VECTORES EN EL ESPACIO

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL, COMBINACIÓN LINEAL, BASE

EJERCICIO 1 : Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 1, 1)$, $\vec{c}(1, 0, 5)$ y $\vec{d}(-1, 1, 3)$:

a) ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?

b) Expresa, si es posible, el vector $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Solución:

a) No forman una base, pues cuatro vectores en $\mathbf{R}^3$ siempre son linealmente dependientes.

b) Debemos encontrar tres números, x, y, z, tales que: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

(-1, 1, 3) = x(1, 2, 3) + y(1, 1, 1) + z(1, 0, 5) (-1, 1, 3) = ($x + y + z$, $2x + y$, $3x + y + 5z$)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=-1 \\ 2x+y \qquad =1 \\ 3x+y+5z=3 \end{array}\right\} \text{Resolvemos el sistema por Gauss y obtenemos}: x=2,\ y=-3,\ z=0 \Rightarrow \vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+0\vec{c}$$

EJERCICIO 2 :

a) Se sabe que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes. ¿Podemos asegurar que $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Justifica tu respuesta.

b) Halla las coordenadas del vector $\vec{a}(4, 3, 7)$ respecto de la base *B* = {(2, 1, 0), (1,0,-2),(0, 0, 3)}.

Solución:

a) No. Por ejemplo, si tomamos $\vec{u}(1, 0, 0)$, $\vec{v}(0, 1, 0)$, y $\vec{w}(0, 2, 0)$:

– Son linealmente dependientes, pues $\vec{w} = 2\vec{v}$.

– Sin embargo, $\vec{u}$ no es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Llamamos $\vec{b}(2, 1, 0)$, $\vec{c}(1, 0, -2)$, $\vec{d}(0, 0, 3)$ a los vectores de la base B. Tenemos que encontrar tres números, x, y, z, tales que: $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} + z\vec{d}$

(4, 3, 7) = x(2, 1, 0) + y(1, 0, -2) + z(0, 0, 3) (4, 3, 7) = ($2x + y$, x, $-2y + 3z$)

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ x=3 \\ -2y+3z=7 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=3 \\ y=4-2x=-2 \\ 3z=7+2y \ \rightarrow \ z=\dfrac{7+2y}{3}=1 \end{array}$$

Las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de la base B son $(3, -2, 1)$, es decir: $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d}$

EJERCICIO 3 : Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 0)$ y $\vec{v}(3, 2, -1)$:

a) ¿Son linealmente independientes? **b) ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?**

c) Halla un vector, $\vec{w}$, tal que $2\vec{u} + 3\vec{w} = \dfrac{1}{2}\vec{v}$.

Solución:

a) Sí son linealmente independientes, puesto que si escribimos:
x(2,-1, 0) + y(3, 2, -1) = (0, 0, 0), es decir:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=0 \\ -x+2y=0 \\ -y=0 \end{array}\right\} \text{Este sistema solo tiene la solución trivial: } x = y = 0$$

b) No forman una base de $\mathbf{R}^3$, pues para obtener una base de $\mathbf{R}^3$ necesitamos tres vectores (linealmente independientes).

c) $2\vec{u} + 3\vec{w} = \dfrac{1}{2}\vec{v} \ \rightarrow \ 3\vec{w} = \dfrac{1}{2}\vec{v} - 2\vec{u} \ \rightarrow \ \vec{w} = \dfrac{1}{6}\vec{v} - \dfrac{2}{3}\vec{u} \ \Rightarrow \ \vec{w} = \dfrac{1}{6}(3, 2, -1) - \dfrac{2}{3}(2, -1, 0) = \left(\dfrac{-5}{6}, 1, \dfrac{-1}{6}\right)$

EJERCICIO 4 :

a) Halla los valores de x, y, z tales que $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=0$, siendo $\vec{u}(2,0,-3)$, $\vec{v}(1,-2,0)$ y $\vec{w}(3,2,-6)$

b) ¿Son linealmente independientes los tres vectores anteriores? ¿Forman una base de R^3?

Solución:

a) $x(2, 0, -3) + y(1, -2, 0) + z(3, 2, -6) = (0, 0, 0) \Rightarrow (2x + y + 3z,\ -2y + 2z,\ -3x - 6z) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+3z=0 \\ -2y+2z=0 \\ -3x\qquad -6z=0 \end{array}\right\}\quad \text{Resolviendo el sistema por Gauss} \Rightarrow \text{Soluciones: } x=-2\lambda,\ y=\lambda,\ z=\lambda$$

b) Según los resultados obtenidos en el apartado a), deducimos que los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, no son base.

EJERCICIO 5 : Consideramos la base de R^3 formada por los vectores : $\vec{a}(2,-1,3)$, $\vec{b}(0,2,-1)$, $\vec{c}(3,0,1)$

a) Halla las coordenadas de $\vec{u}(4,\ -7,\ 14)$ respecto de la base anterior.

b) Expresa, si es posible, el vector $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{u}$.

Solución:

a) Tenemos que encontrar tres números x, y, z, tales que: $\vec{u}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$, es decir:

$(4, -7, 14) = x(2, -1, 3) + y(0, 2,-1) + z(3, 0, 1) \Rightarrow (4, -7, 14) = (2x + 3z,\ -x + 2y,\ 3x - y + z)$

$$\left.\begin{array}{r} 2x\qquad +3z=4 \\ -x+2y\qquad =-7 \\ 3x\ -y\ +z=14 \end{array}\right\}\quad \text{Resolviendo el sistema por Gauss} \Rightarrow \text{Solución: } x=5,\ y=-1,\ z=-2$$

Por tanto, las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de la base dada son $(5,\ -1,\ -2)$, es decir: $\vec{u}=5\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}$

b) De la igualdad obtenida en a), tenemos

que: $\vec{u}=5\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c} \quad\rightarrow\quad 2\vec{c}=5\vec{a}-\vec{b}-\vec{u} \quad\rightarrow\quad \vec{c}=\frac{5}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{u}$

PRODUCTO ESCALAR Y APLICACIONES (Módulo de un vector, ángulo que forman dos vectores, proyección ortogonal,…)

EJERCICIO 6 : Dados los vetores $\vec{u}(2,\ -1,\ 3)$, $\vec{v}(4,\ 2,\ -2)$ y $\vec{w}(1,\ 2,\ x)$:

a) Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Obtén el valor de *x* para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ formen un ángulo de 60º.

Solución:

a) $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}\approx 3{,}74 \qquad |\vec{v}|=\sqrt{4^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{24}\approx 4{,}90$

Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos que:

$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{8-2-6}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=0 \quad\rightarrow\quad \vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, es decir, $\alpha=90^{\circ}$.

b) Ha de cumplirse que: $\cos 60^{\circ}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}$, es decir: $\frac{1}{2}=\frac{2-2+3x}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5+x^2}} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}=\frac{3x}{\sqrt{70+14x^2}}$

$\sqrt{70+14x^2}=6x \quad\rightarrow\quad 70+14x^2=36x^2 \quad\rightarrow\quad 70=22x^2$

$$x^2=\frac{70}{22}=\frac{35}{11}\quad \left\{\begin{array}{l} x=-\sqrt{\frac{35}{11}} \quad \text{(no vale, pues } \vec{u}\cdot\vec{v}=3x>0) \\ x=\sqrt{\frac{35}{11}} \end{array}\right.$$

EJERCICIO 7 : Dados los vectores $\vec{u}(1,\ 0,\ 0)$ y $\vec{v}(1,\ 1,\ 0)$:

a) Halla la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, así como el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Encuentra un vector $(x,\ y,\ z) \neq (0,\ 0,\ 0)$, que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que sea perpendicular a (1, 0, 0).

Solución:

Proyección de u sobre v: $\vec{u}' = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \dfrac{1}{2}(1,1,0) = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0)$

Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos que: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = 45^o$

b) Un vector que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de la forma $a\vec{u} + b\vec{v}$, es decir:

$a\vec{u} + b\vec{v} = a(1,\ 0,\ 0) + b(1,\ 1,\ 0) = (a + b,\ b,\ 0)$

Para que sea perpendicular a (1, 0, 0), su producto escalar ha de ser cero:

$(a + b,\ b,\ 0) \cdot (1,\ 0,\ 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a$

Por tanto, cualquier vector de la forma: (0, *b*, 0), con $b \neq 0$ cumple las condiciones exigidas.

EJERCICIO 8 : Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que forman un ángulo de 45^o y que tienen, el mismo módulo $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$.

a) ¿Cuál es el módulo de $\vec{u} + \vec{v}$? ¿Y el de $\vec{u} - \vec{v}$?

b) Demuestra que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son perpendiculares.

Solución:

a) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 =$

$= 4 + 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u},\ \vec{v}) + 4 = 4 + 8 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 4 = 8 + 4\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} \approx 3{,}70$

$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 4 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 45^o + 4 = 8 - 4\sqrt{2}$

$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}} \approx 1{,}53$

b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$

EJERCICIO 9 : Dados los vectores $\vec{a}(1,\ -1,\ 0)$, $\vec{b}(0,\ 1,\ -1)$ y $\vec{c} = m\vec{a} - \vec{b}$:

a) Halla el valor de *m* para que $\vec{a}$ y $\vec{c}$ sean perpendiculares.

b) Para $m = 2$, halla el ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Solución:

a) $\vec{c} = m\vec{a} - \vec{b} = m(1,\ -1,\ 0) - (0,\ 1,\ -1) = (m,\ -m - 1,\ 1)$

$\vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = (1,\ -1,\ 0) \cdot (m,\ -m - 1,\ 1) = m + m + 1 = 2m + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -\dfrac{1}{2}$

b) Para $m = 2$, queda $\vec{c}(2,\ -3,\ 1)$. Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$,

tenemos que: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \dfrac{-4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \dfrac{-4}{\sqrt{28}} \approx 0{,}76 \quad \rightarrow \quad \alpha = 139^o\ 27'\ 51''$

<u>EJERCICIO 10</u> : Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; halla x e y de forma que $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sea perpendicular a $\vec{b}$ y tenga el mismo módulo que $\vec{a}$.

Solución: $\vec{a}(2,\ -1,\ 0)$ $\quad \vec{b}(1,\ 2,\ -1)$ $\quad \vec{c}(x,\ y,\ 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{c} \perp \vec{b} \ \rightarrow \ \vec{c}\cdot\vec{b} = 0 \ \rightarrow \ x + 2y = 0 \\ |\vec{c}| = |\vec{a}| \ \rightarrow \ \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5} \ \rightarrow \ x^2+y^2 = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -2y \\ 4y^2 + y^2 = 5 \end{array} \ 5y^2 = 5 \ \rightarrow \ y^2 = 1 \ \rightarrow \ \begin{cases} y = -1 \ \rightarrow \ x = 2 \\ y = 1 \ \rightarrow \ x = -2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- $x = 2,\ y = -1,$ que corresponde a $\vec{c}(2,\ -1,\ 0)$.
- $x = -2,\ y = 1,$ que corresponde a $\vec{c}(-2,\ 1,\ 0)$.

PRODUCTO VECTORIAL

<u>EJERCICIO 11</u> : Dados los vectores $\vec{u}(1,\ 3,\ 0)$ y $\vec{v}(2,\ 1,\ 1)$:

a) Halla un vector, $\vec{w}$, de módulo 1, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

b) ¿Cuál es el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

Solución:

a) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es: $\vec{u}\times\vec{v} = (1,\ 3,\ 0)\times(2,\ 1,\ 1) = (3,\ -1,\ -5)$

Dividimos por su módulo para conseguir que tenga módulo 1: $\vec{w} = \dfrac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{35}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{35}},\ \dfrac{-5}{\sqrt{35}}\right)$

Hay dos soluciones: $\left(\dfrac{3}{\sqrt{35}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{35}},\ \dfrac{-5}{\sqrt{35}}\right)$ y $\left(\dfrac{-3}{\sqrt{35}},\ \dfrac{1}{\sqrt{35}},\ \dfrac{5}{\sqrt{35}}\right)$

b) Área $= |\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{35} \approx 5{,}92\ u^2$

<u>EJERCICIO 12</u> :

a) Demuestra que, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores cualesquiera, se tiene que:

$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v}) = 2(\vec{u}\times\vec{v})$

b) Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2,\ -1,\ 1)$ y a $\vec{v}(3,\ 0,\ -1)$.

Solución:

a) $(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\times\vec{u} + \vec{u}\times\vec{v} - \vec{v}\times\vec{u} - \vec{v}\times\vec{v} \overset{(*)}{=} \vec{0} + \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{v} - \vec{0} = 2(\vec{u}\times\vec{v})$

(*) Tenemos en cuenta que $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$ y que $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$.

b) $u \times v = (2,\ -1,\ 1)\times(3,\ 0,\ -1) = (1,\ 5,\ 3)$

<u>EJERCICIO 13</u> : Halla el valor de m para que el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ (2,0,1) y $\vec{v}$ (0,m,1) sea 2.

Solución:

- El área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a $|\vec{u}\times\vec{v}|$.
- Calculamos $\vec{u}\times\vec{v}$ y hallamos su módulo: $\vec{u}\times\vec{v} = (2,\ 0,\ 1)\times(0,\ m,\ 1) = (-m,\ -2,\ 2m)$

$|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{(-m)^2 + (-2)^2 + (2m)^2} = \sqrt{m^2 + 4 + 4m^2} = \sqrt{5m^2 + 4}$

Igualamos a 2: Área $= \sqrt{5m^2 + 4} = 2 \ \rightarrow \ 5m^2 + 4 = 4 \ \rightarrow \ 5m^2 = 0 \ \rightarrow \ m = 0$

EJERCICIO 14 :

a) Halla un vector unitario que sea perpendicular a (3, -1, 1) y a (1,-2,0)

b) ¿Es cierto que $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$? Pon un ejemplo.

Solución:

a) Un vector perpendicular a los dos dados es: (3,-1, 1) x (1, -2, 0) = (2, 1, -5)

Dividiendo por su módulo, tendrá módulo 1: $\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}\right)$

También cumple las condiciones su opuesto: $\left(\frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$

b) En general, no es cierto. Por ejemplo: $\vec{u} = (1,\ 0,\ 0)$ $\quad \vec{v} = (1,\ 0,\ 0)$ $\quad \vec{w} = (0,\ 1,\ 0)$

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = \vec{0}\times\vec{w} = \vec{0}\\ \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{u}\times(0,\ 0,\ 1) = (1,\ 0,\ 0)\times(0,\ 0,\ 1) = (0,\ -1,\ 0)\end{array}\right\} \text{Por tanto, } (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} \neq \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}).$$

EJERCICIO 15 : Halla el área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ x $\vec{v}$ y $\vec{u}$ x $\vec{w}$, siendo: $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(0, 1, -1)$ y $\vec{w}(1, 0, 1)$

Solución:

- Calculamos $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{w}$: $\quad \vec{a} = \vec{u}\times\vec{v} = (0,\ 2,\ 2)$ $\qquad \vec{b} = \vec{u}\times\vec{w} = (-1,\ -1,\ 1)$

El área del paralelogramo determinado por a y b es igual al módulo del producto vectorial:

$\vec{a}\times\vec{b} = (0,\ 2,\ 2)\times(-1,\ -1,\ 1) = (4,\ -2,\ 2)$

$\text{Área} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24} \approx 4{,}90\ u^2$

PRODUCTO MIXTO

EJERCICIO 16 :

a) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}$ (2,-1,1), $\vec{v}$ (3,0.-2), $\vec{w}$ (2,-3,0)

b) ¿Cuánto valen cada uno de los siguientes productos mixtos?: $[2\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]$; $\quad [\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u}+\vec{v}]$

Solución:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al valor absoluto de su producto mixto: $[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -17 \ \rightarrow\ \text{Volumen} = 17\ u^3$

b) Utilizando las propiedades de los determinantes, tenemos que: $[2\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = 2[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = 2\cdot(-17) = -34$

$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u}+\vec{v}] = 0$ (el tercer vector depende linealmente de los dos primeros).

EJERCICIO 17 :

a) Halla los valores de m para que los vectores $\vec{u}$ (0,1,1), $\vec{v}$ (-2,0,1) y $\vec{w}$ (m,m-1,1) sean linealmente independientes.

b) Estudia si el vector (2, 1, 0) depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $m = 3$.

Solución:

a) Para que sean linealmente independientes, su producto mixto debe ser distinto de cero:

$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ m & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - m = 0 \ \rightarrow\ m = 4 \ \Rightarrow$ Ha de ser $m \neq 4$.

b) Para $m = 3$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, y forman una base de $\mathbf{R}^3$.

Por tanto, cualquier vector de $\mathbf{R}^3$, en particular (2, 1, 0), depende linealmente de ellos.

<u>EJERCICIO 18</u> : Dados los vectores $\vec{u}$ (1,2,3), $\vec{v}$ (1,1,1) y $\vec{w}$ (1,λ,5), halla el valor de λ para que:
a) determinen un paralelepípedo de volumen 10. b) sean linealmente dependientes.

Solución:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al valor absoluto de su producto mixto: $[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = 2\lambda - 6$

Volumen $= |\,2\lambda - 6\,| = 10$ $\begin{cases} 2\lambda - 6 = 10 & \rightarrow \quad 2\lambda = 16 \quad \rightarrow \quad \lambda = 8 \\ 2\lambda - 6 = -10 & \rightarrow \quad 2\lambda = -4 \quad \rightarrow \quad \lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow$

Hay dos soluciones: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$

b) Su producto mixto ha de ser cero: $[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = 2\lambda - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 3$

<u>EJERCICIO 19</u> : Dados los vectores $\vec{u}(1,\ 0,\ -1)$, $\vec{v}(0,\ 2,\ -1)$ y $\vec{w}(2,\ -2,\ 1)$, se pide:
a) El volumen del paralelepípedo determinado por ellos.
b) Halla, si existe, el valor de α para que el vector $\vec{a}(\alpha,\ \alpha,\ -6)$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:

a) Es igual al valor absoluto de su producto mixto: $[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad \rightarrow \quad \text{Volumen} = 4\ u^3$

b) Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ han de ser linealmente dependientes ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes); por tanto, su producto mixto ha de ser cero: $[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{vmatrix} = 3\alpha - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 4$

<u>EJERCICIO 20</u> :
a) Demuestra que los vectores $\vec{u}(k,\ -3,\ 2)$, $\vec{v}(k,\ 3,\ 2)$ y $\vec{w}(1,\ 0,\ 0)$ son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de *k*.
b) ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

Solución:

a) Tenemos que probar que su producto mixto es distinto de cero, sea cual sea el valor de *k*.

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ k & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \text{ para todo } k.$$

b) El volumen es igual al valor absoluto de su producto mixto. Por tanto: *Volumen* = 12 u^3

REPASO

<u>EJERCICIO 21</u> : Dados los vectores $\vec{u}(2,\ -1,\ 1)$, $\vec{v}(3,\ -1,\ 0)$ y $\vec{w}(m,\ 2,\ -m)$:
a) Halla el valor de *m* para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares.
b) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. c) Halla el área del triángulo que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:

a) Para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero:

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (2,\ -1,\ 1) \cdot (m,\ 2,\ -m) = 2m - 2 - m = m - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad m = 2$

b) Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{|\,\vec{u} \cdot \vec{v}\,|}{|\,\vec{u}\,| \cdot |\,\vec{v}\,|} = \frac{7}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{60}} \approx 0{,}904 \quad \rightarrow \quad \alpha = 25^o\ 21'\ 6''$$

c) $\text{Área} = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = \frac{1}{2}|(1,3,1)| = \frac{1}{2}\sqrt{1+9+1} = \frac{1}{2}\sqrt{11} \approx 1{,}66\ u^2$

<u>EJERCICIO 22</u> : Consideramos los vectores $\vec{a}(1,1,2)$, $\vec{b}(0,-2,1)$ y $\vec{c}(3,2,1)$. Calcula:

a) El área del triángulo que determinan $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Solución:

a) $\text{Área} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}|(1,1,2)\times(0,-2,1)| = \frac{1}{2}|(5,-1,-2)| = \frac{1}{2}\sqrt{25+1+4} = = \frac{1}{2}\sqrt{30} \approx 2{,}74\ u^2$

b) El volumen es igual al valor absoluto del producto mixto de los tres vectores:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 11 \rightarrow \text{Volumen} = 11\ u^3$$

<u>EJERCICIO 23</u> : Dados los vectores $\vec{u}(-1,1,1)$, $\vec{v}(2,0,-3)$ y $\vec{w}(k,1,k)$:

a) Halla el valor de *k* para que el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ valga $11u^3$.

b) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:

a) El volumen del paralelepípedo es igual al valor absoluto del producto mixto de los tres vectores:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = -5k-1 \Rightarrow \text{Volumen} = |-5k-1| = 11 \rightarrow \begin{cases} -5k-1 = 11 \rightarrow k = \dfrac{-12}{5} \\ -5k-1 = -11 \rightarrow k = 2 \end{cases}$$

b) Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|-5|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{39}} \approx 0{,}80 \rightarrow \alpha = 36^\circ\ 48'\ 31''$$

<u>EJERCICIO 24</u> : Dados los puntos *A*(-2,0,1), *B* (1,-3,2), *C* (-1, 4, 5) y *D* (3, 1, -2), calcula:
a) El área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.
b) El volumen del tetraedro de vértices *A*, *B*, *C* y *D*.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}(3,-3,1)$; $\overrightarrow{AC}(1,4,4)$

$\text{Área} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(-16,-11,15)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-16)^2+(-11)^2+15^2} = = \frac{1}{2}\sqrt{602} = 12{,}27\ u^2$

b) $\overrightarrow{AB}(3,-3,1)$; $\overrightarrow{AC}(1,4,4)$; $\overrightarrow{AD}(5,1,-3)$

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -136 \rightarrow \text{Volumen} = 136\ u^3$$

<u>EJERCICIO 25</u> : Sean los puntos *A* (2, -1, 3), *B*(-1,5,m), *C* (*m*, 2, -2) y *D* (0, 1,-3). Calcula el valor de *m*, sabiendo que el paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ tiene un volumen de $40\ u^3$.

Solución:

$\overrightarrow{AB}(-3,6,m-3)$; $\overrightarrow{AC}(m-2,3,-5)$; $\overrightarrow{AD}(-2,2,-6)$

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -3 & 6 & m-3 \\ m-2 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = [54 + 2(m-2)(m-3) + 60] - [-6(m-3) + 30 - 36(m-2)] = 2m^2 + 32m + 6$$

Volumen: V = $|2m^2 + 32m + 6| = 40$. Dos posibilidades:

- $2m^2 + 32m + 6 = 40 \;\Rightarrow\; 2m^2 + 32m - 34 = 0 \;\Rightarrow\; m^2 + 16m - 17 = 0$

  $$m = \frac{-16 \pm \sqrt{256+68}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{-16 \pm 18}{2} \begin{cases} m = 1 \\ m = -17 \end{cases}$$

- $2m^2 + 32m + 6 = -40 \;\Rightarrow\; 2m^2 + 32m + 46 = 0 \;\Rightarrow\; m^2 + 16m + 23 = 0$

  $$\text{m} = \frac{-16 \pm \sqrt{256-92}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{164}}{2} = \frac{-16 \pm 2\sqrt{41}}{2} = -8 \pm \sqrt{41}$$

Hay cuatro soluciones: $m_1 = -17$; $m_2 = 1$; $m_3 = -8 + \sqrt{41}$; $m_4 = -8 - \sqrt{41}$

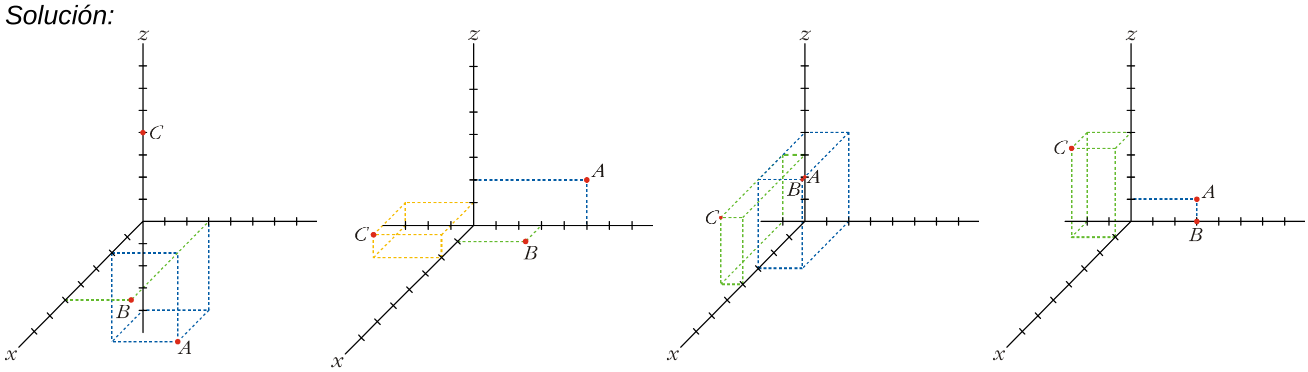
REPRESENTAR PUNTOS EN EL ESPACIO

<u>EJERCICIO 26</u> : Representa los puntos siguientes:

a) *A*(2, 3, -4), *B*(5, 3, 0) y *C*(0, 0, 4) **b) *A*(0, 5, 2), *B*(1, 3, 0) y *C*(2, -3, 1)**

c) *A*(0, 0, 2), *B*(3, 2, 4) y *C*(4, -1, 3) **d) *A*(0, 3, 1), *B*(0, 3, 0) y *C*(1, -2, 4)**

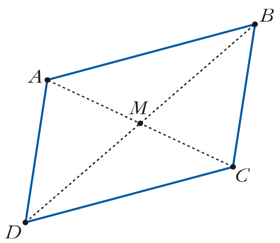
Solución:



APLICACIONES DE LOS VECTORES

<u>EJERCICIO 27</u> : Los puntos *A*(3, 0, 2), *B*(5, -1, 1) y *C*(-2, 3, 1) son vértices consecutivos de un paralelogramo. Obtén el cuarto vértice y el centro del paralelogramo.

Solución:



Como se trata de un paralelogramo, se tiene que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Si $D = (x,\ y,\ z)$:

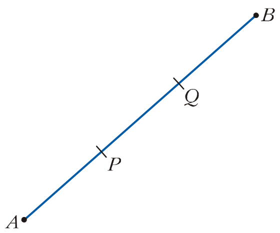
(2,-1,-1)=(-2-*x*,3-*y*,1-*z*) de donde: x = -4, y = 4, z = 2 $\Rightarrow$ *D*(-4, 4, 2)

El centro del paralelogramo es el punto medio de una de las dos diagonales, así:

$$M = \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

<u>EJERCICIO 28</u> : Halla las coordenadas de los puntos *P* y *Q* que dividen al segmento de extremos *A*(3,-1, 2) y *B*(-2, 2, 4) en tres partes iguales.

Solución:

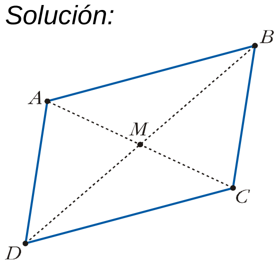


AB = 3AP $\Rightarrow$ (-1,3,2) = 3(x-3, y+1, z-2) $\Rightarrow$ P(x,y,z) = $\left(\frac{8}{3}, 0, \frac{8}{3}\right)$

Q = Pto_medio PB = $\left(\frac{\frac{8}{3}-2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{\frac{8}{3}+4}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{10}{3}\right)$

<u>EJERCICIO 29</u> : Dos de los vértices de un paralelogramo son los puntos *A*(3, 0, -1) y *B*(2,-2, 3). El centro del paralelogramo está en el punto *M*(1, 2, -1). Halla los otros dos vértices.

Solución:



Llamemos $C = (x_1, y_1, z_1)$ y $D = (x_2, y_2, z_2)$.

C es el simétrico de *A* respecto de *M*, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3+x_1}{2}=1 \quad \to \quad x_1=-1 \\ \dfrac{0+y_1}{2}=2 \quad \to \quad y_1=4 \\ \dfrac{-1+z_1}{2}=-1 \quad \to \quad z_1=-1 \end{array}\right\} C=(-1,\ 4,\ -1)$$

D es el simétrico de *B* respecto de *M*. Así:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2+x_2}{2}=1 \quad \to \quad x_2=0 \\ \dfrac{-2+y_2}{2}=2 \quad \to \quad y_2=6 \\ \dfrac{3+z_2}{2}=-1 \quad \to \quad z_2=-5 \end{array}\right\} D=(0,\ 6,\ -5)$$

<u>EJERCICIO 30</u> : Calcula el valor de *a* para el cual los siguientes puntos están alineados: *A*(2, a, 0), *B*(6, 5, 2), *C*(8, 7, 3)

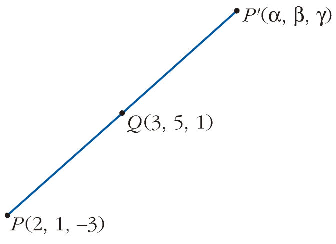
Solución:

Los puntos *A*, *B* y *C* están alineados siempre que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ tengan la misma dirección. Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{6-2}{8-6}=\frac{5-a}{7-5}=\frac{2-0}{3-2} \Rightarrow \frac{5-a}{2}=2 \quad \to \quad 5-a=4 \quad \to \quad a=1$$

<u>EJERCICIO 31</u> : Halla el simétrico, *P* ', del punto *P*(2, 1,-3) respecto de *Q*(3, 5, 1).

Solución:



Llamamos *P* '(α,β,γ),de manera que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2+\alpha}{2}=3 \quad \to \quad \alpha=4 \\ \dfrac{1+\beta}{2}=5 \quad \to \quad \beta=9 \\ \dfrac{-3+\gamma}{2}=1 \quad \to \quad \gamma=5 \end{array}\right\} P'(4,\ 9,\ 5)$$