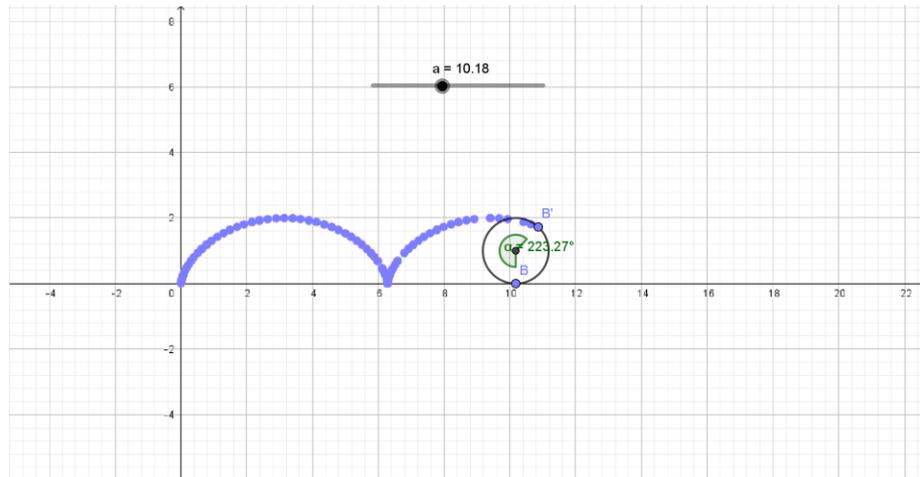




LA CICLOIDE

M^a Ángeles Hernández

CICLOIDE, RULETA O TROCOIDE



Rodadura sin deslizamiento

ANTECEDENTES

- Aristóteles de Estagira (384-322 a. C.) Paradoja: ¿2 puntos sobre el mismo radio de dos circunferencias concéntricas, recorren la misma longitud cuando la corona circular describe una vuelta?
- Tolomeo de Alejandría (II a. C.): consideró la Tierra como centro del Universo y supuso que cada planeta se movía en un círculo llamado epiciclo “sobre un círculo”, con centro de movimiento uniforme alrededor de la Tierra.
- Nicolás Copérnico (1473-1543): Consideró que el centro era el sol, pero mantuvo el movimiento epicicloidal de los planetas.
- Tycho Brahe: demostró la falsedad del movimiento epicicloidal de los planetas

HISTORIA

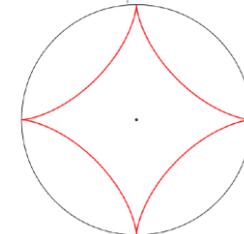
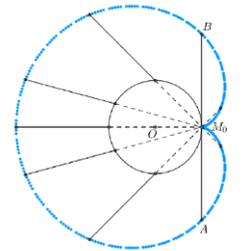
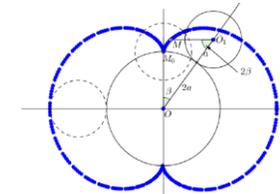
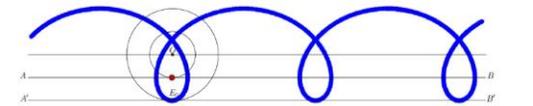
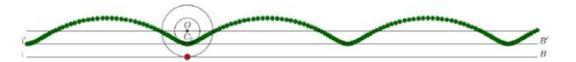
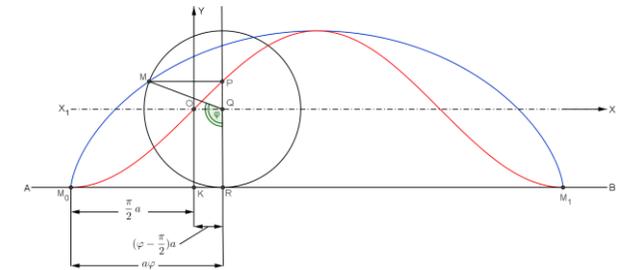
- Galileo-Galilei (1564-1642): Cicloide = “parecido a un círculo”
- Gilles de Roberval (1634): Puso nombre a la cicloide y calculó el área limitada por el arco y la base de la cicloide. $A = 3 * \pi * r^2$ (r = radio de la circunferencia)

PROPIEDADES DE LA CICLOIDE

- I. El ángulo entre la recta tangente a la cicloide (en cualquier punto) y la recta directriz es igual al ángulo complementario (hasta 90°) de la mitad del ángulo de giro del radio del círculo generador.
- II. El ángulo ente la normal a la cicloide (en cualquiera de sus puntos) y la recta directriz es igual a la mitad del “ángulo principal”
- III. 1º propiedad fundamental: Toda normal a la circunferencia pasa por el punto “inferior” del círculo generador.
- IV. 2º propiedad fundamental: La tangente a la cicloide pasa por el punto “superior” del círculo generador.
- V. El seno del ángulo formado por la tangente a la cicloide en el punto M y la vertical, es proporcional a la raíz cuadrada de la “altura” de M .
- VI. Dados una recta AB y un punto M , la única curva que cumple las condiciones del anterior teorema y pasa por el punto M es la cicloide.

CURVAS AFINES A LA CICLOIDE

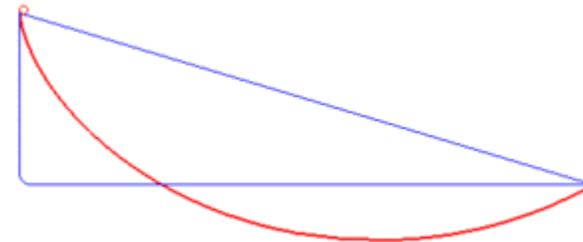
- Compañera de la cicloide: la senoide. Es la curva formada por la intersección entre el diámetro vertical de la circunferencia generatriz y el segmento perpendicular a dicho diámetro que pasa por el punto de la cicloide. (Área = $2 \cdot \pi \cdot r^2$)
- Cicloides acortadas y alargadas: Círculo que gira alrededor de una recta.
- Epicicloide: Círculo que gira exteriormente sobre otra circunferencia.
 - Cardioide: epicicloide donde los radios de las circunferencias son iguales.
 - Concoide de Nicomedes: Dada una curva o recta y un punto O exterior a ella. La concoide es el lugar geométrico de los extremos de los segmentos que parten de O y tales que los puntos de la curva o recta son sus puntos medios.
- Hipocicloide: Círculo que gira internamente sobre otra circunferencia.



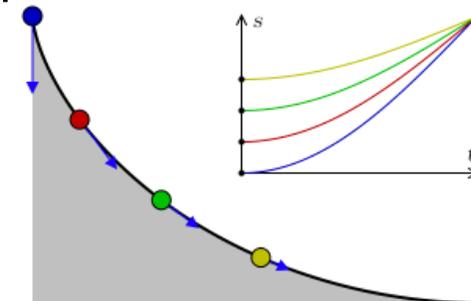
Astroide

APLICACIONES FÍSICAS DE LA CICLOIDE

Braquistócrona: “curva del tiempo más corto” Curva entre los puntos A y B situados a distintas alturas, de forma que la curva lleve de A a B, bajo el efecto de la gravedad, en el menor tiempo posible.



Tautócrona: “curva del mismo tiempo”. Curva por la que se mueve el centro de gravedad de un péndulo para que el periodo de oscilación no dependa de la amplitud.



[Vídeo: Braquistócrona-Tautócrona](#)

OTRAS APLICACIONES

Levas (elemento mecánico que permite la transformación de un movimiento circular a un movimiento rectilíneo mediante el contacto directo a un seguidor)

Engranajes

Péndulos

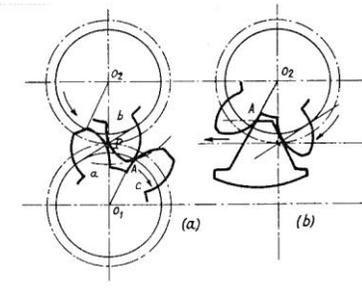
Toboganes: pistas de Skate y toboganes de evacuación en aviones.

Arquitectura: arcos cicloides en el tejado del Museo de Arte Kimbell de Louis Isadore Kahn.

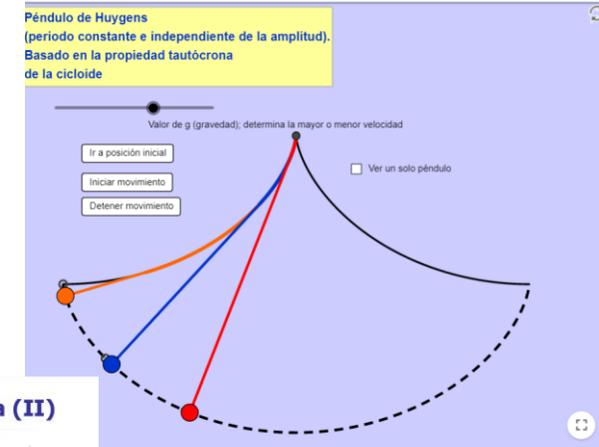
Cálculo Variacional.



Penetración e interferencia (II)



Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Ingeniería Mecánica



PRÁCTICA: EPICICLOIDES - HIPOCICLOIDES

E(1,2)

E(5,2)

E(5,3)

E(2,3)

Nefroide: E(12,6)

Cardioide: E(12,12)

H(5,2)

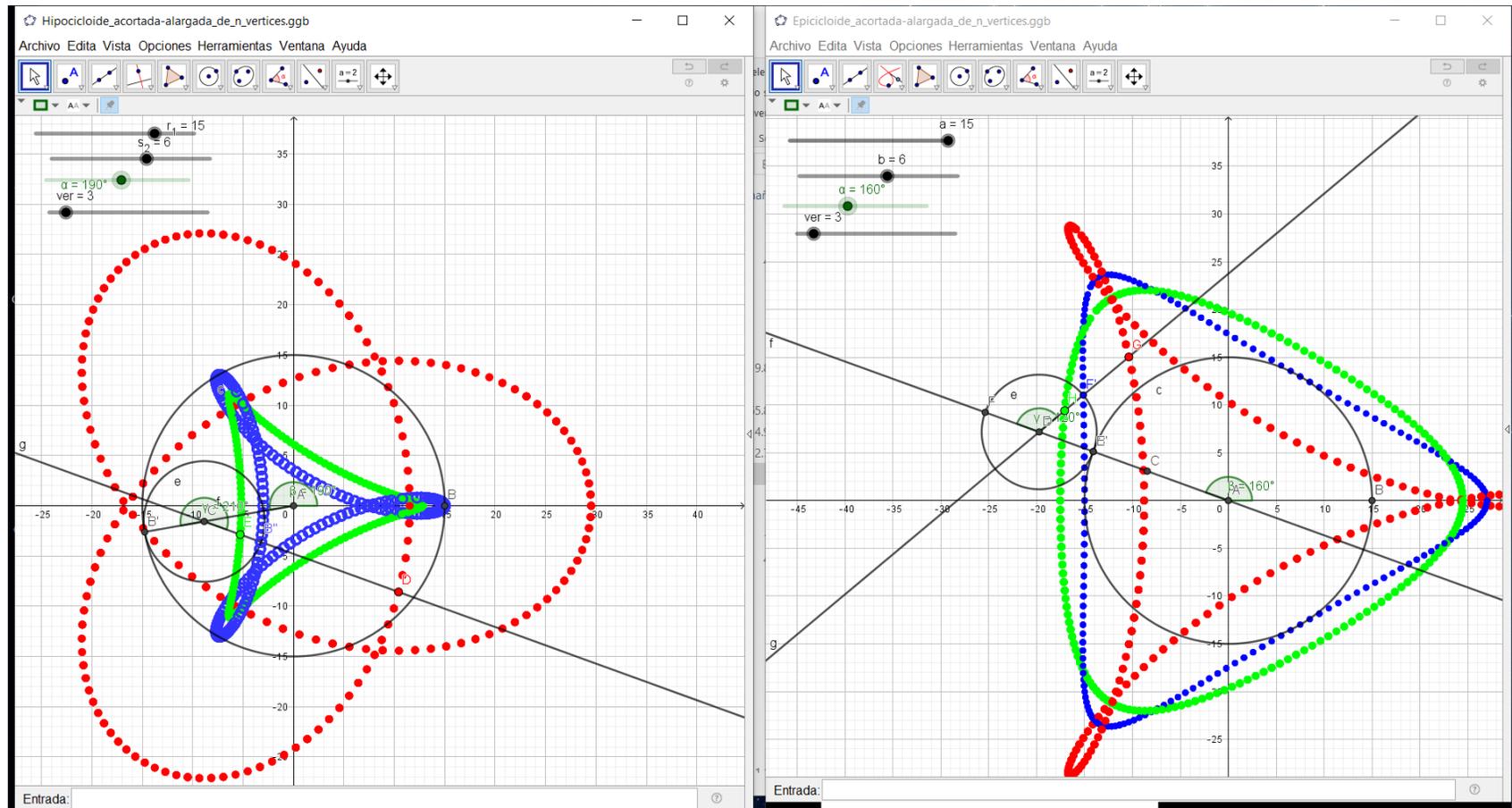
H(9,2)

Propiedades:

$H(a, b) = H(a, c)$ cuando $c = a - b$

$H(a, c) = E(a, b)$ cuando $c = a + b$

HIPOCICLOIDE-EPICICLOIDE (ACORTADA Y ALARGADA)



MEDIDAS DE LA CICLOIDE Y SUS CUERPOS DE REVOLUCIÓN

- Cuerpo de revolución generado por una cicloide que gira alrededor del segmento OX que la define. (Melón)
 - Volumen: $5\pi^2 * r^3$
 - Área: $(64/3)\pi * r^2$ (≈ 21 veces el área del círculo generador)
- Cuerpo de revolución generado por una cicloide que gira alrededor del eje OY exterior a él. (Rosquilla aplastada)
 - Volumen: $12\pi^3 * r^3$
 - Área: $32\pi^2 * r^2$ (≈ 100 veces el área del círculo generador)
- La longitud de un arco de cicloide: $8*r$
- Área bajo un arco de cicloide: $3\pi*r^2$ (3 círculos generadores)

