = L \qquad HC = D - L$$

$$\frac{D}{L} = \frac{L}{D-L} \Rightarrow D^2 - DL - L^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{D}{L}\right)^2 - \frac{D}{L} - 1 = 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{D}{L} = \Phi$$

FORMATOS DIN: PROPIEDADES



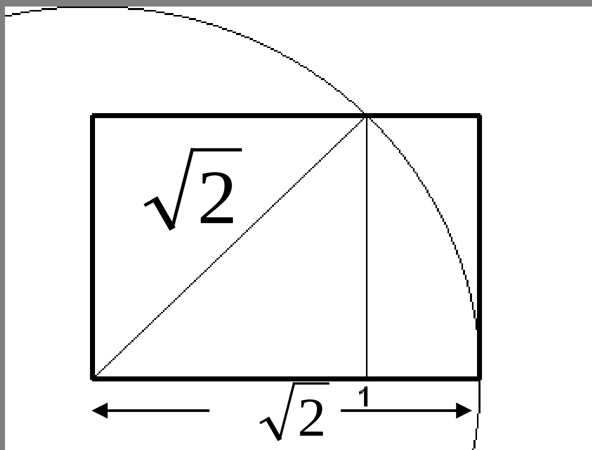
La razón entre las longitudes de los lados mayor y menor de una hoja DIN A-4 es el número irracional $\sqrt{2}$

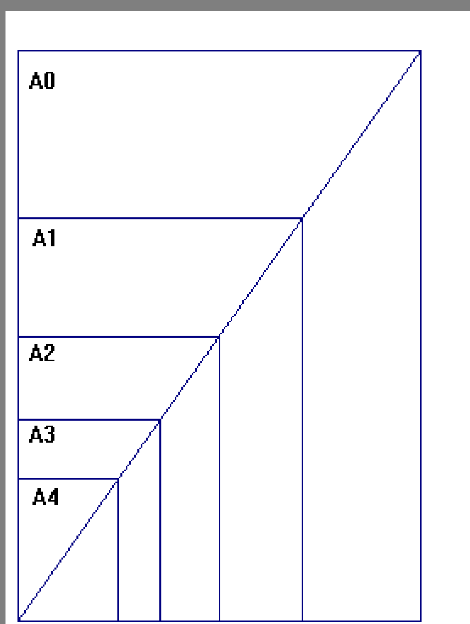


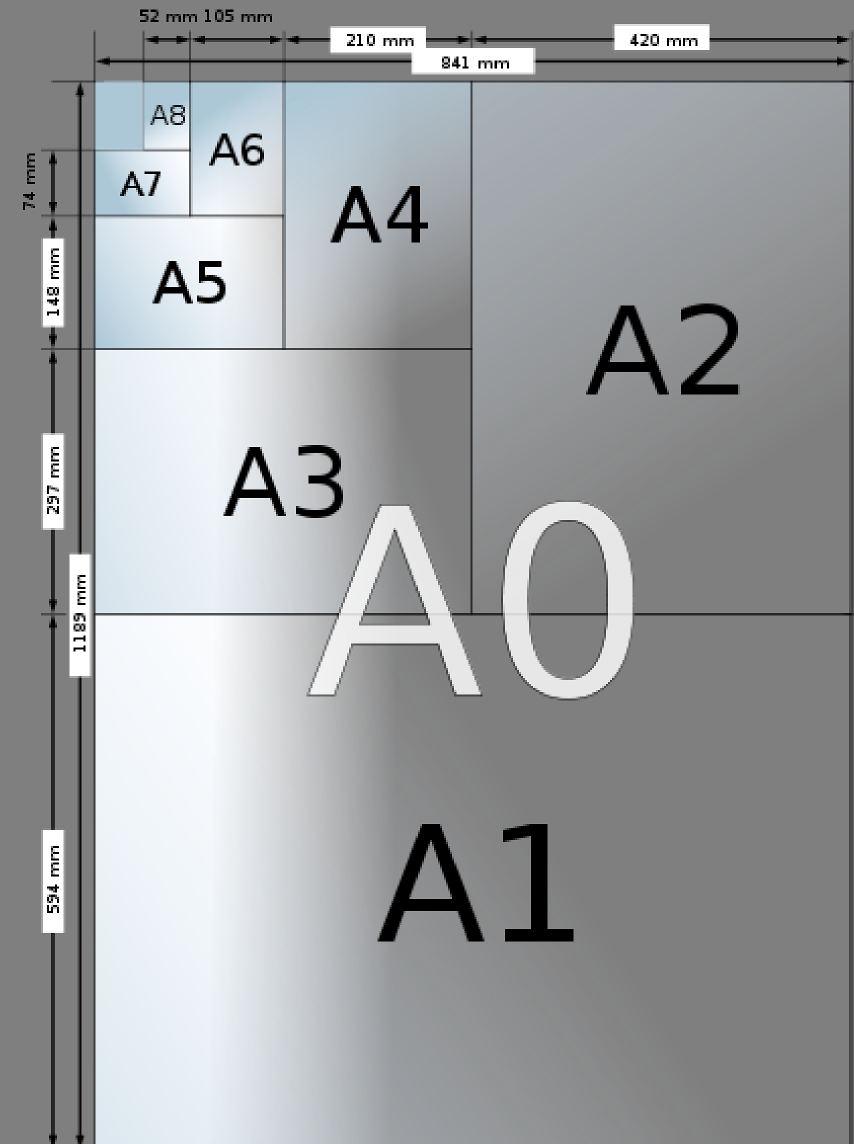
Al dividir una hoja DIN A4 por la mitad de su lado mayor se obtienen dos rectángulos que tienen la misma proporción que el rectángulo inicial.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2} \iff \frac{a^2}{2} = b^2 \iff \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

PROPORCIÓN √2 Y FORMATOS DIN





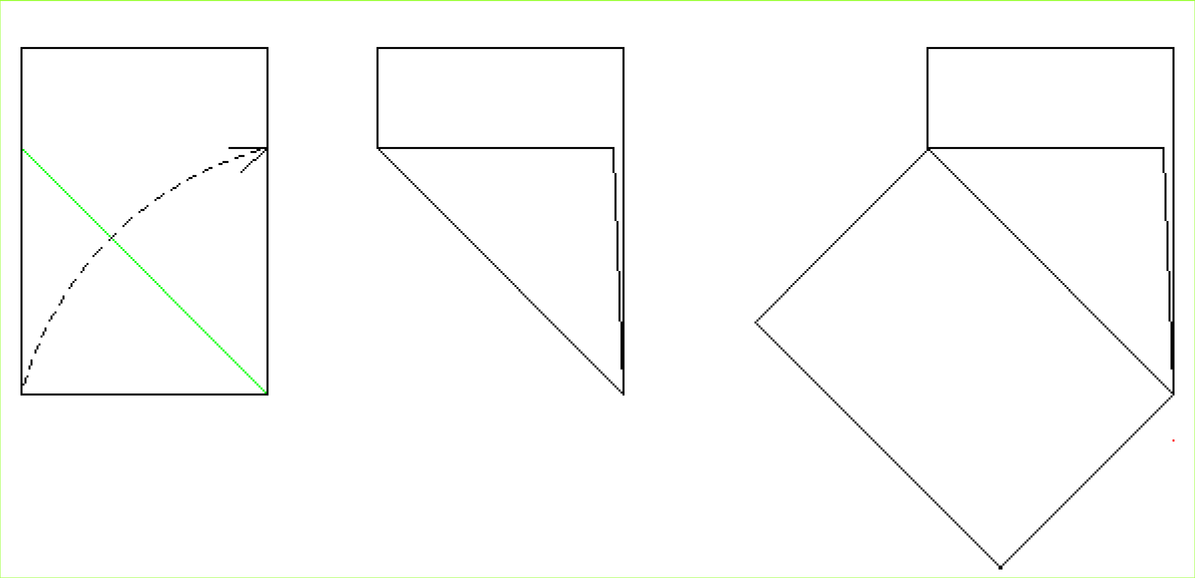


PROPORCIÓN √2 Y FORMATOS DIN

FORMATO	DIMENSIONES APROX. (mm)	PROPORCIÓN
A0	1189×841	$\sqrt{2}:1 = \sqrt{2}$
A1	841×594	$1:\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
A2	594×420	$\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{1}{2} = \sqrt{2}$
A3	420×297	$\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$
A4	**297×210**	$\frac{\sqrt{2}}{4}:\frac{1}{4} = \sqrt{2}$
A5	210×148	$\frac{1}{4}:\frac{\sqrt{2}}{8} = \sqrt{2}$

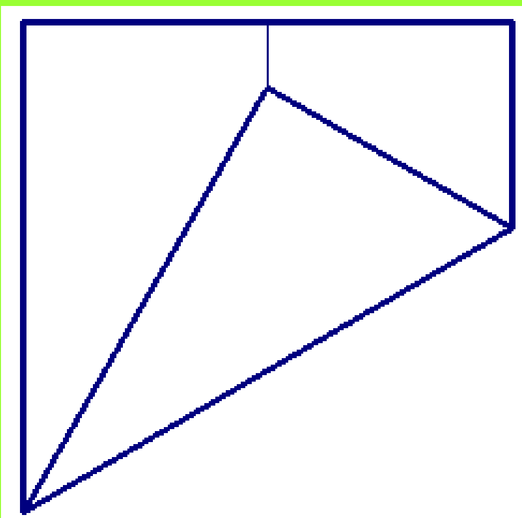
DIN A

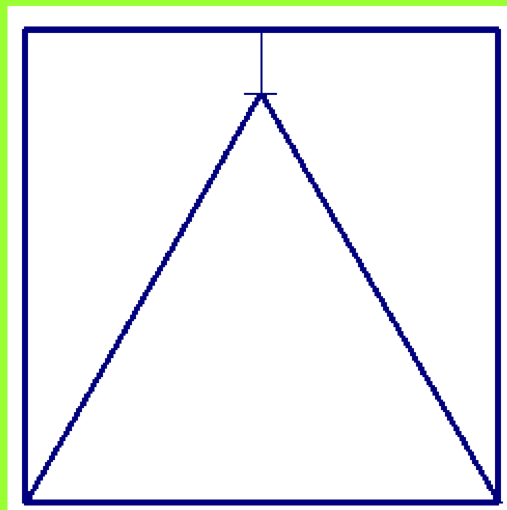
Una hoja de formato DIN es un rectángulo que tiene por dimensiones el lado de un cuadrado y su diagonal.

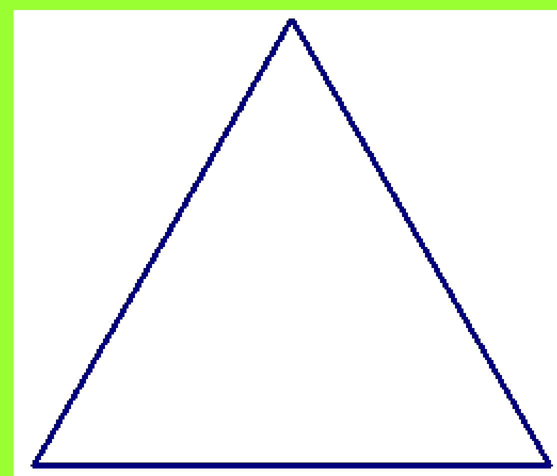


TRIÁNGULO EQUILÁTERO

Construcción de un triángulo equilátero a partir de un cuadrado



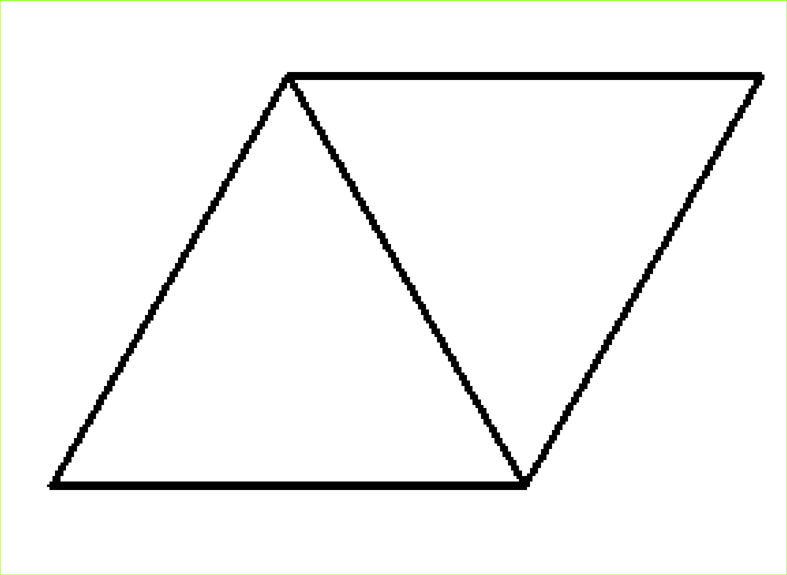




Trazar las medianas del triángulo. Marcar el baricentro y comprobar que es el centro de gravedad del triángulo.

ROMBO DIAMANTE

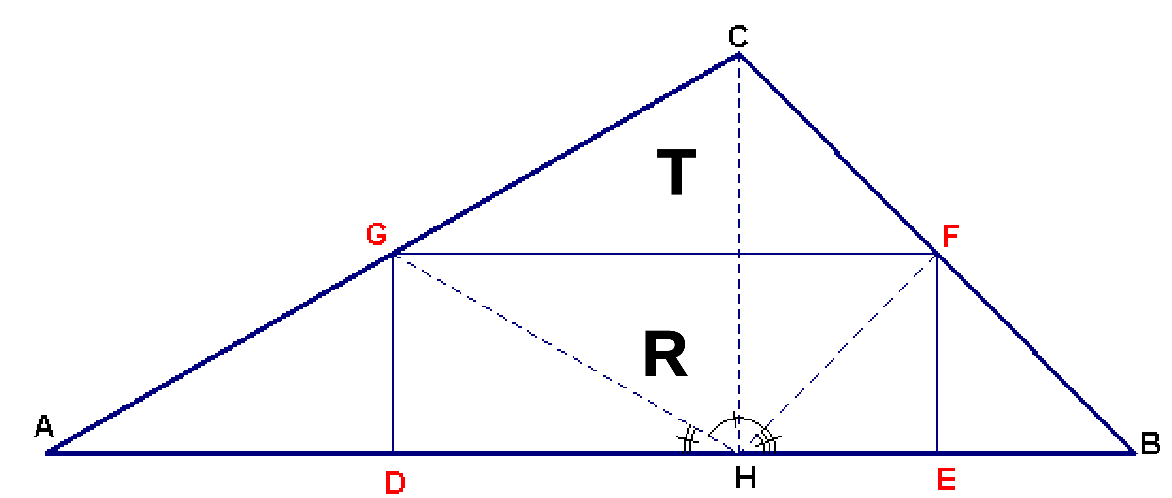
Desplegando la construcción anterior se obtiene un DIAMANTE (rombo formado por dos triángulos equiláteros unidos por un lado).



SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO Y SU ÁREA

-Se toma un triángulo cualquiera ABC.
-Se dobla para obtener la altura correspondiente a C, CH.
- Se llevan doblando los vértices A, B y C para reunirse en H.

-Evidentemente la suma de los tres ángulos mide 180º.



El área del triángulo es el doble del área del rectángulo DEFG.

$A(T) = 2 \cdot A(R) = 2 \cdot DE \cdot EF = 2 \cdot (\frac{1}{2}AB \ . \ \frac{1}{2}HC) = \frac{1}{2}AB \cdot HC$

Área del triángulo = ½ base · altura

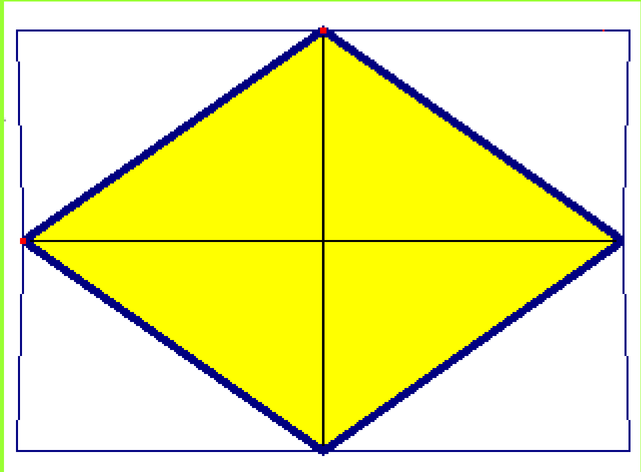
ROMBO A PARTIR DE UN RECTÁNGULO

1.-Se toma una rectángulo cualquiera

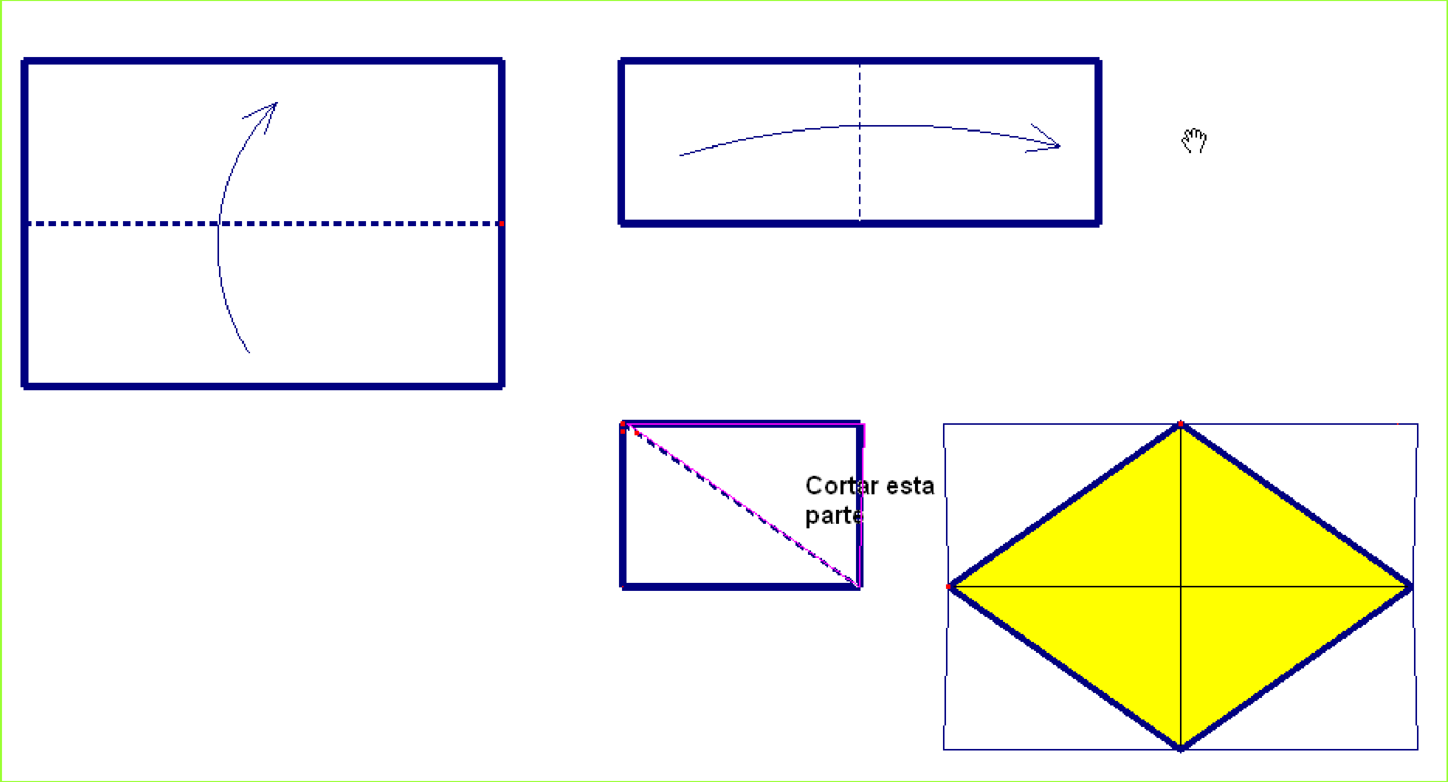
2.- Se dobla en valle por los puntos medios del lado menor

3.- Se dobla por el punto medio del lado mayor

4.- Se marca la diagonal del rectángulo obtenido



ROMBO A PARTIR DE UN RECTÁNGULO



Las diagonales del rombo miden las longitudes de los lados del rectángulo inicial y su área es la mitad del área del mismo.
Se deduce la fórmula del área del rombo

$$A(\text{rombo}) = \frac{D \cdot d}{2}$$

¿Cuánto mide el lado del rombo a partir de los lados **a** y **b** del rectángulo?

PENTÁGONO REGULAR

Construcción de un pentágono a partir de una tira de papel

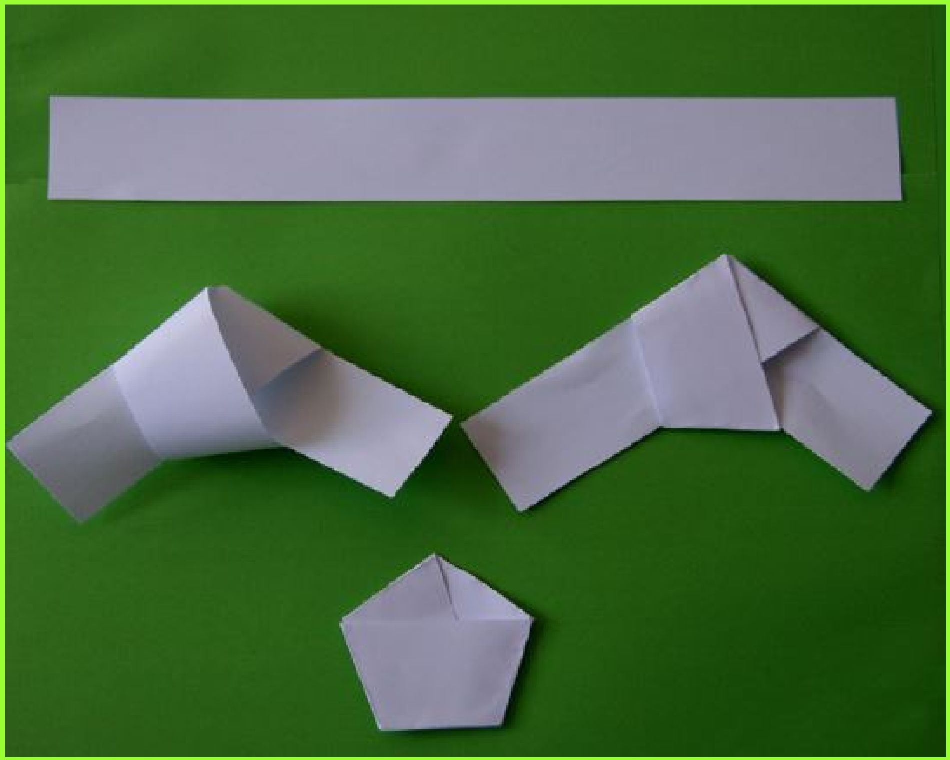
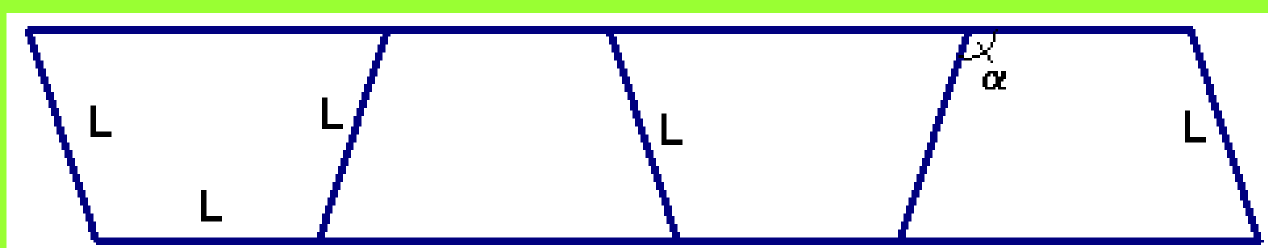


Imagen del libro de Pentágonos (Ver Bibliografía)

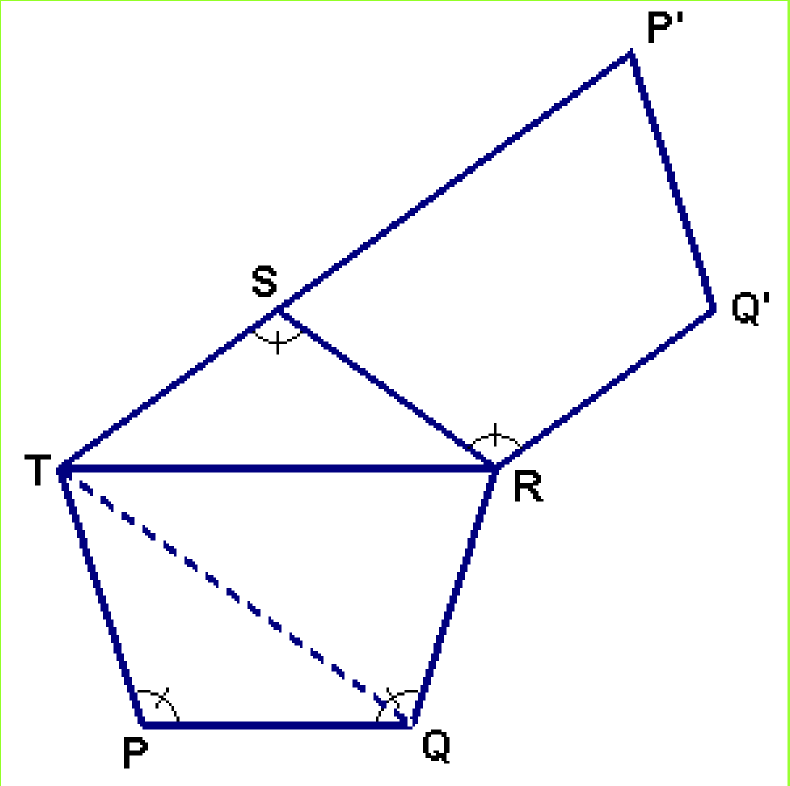
- Al desdoblar se obtiene un paralelogramo dividido en cuatro trapecios isósceles



EL PENTÁGONO ES REGULAR

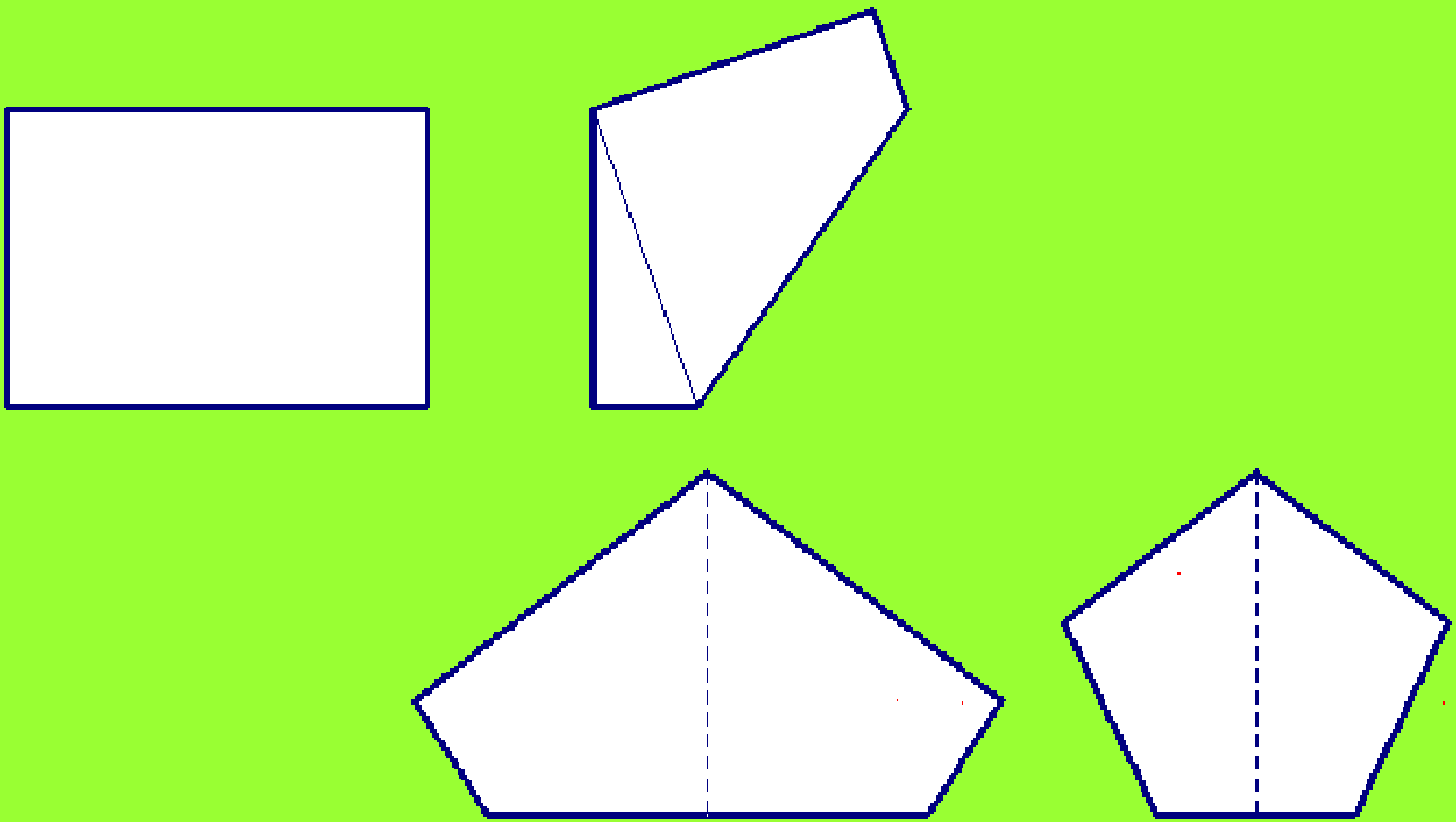
- El pentágono es equilátero porque sus lados coinciden con lados iguales de los trapecios.

- El pentágono es equiángulo porque ángulos del pentágono obtenido son iguales ya que coinciden con los ángulos de los trapecios isósceles PQRT, QRST y RQ'P'S, como se comprueba desplegando parte del nudo.



UN PENTÁGONO NO REGULAR

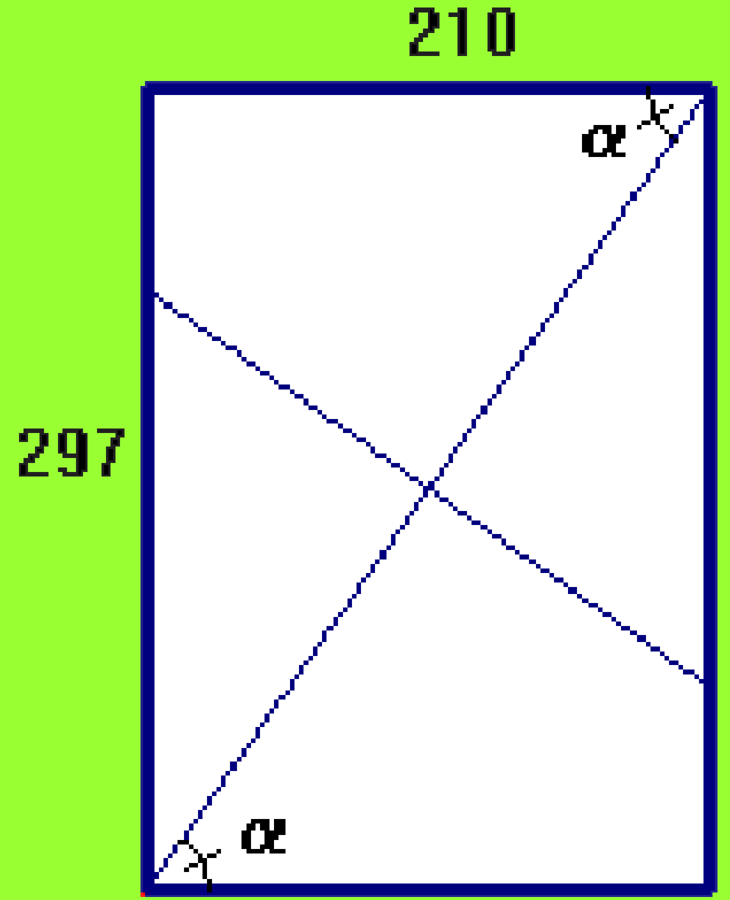
Construcción de un pentágono a partir de un DIN A4



JUSTIFICACIÓN

En un formato DIN A4 $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{297}{210}$ de donde $\alpha = 54{,}74^{o}$

Por tanto, el pentágono construido con este formato de papel tiene por ángulo interior $2\alpha = 109{,}47^{o}$



No es un pentágono regular

¿CÓMO OBTENER UN PENTÁGONO REGULAR?

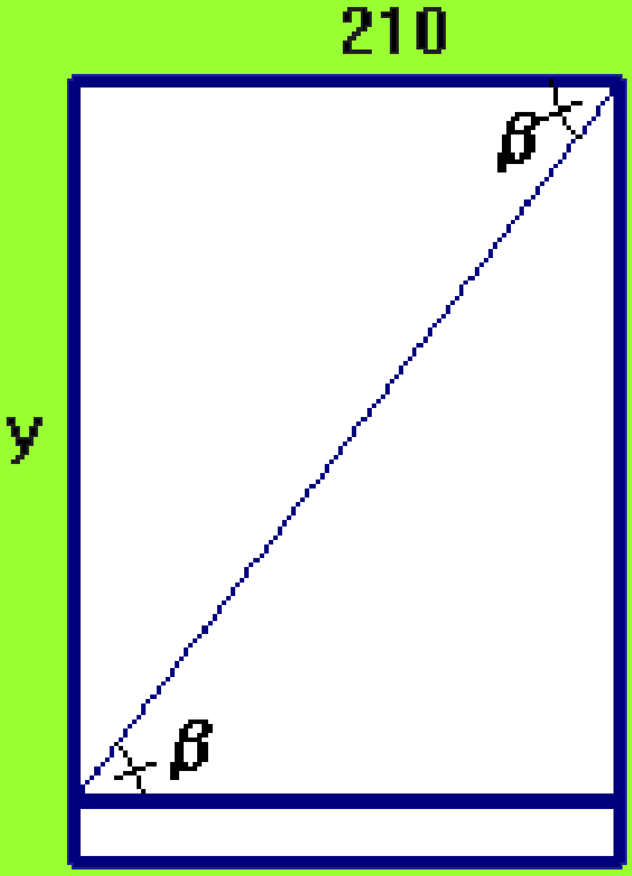
El ángulo interior del pentágono regular es 108º.

¿Cuál es el tamaño de papel adecuado para construir este pentágono regular?

¿Cuánto debe medir **y** para que

$\beta = 54^{o}$?

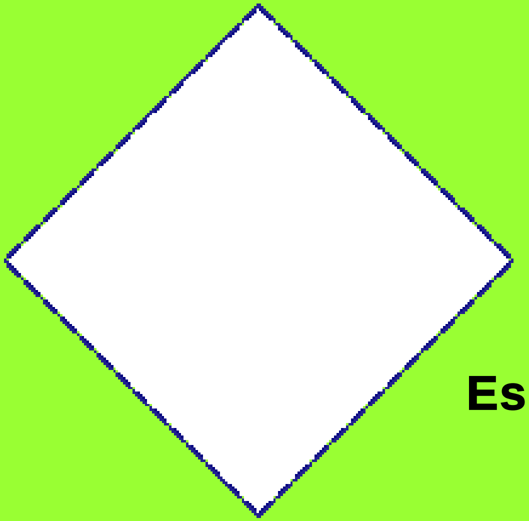
$$\mathbf{tg\beta = \frac{y}{210} \Rightarrow y = 210 \cdot tg\,54 = 289{,}04\ mm}$$

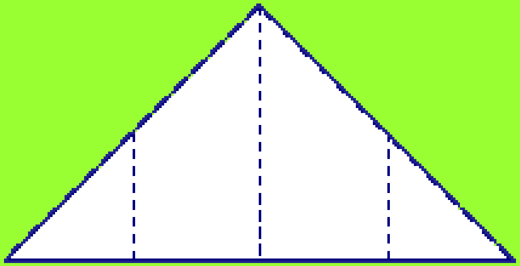


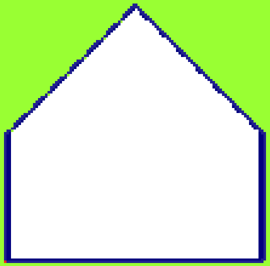
Se debe recortar $297 - 289{,}04 = 7{,}96\,\text{mm} \approx 8\,\text{mm}$

PENTÁGONO "CASITA"

Construcción de un pentágono "casita" a partir de un cuadrado

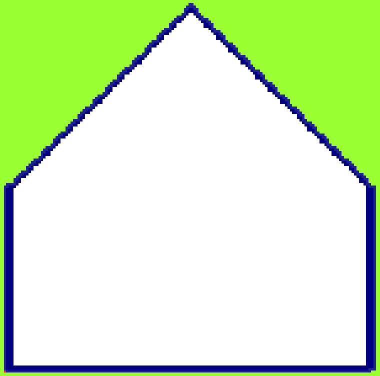


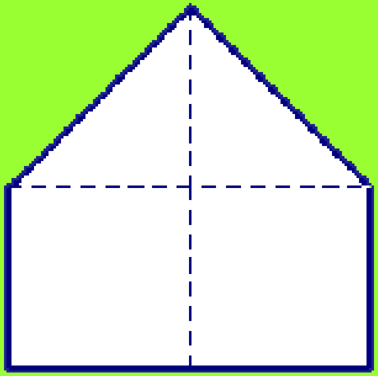




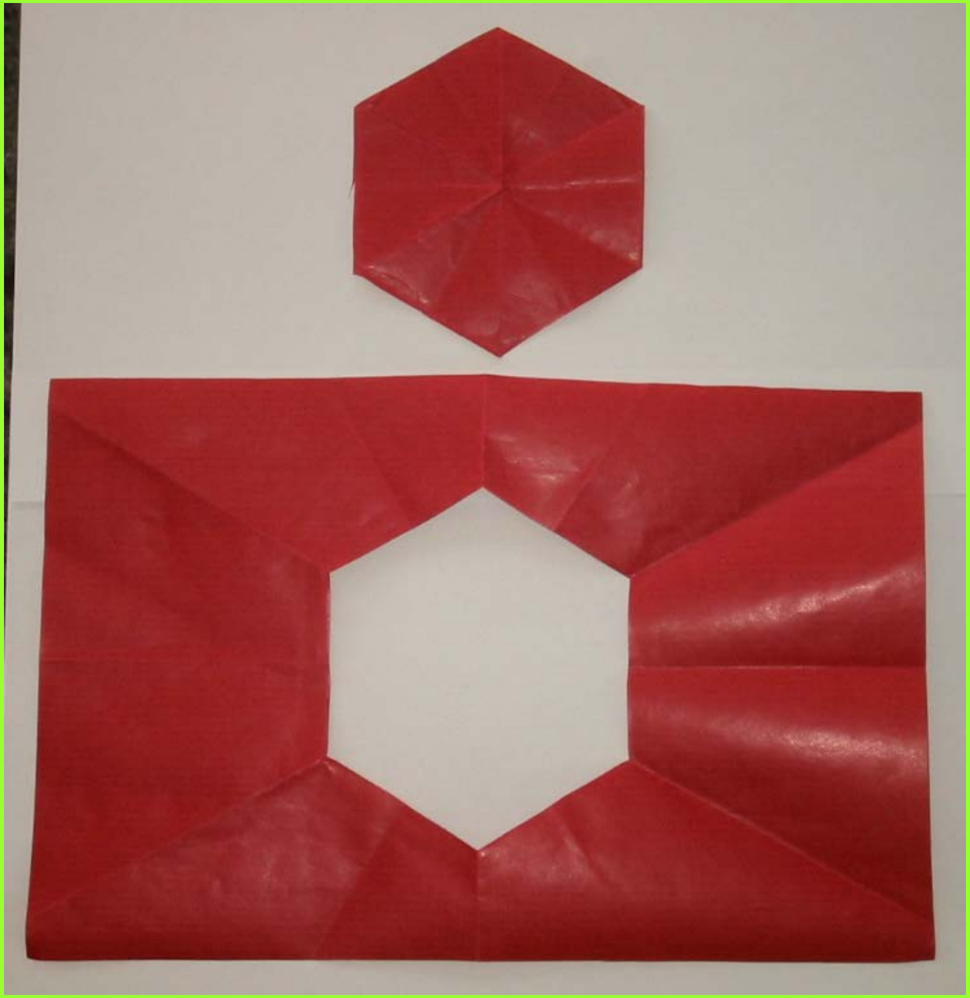
Este pentágono tiene tres ángulos rectos.

Su área es igual al área de tres cuadrados de lado ¼ de la diagonal del cuadrado inicial.



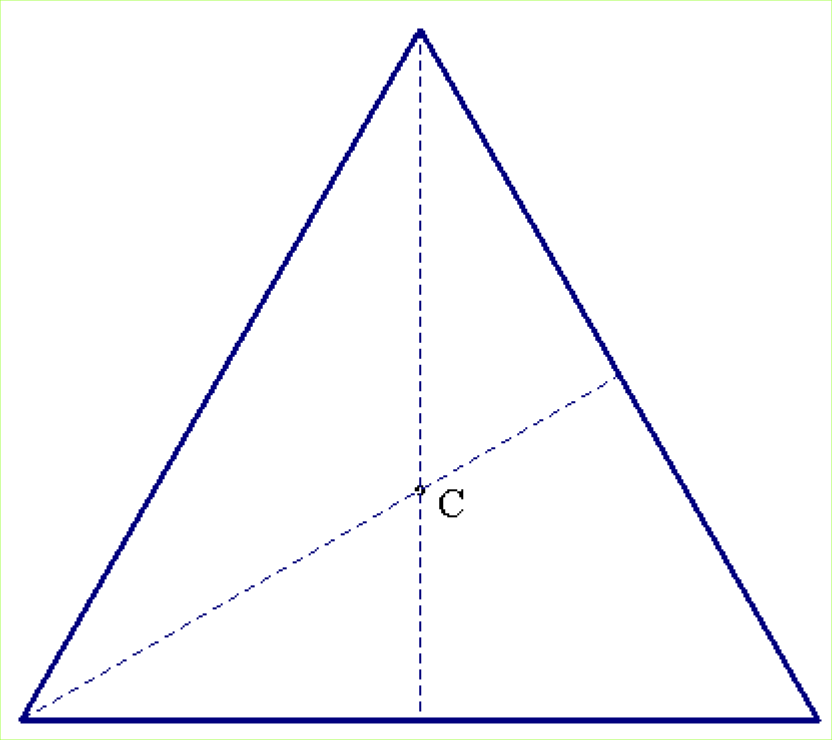


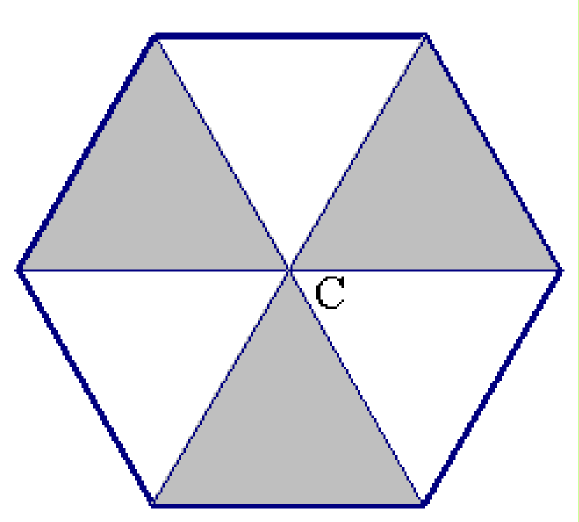
HEXÁGONO REGULAR



HEXÁGONO REGULAR

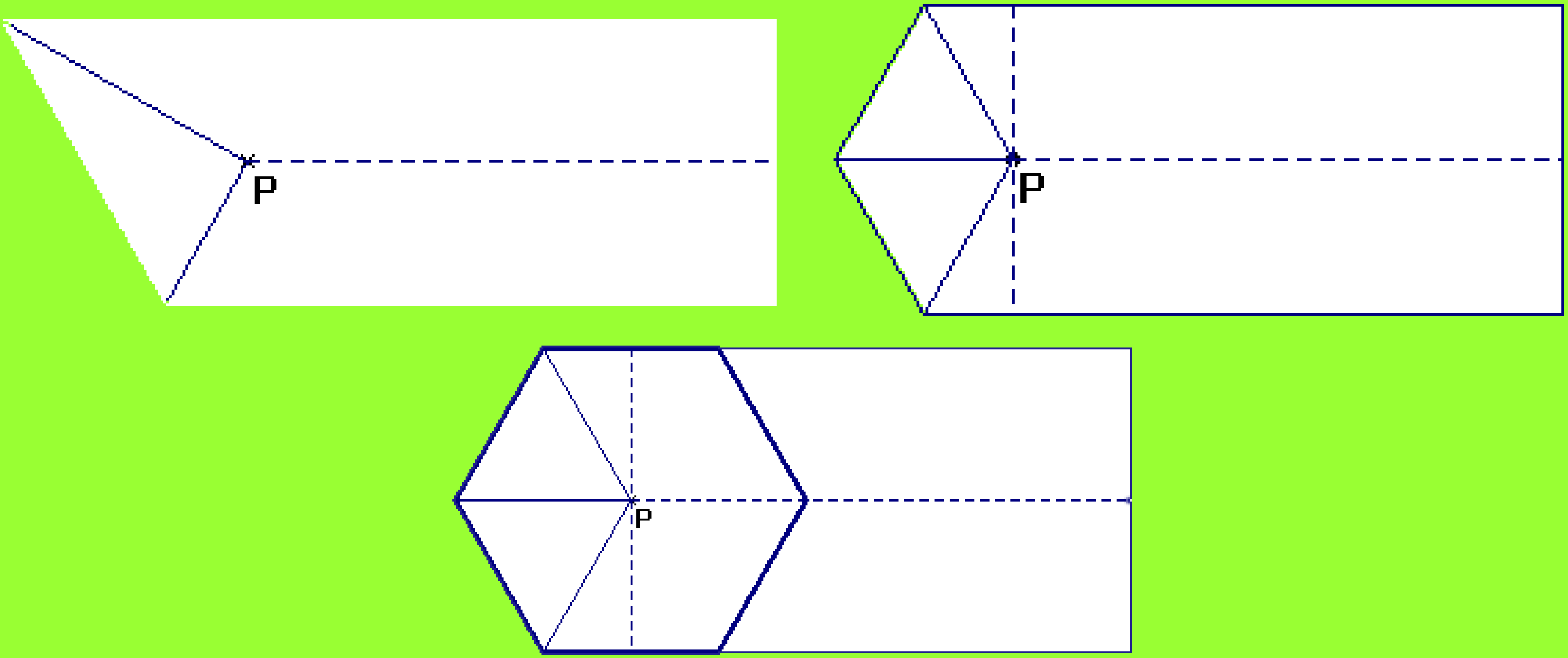
Construcción de un hexágono a partir de un triángulo equilátero





HEXÁGONO REGULAR

Construcción de un hexágono a partir de un rectángulo (tira de papel)



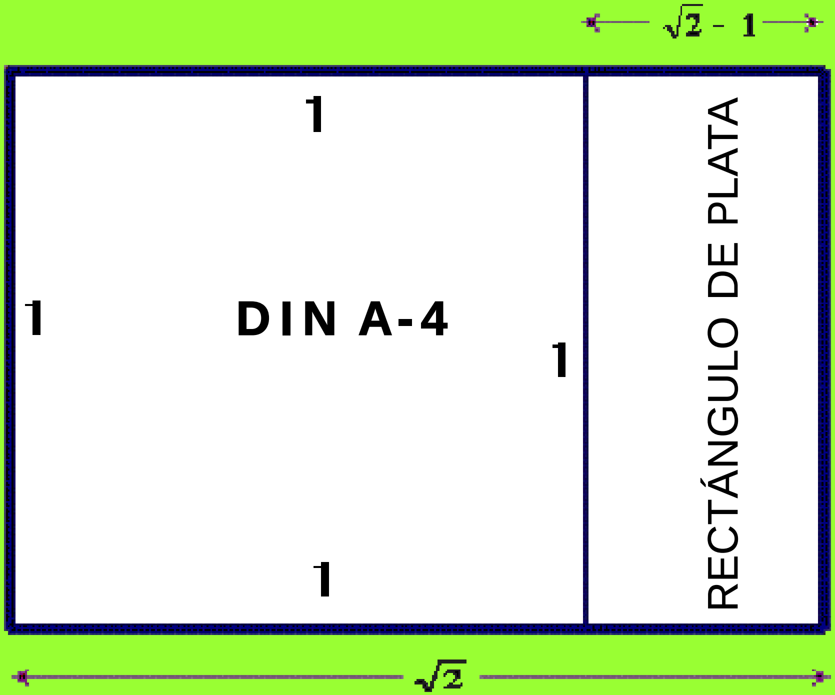
Doblar por el punto medio el lado menor del rectángulo paralelamente al lado mayor. (Mediana mayor del rectángulo).

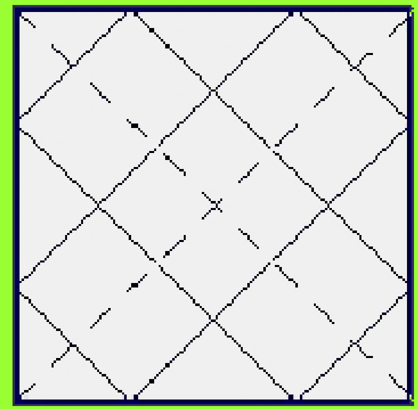
Llevar el vértice superior del rectángulo hasta el punto P.

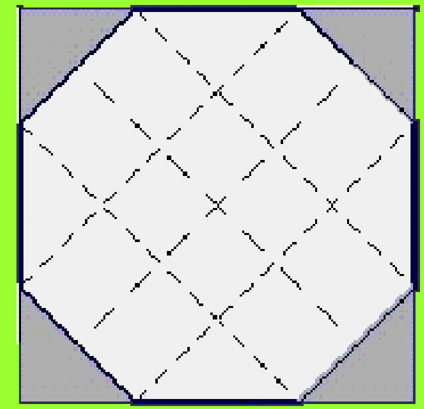
Por reflexión se obtiene el resto del hexágono.

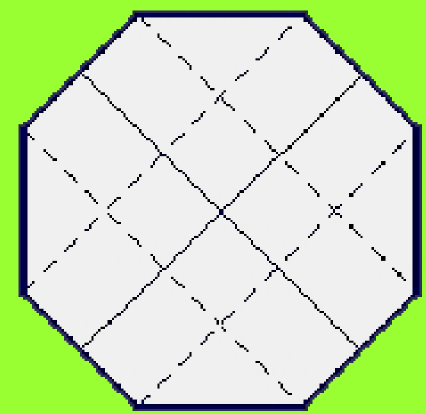
OCTÓGONO REGULAR

Construcción de un octógono a partir de un DIN A-4







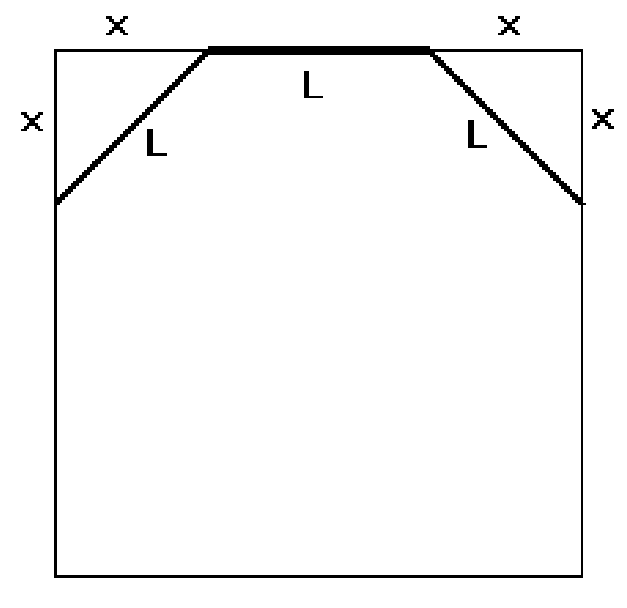


JUSTIFICACIÓN REGULARIDAD

Comprobación de que el polígono construido es un octógono regular.

Considerdamos un cuadrado de lado uno, tenemos:

$L = \sqrt{2} - 1$ es la medida del lado del octógono regular inscrito en un cuadrado de lado una unidad.



$$\left.\begin{array}{l} 2x + L = 1 \\ \\ L^2 = 2x^2 \end{array}\right\} \qquad x = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

$$(\sqrt{2} + 1)L = 1$$

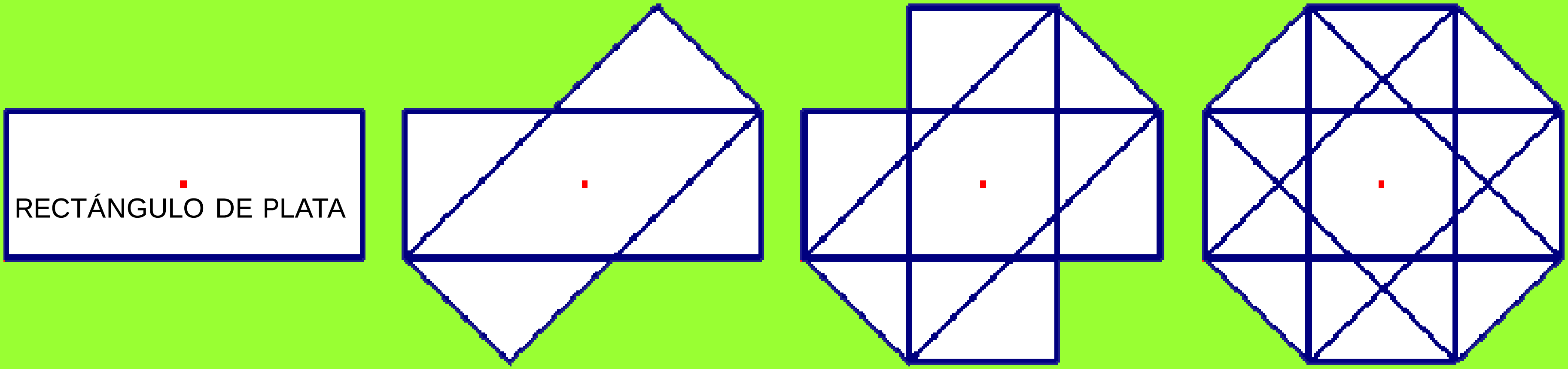
$$L = \sqrt{2} - 1$$

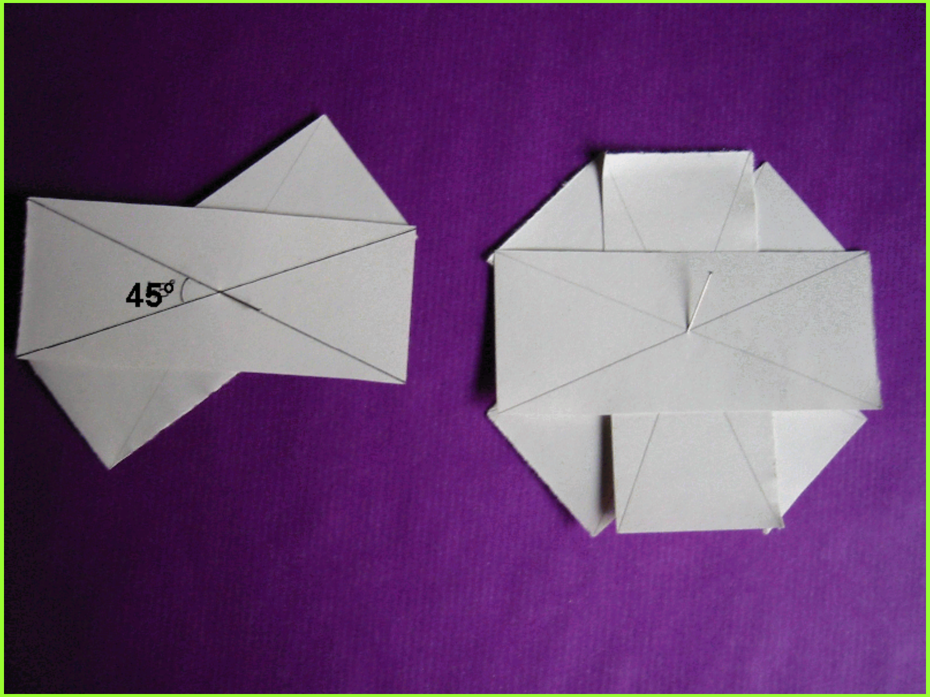
El octógono es regular por ser equilátero y equiángulo (medida del ángulo interior del octógono 135º).

EJEMPLO DE OCTÓGONO

Achaflanando un cuadrado para obtener un octógono (Burdeos)

OCTÓGONO REGULAR

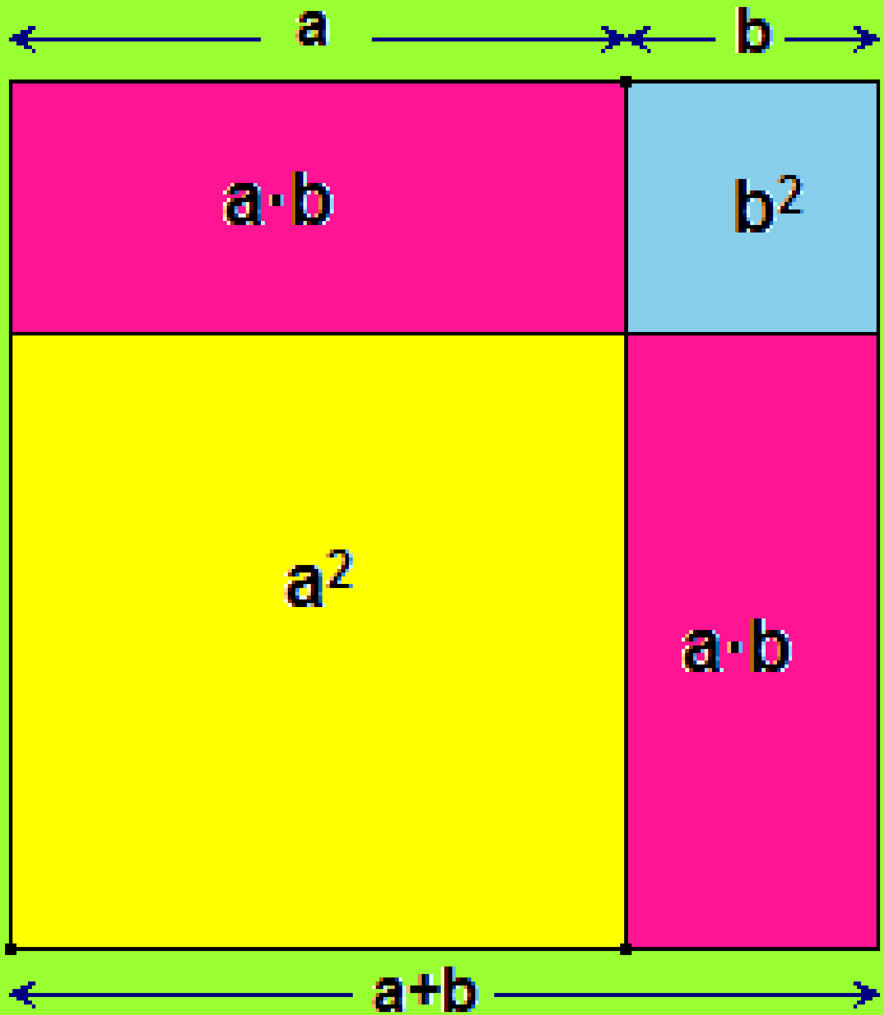




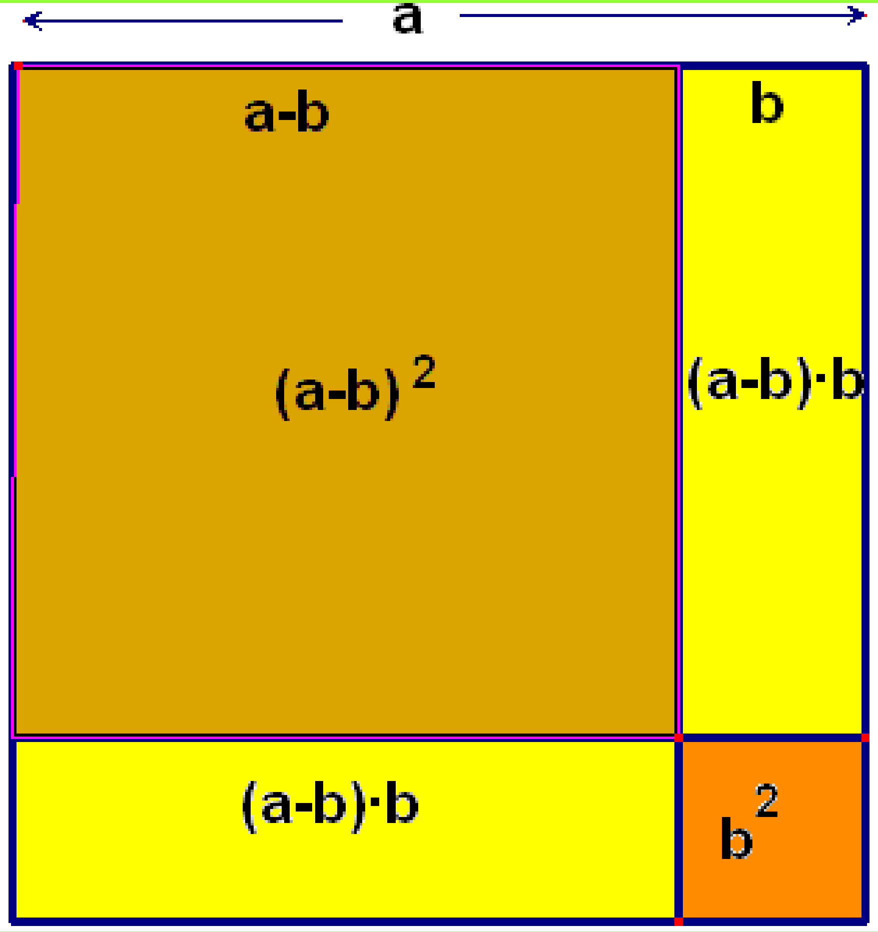
Con cuatro rectángulos de plata se genera un octógono regular y sus octógonos estrellados 8/2 y 8/3

IGUALDADES NOTABLES CON PAPEL

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



$$a^2 = (a-b)^2 + b^2 + 2b(a-b)$$

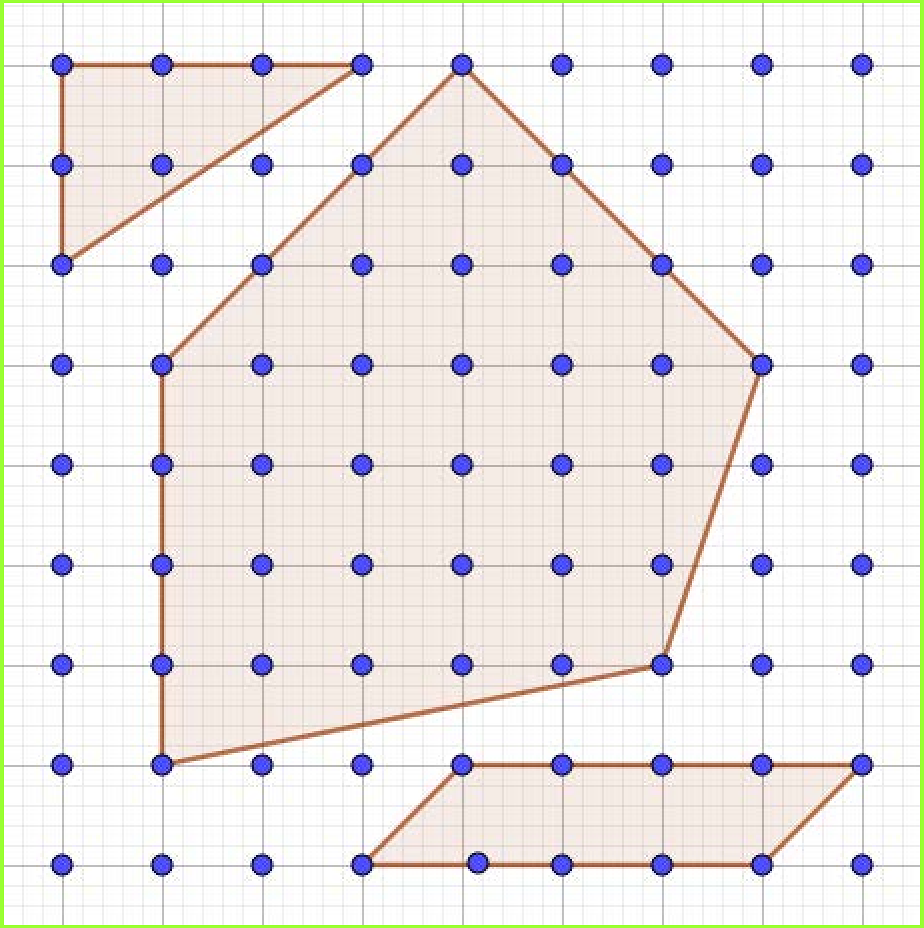
Un polígono es simple si dos lados no consecutivos no se cortan.

Teorema de Pick (1899)
Dada una cuadrícula de puntos del plano con coordenadas enteras y dado un polígono P simple cuyos vértices están en puntos de la cuadrícula, se cumple la siguiente fórmula para el área del polígono.

$$A(P) = I + \frac{F}{2} - 1$$

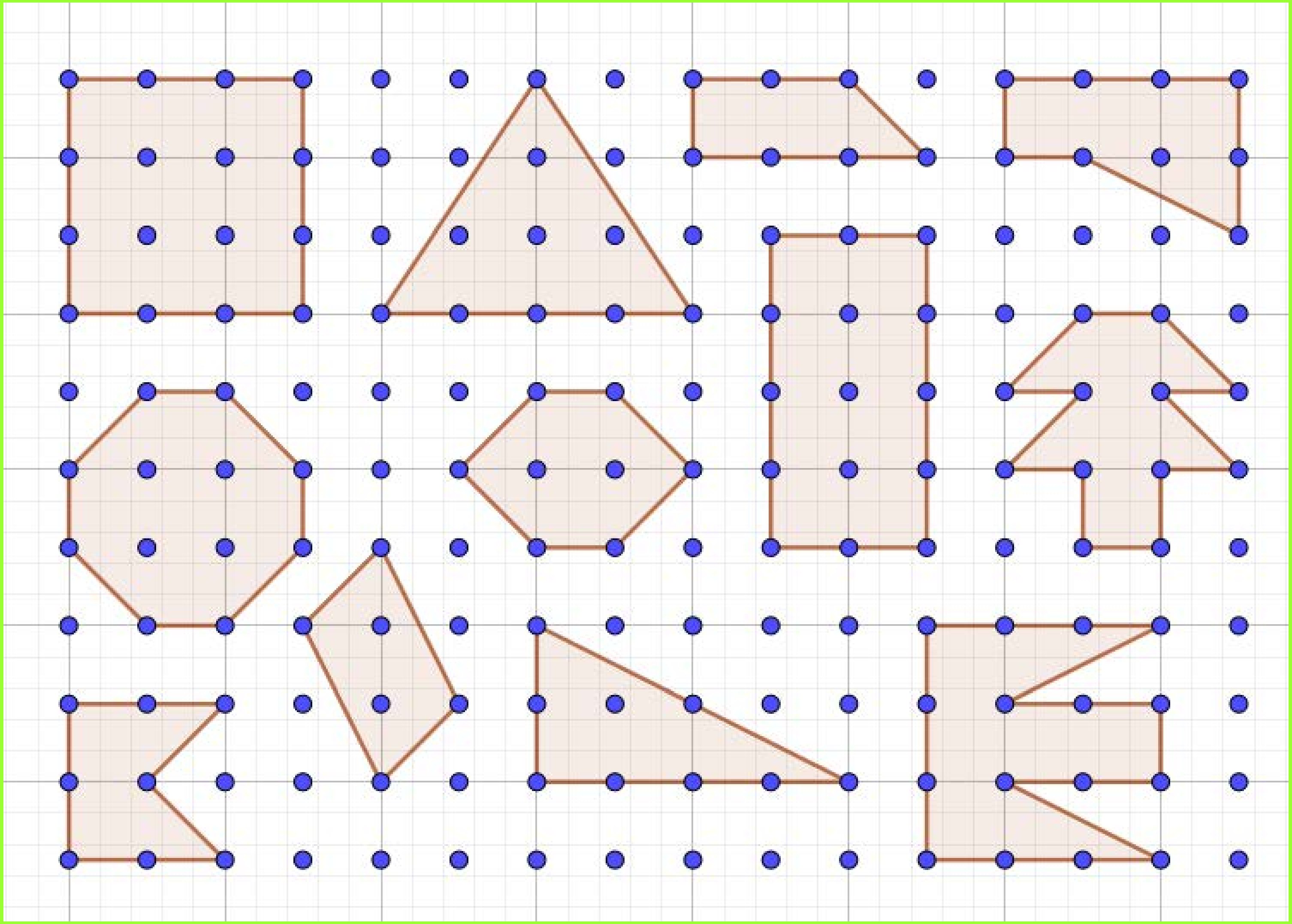
I es el número de puntos de la cuadrícula interiores al polígono

F el número de puntos de la cuadrícula que están en la frontera del polígono



El área del paralelogramo es 4 u^2
El área del triángulo es 3 u^2
El área del pentágono es de 28 u^2
21 cuadrados int +3 partidos en triángulos+4 partidos en tri y trapecios

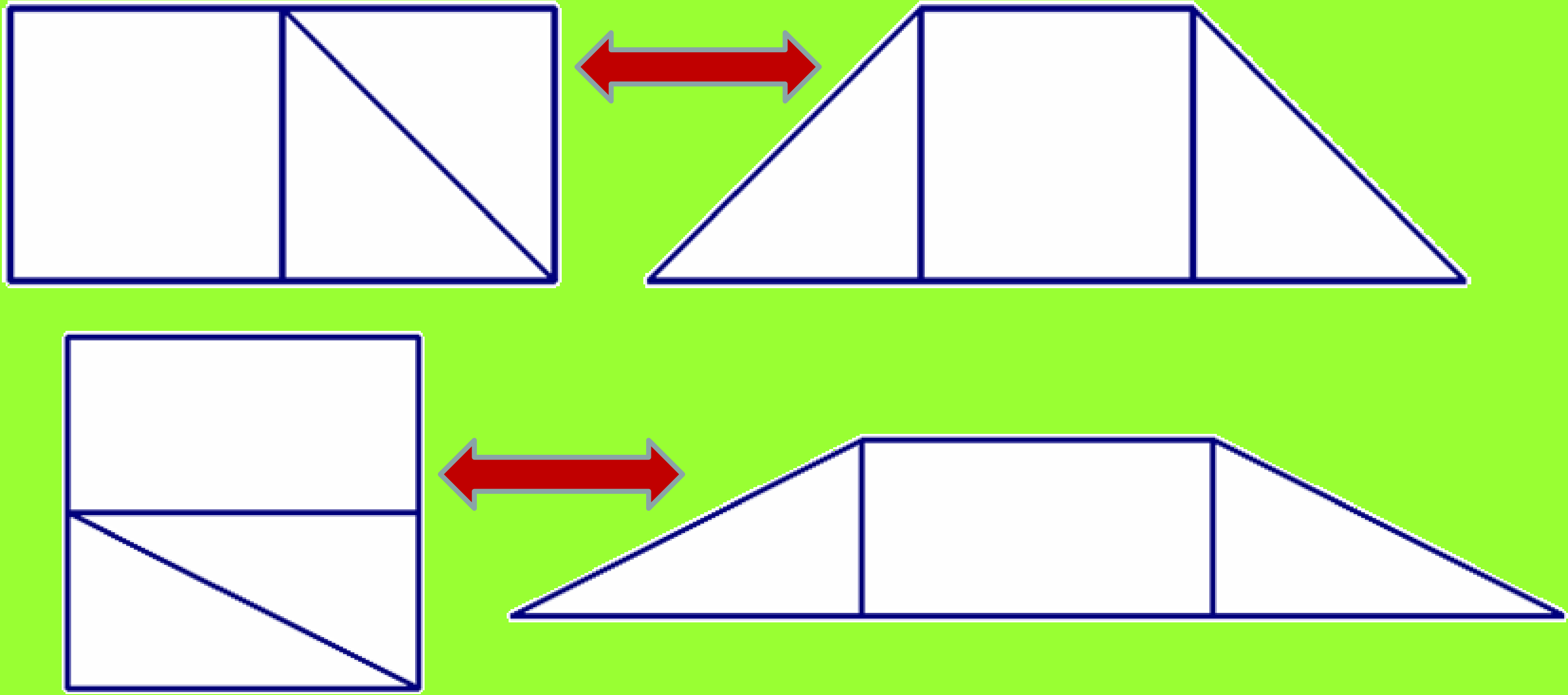
Teorema de Pick



DISECCIONES

Figuras equicompuestas: las construidas con las mismas piezas

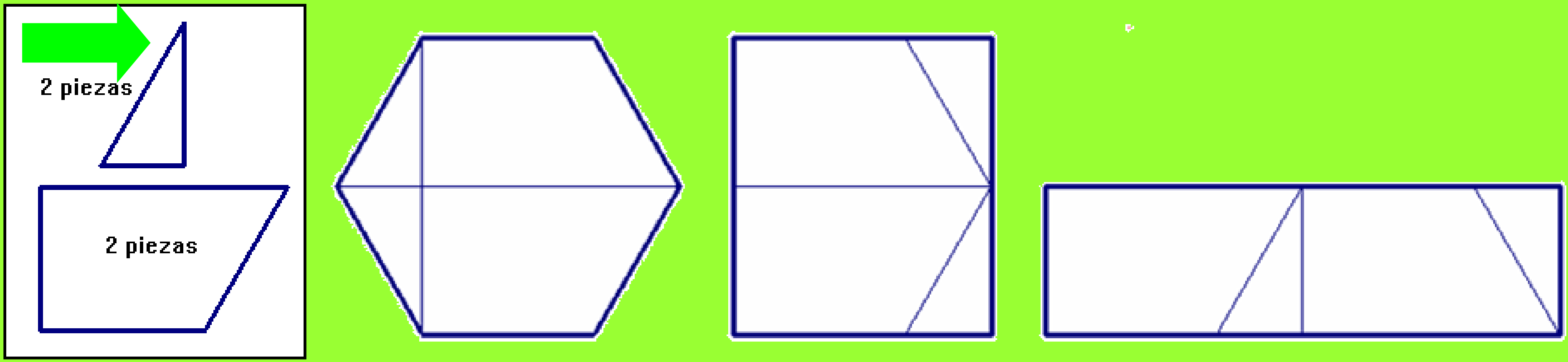
Figuras equivalentes: las que tienen la misma área

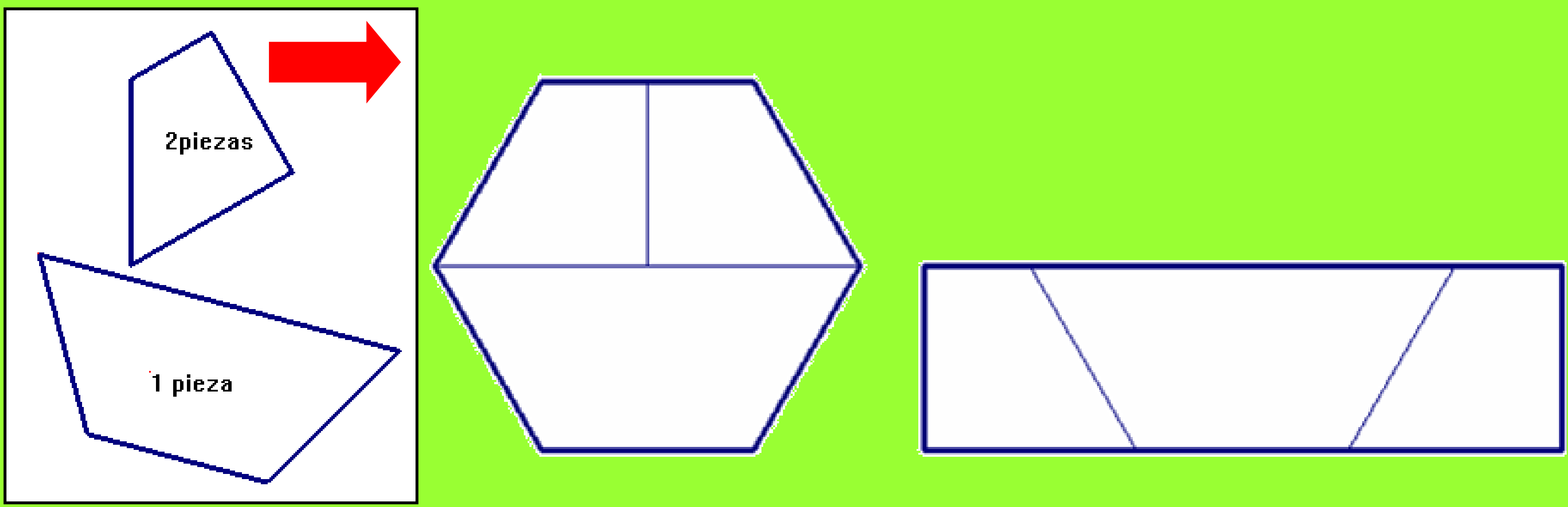


Teorema de Bolyai – Gerwien: Dos polígonos de la misma área son equicompuestos.

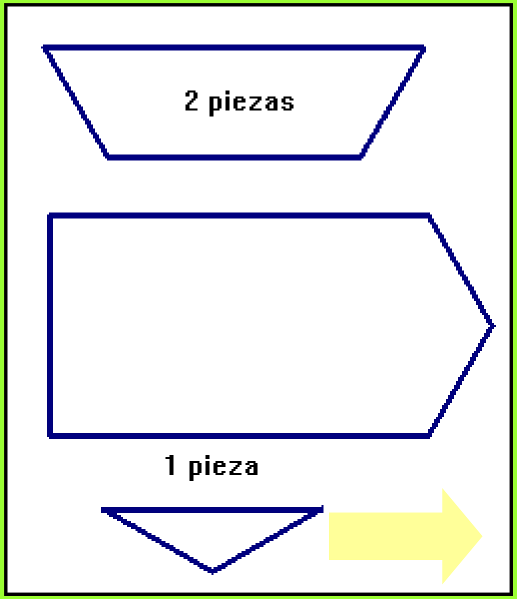
http://circulosmatematicos.org/wp-content/uploads/2017/09/Boltianski-Figuras-Equivalentes-y-Equicompuestas.pdf

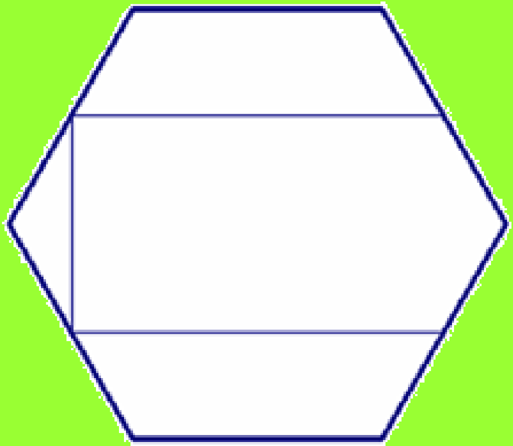
DISECCIONES DEL HEXÁGONO

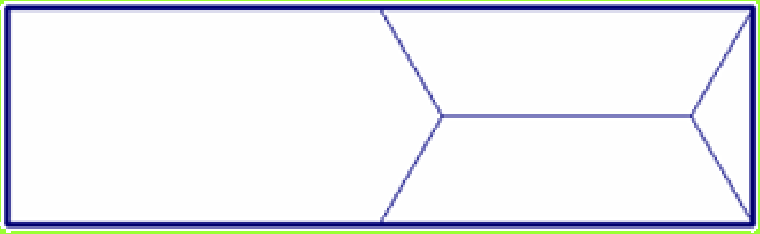


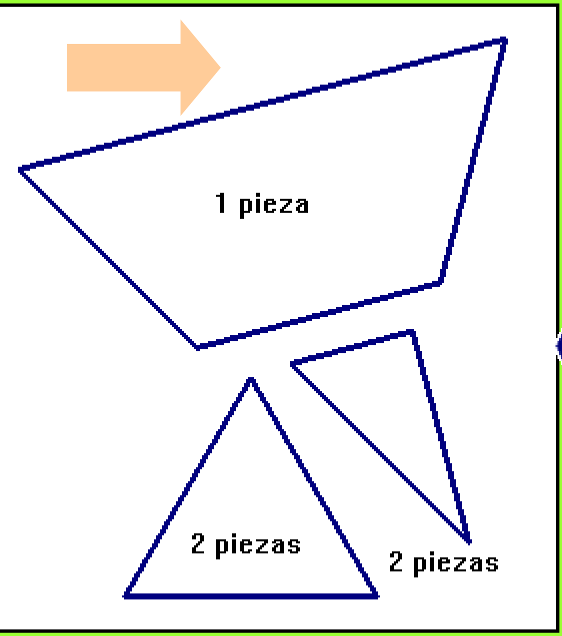


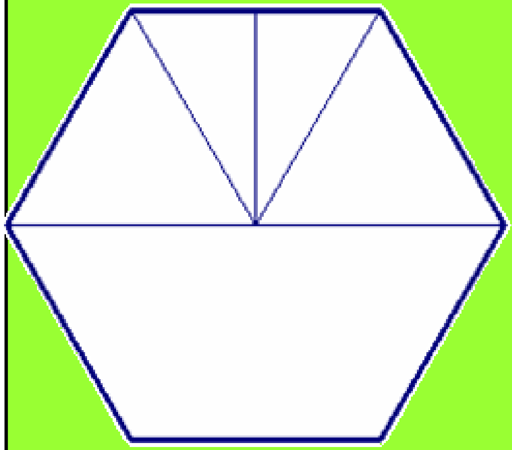
DISECCIONES DEL HEXÁGONO



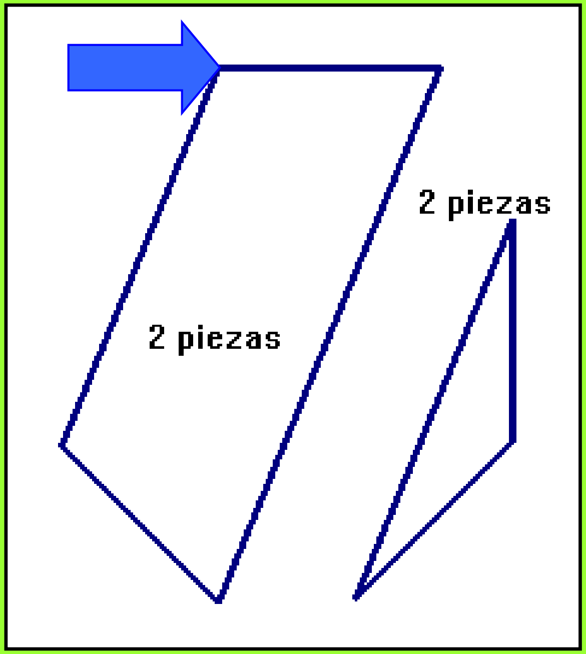


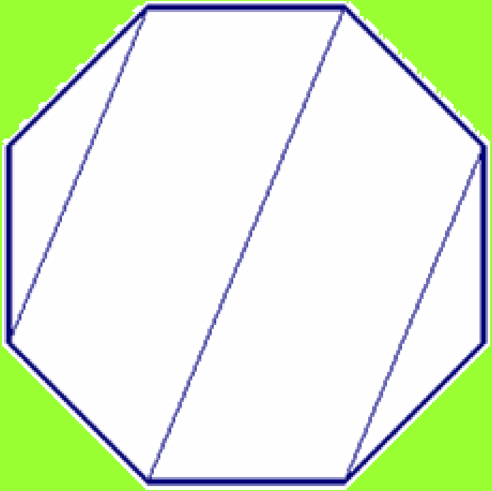


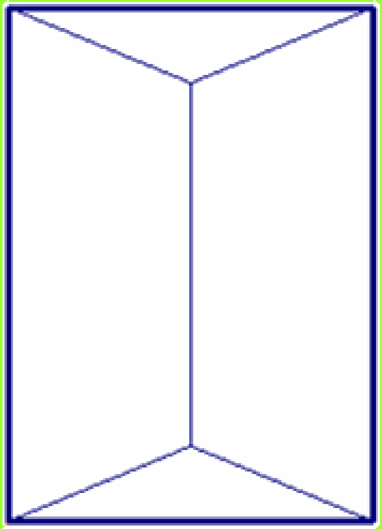


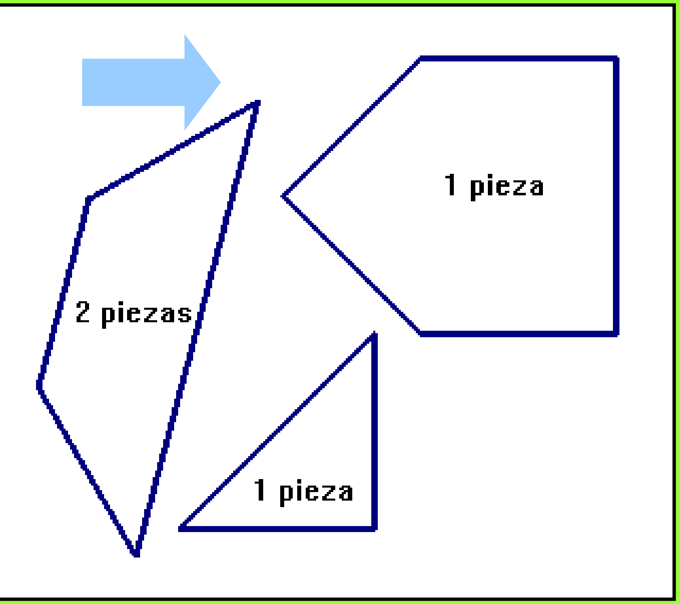


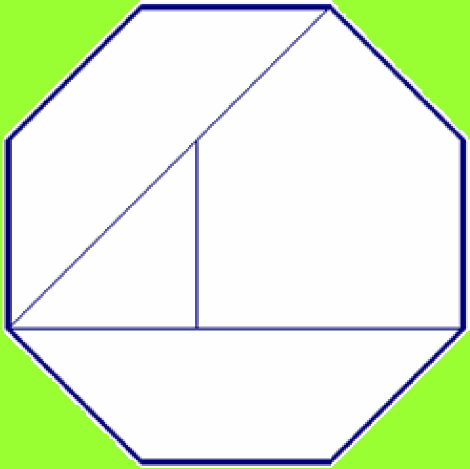
DISECCIONES del OCTÓGONO

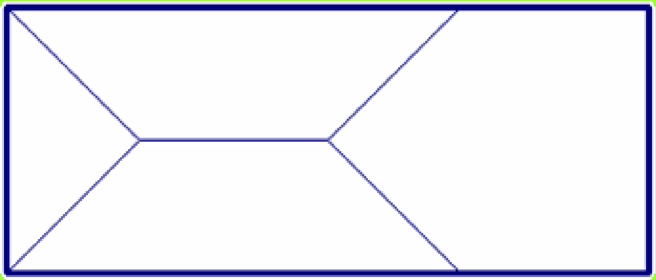




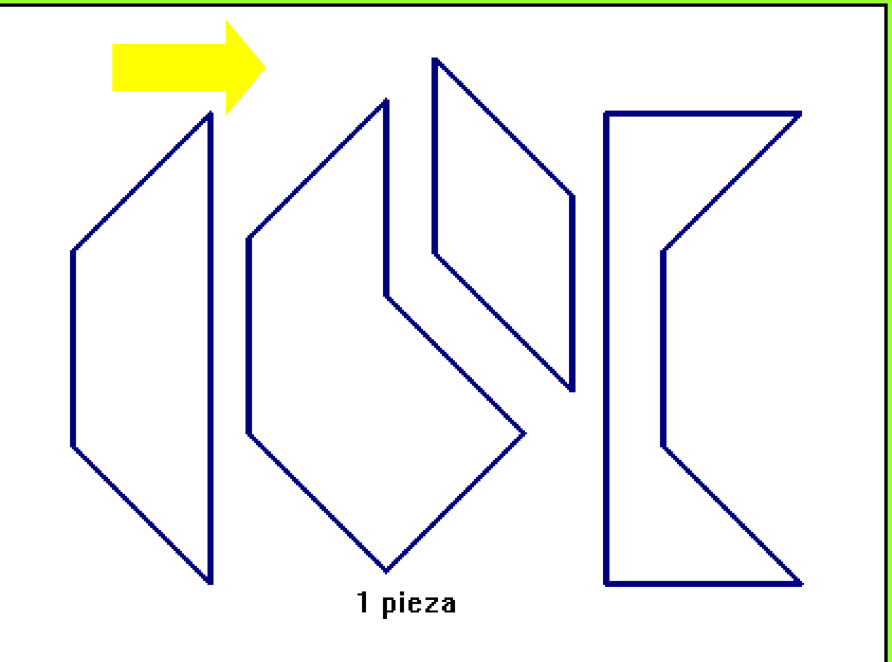


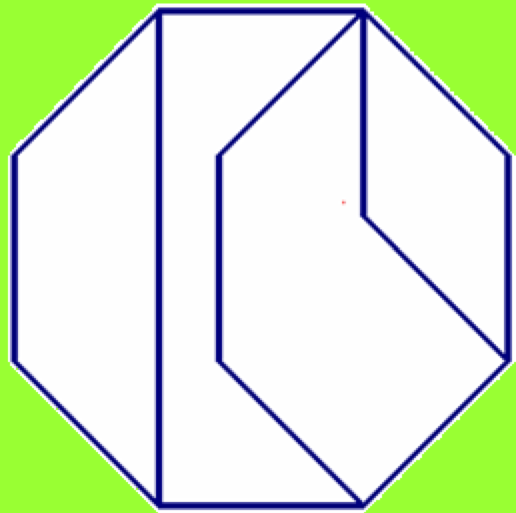


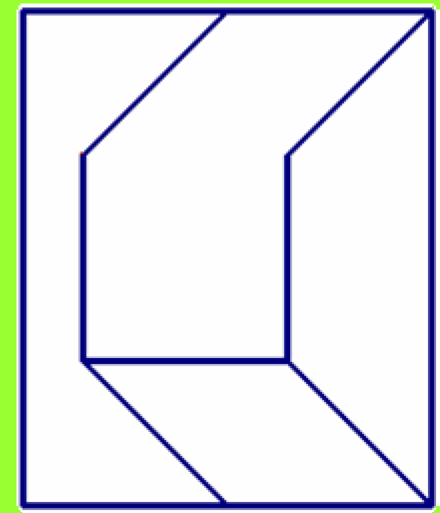


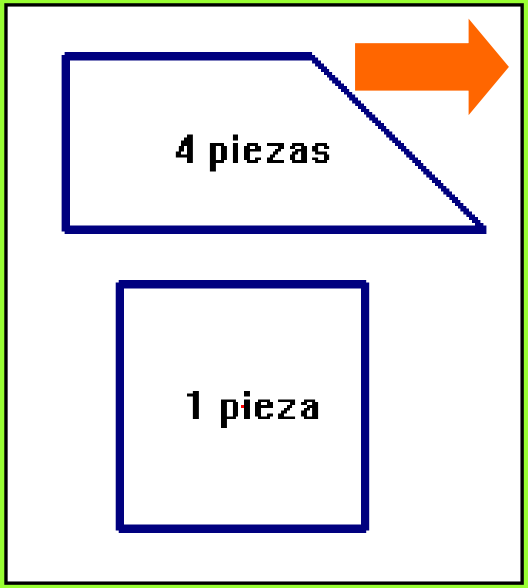


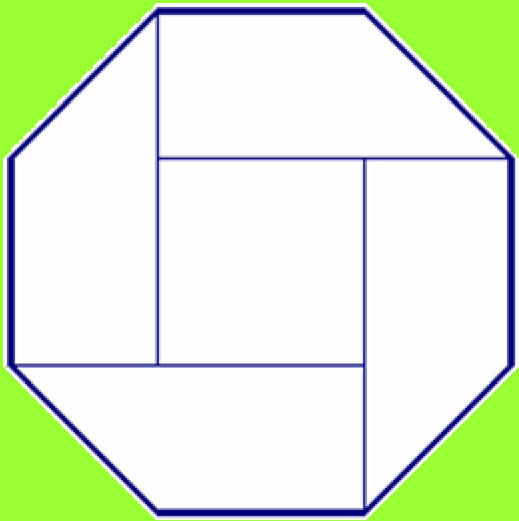
DISECCIONES del OCTÓGONO

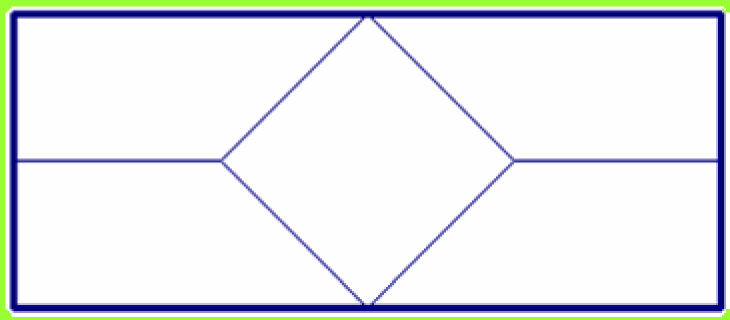












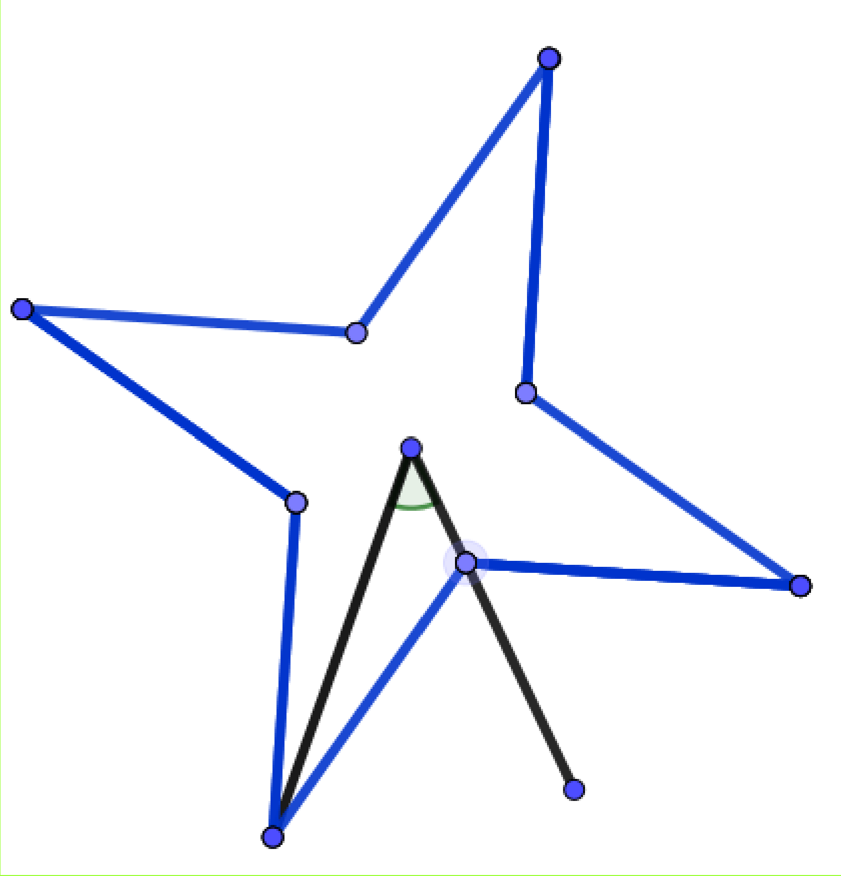
Libro de espejos: ayuda a visualizar figuras geométricas y comprobar propiedades.

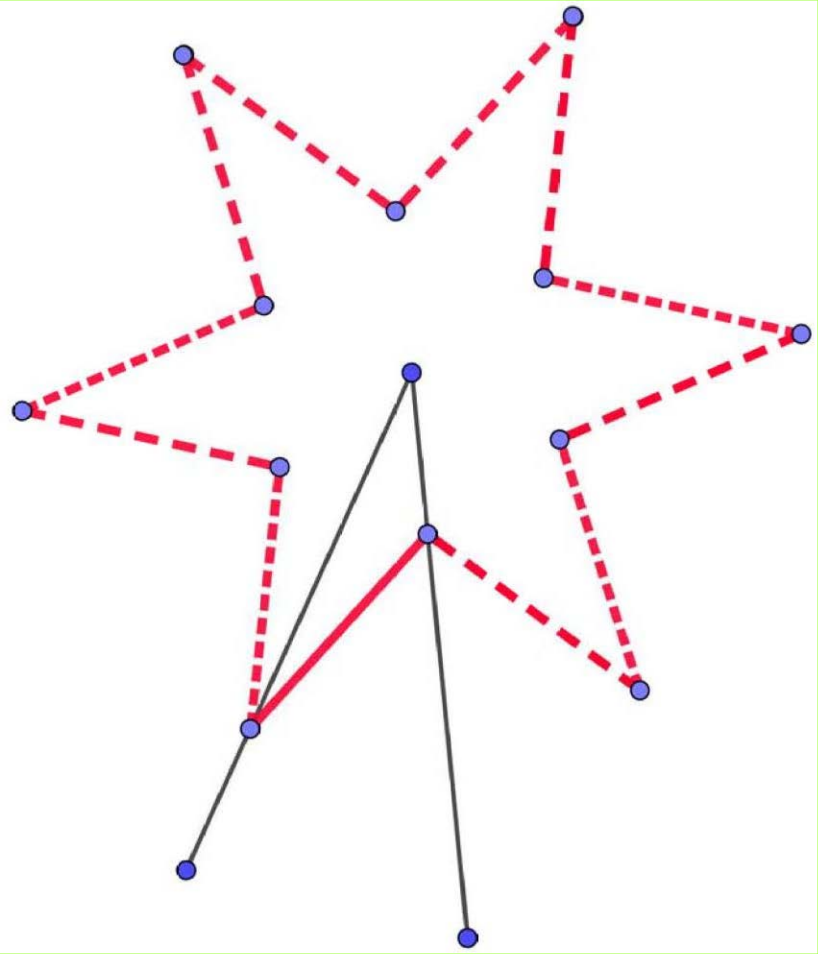
Actividad 1: traza un segmento en un papel. Con el libro de espejos construye un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular, un hexágono regular, etc.
Observa la triangulación de estos polígonos.
Deduce sus ángulos centrales.

Actividad 2: Visualiza polígonos estrellados

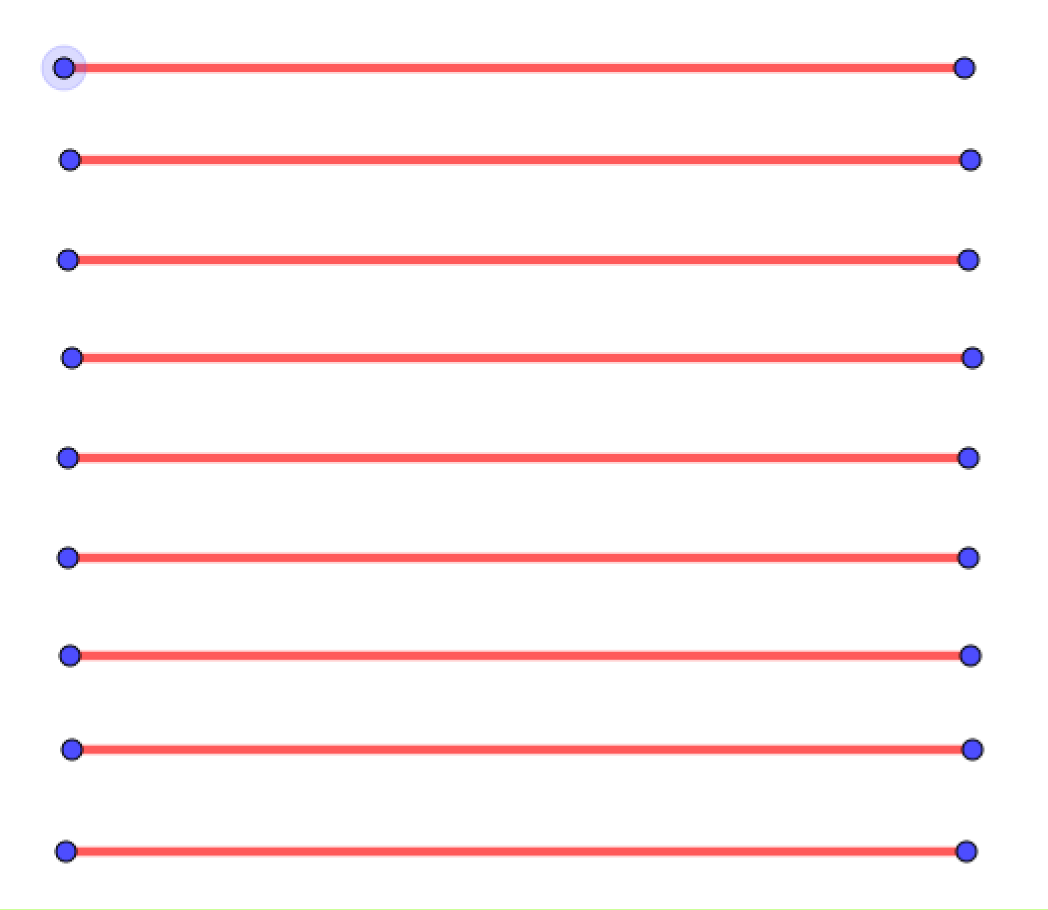
Construir estrellas con el libro de espejos

Dado el lado de la estrella, se coloca el espejo formando un determinado ángulo.
Si es de 45º se forma una estrella de cuatro puntas.
Si es de 30º la estrella tiene seis puntas





Visualizar distintos polígonos regulares poniendo el libro de espejos en posición perpendicular al segmento ¿Qué ángulo forman las hojas del espejo para cada polígono regular?



Utilizar el libro de espejos para observar los polígonos concéntricos que se forman.

Bibliografía

LIBROS:

Boltianski V. G. *Figuras equivalentes y equicompuestas.* Ed Mir 1981. http://circulosmatematicos.org/wp-content/uploads/2017/09/Boltianski-Figuras-Equivalentes-y-Equicompuestas.pdf

Chamoso Sánchez, J.M., Fernández Benito, I., Reyes Iglesias, E. *Burbujas de Arte y Matemáticas.*
Colección Diálogos en Matemáticas. Nivola, 2009.

Fernández Benito I., Reyes Iglesias, E. *Geometría con el hexágono y el octógono.* Proyecto Sur de Ediciones, 2003, 2ª edición, 2009.

Reyes Iglesias, E. y Fernández Benito, I. *Pentágonos. Construcciones. Mosaicos. Geometría sagrada.* Ediciones Universidad de Valladolid, Valladolid. 2015.

Row, T. Sundara. *Geometric exercices with paper folding.* Ed Dover, 1966.

Bibliografía

ARTÍCULOS

Bermejo, A. El libro de espejos. Aplicaciones didácticas
https://revistasuma.es/IMG/pdf/41/083-092.pdf

Fernández, I. Reyes, E. Construcciones y disecciones del octógono. Revista SUMA 38, 69-72. 2001.
http://revistasuma.es/IMG/pdf/38/069-072.pdf

Fernández, I. Reyes, E. Trabajando con el hexágono**.** Revista Números 60. 41-50. 2005.

Reyes, E. Formatos DIN y papiroflexia de algunos polígonos. Actas 5º Seminario Castellano y Leonés de Educación Matemática Toro (Zamora), 1998.

Reyes, E. Cuando la Geometría se hace Arte. Publicaciones MEC. Curso de verano UNED: Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas. 2006.

Vídeo: Movimientos en el plano. Libro de espejos:
http://www.rtve.es/alacarta/videos/mas-por-menos/aventura-del-saber-serie-mas-menosmovimientos-plano/1283084/

¡¡¡ Muchas gracias!!!

Mª Encarnación Reyes Iglesias
ereyes@maf.uva.es

SESIÓN: MATEMÁTICAS MANIPULATIVAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Burgos, 17 de septiembre de 2018.