

Matemáticas “método Singapur”

Pedro Ramos Alonso
Facultad de Educación
Universidad de Alcalá
pedro.ramos@uah.es



+ ideas
- cuentas

<http://masideas-menoscuantas.com/>
@MsldeasMnosCtas

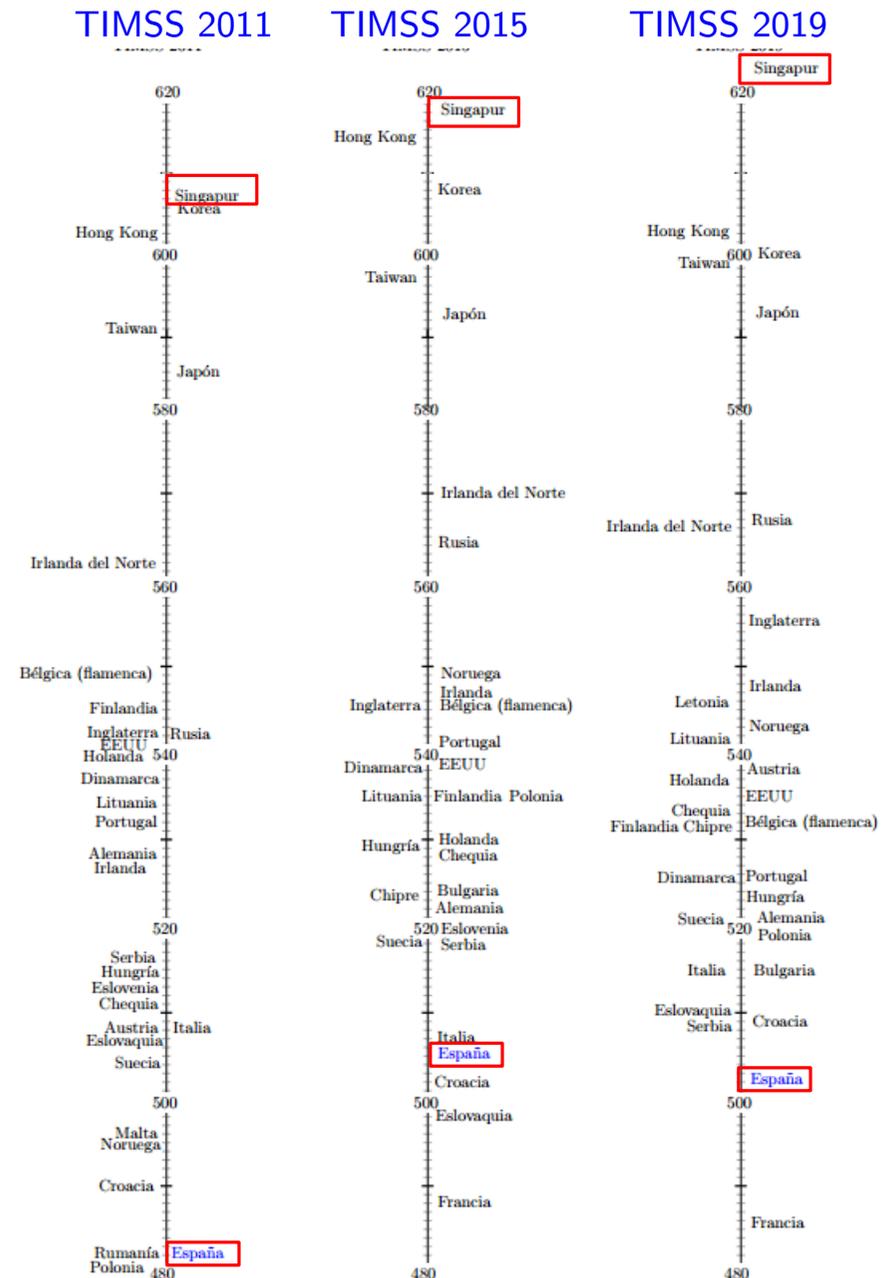
La situación actual en España

* ¿Estamos de acuerdo en que tenemos problemas?

* Información:

<https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/timss/timss-2019.html>

* ¿Tenemos un diagnóstico para origen de los problemas?



Un vídeo para reflexionar

- * Sobre la enseñanza de las matemáticas en Singapur en los años 70:

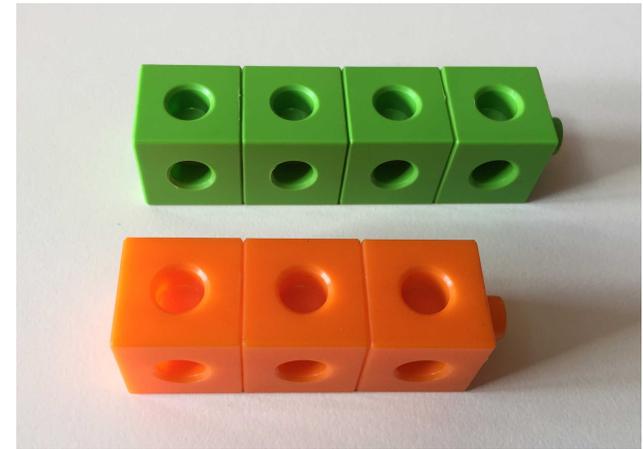
<https://youtu.be/3kxs5hOHpbo>

- * Sus errores:
 - ◇ Exceso de cálculos tediosos.
 - ◇ Aprendizaje rutinario de procedimientos, sin entenderlos.
 - ◇ Aprendizaje memorístico.
- * El desarrollo de lo que se conoce como “método Singapur” fue la respuesta.
- * Basado en ideas “clásicas” de la didáctica de las matemáticas occidental.

Fundamentos metodológicos

1 El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

(1)

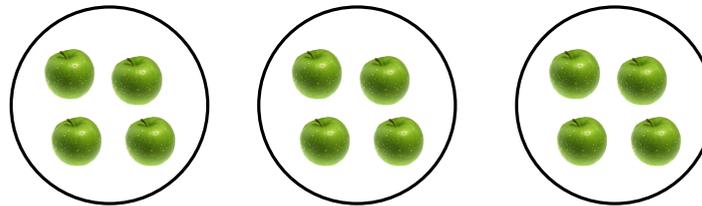


Concreta

Fundamentos metodológicos

1 El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

¿Cuántas manzanas hay?



(2) Pictórica (gráfica, visual)

Fundamentos metodológicos

1 El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

(3)

$$27 + 5 = 30 + 2 = \square$$

↓

$$3 + 2$$

$$4 \times 3 = 12$$

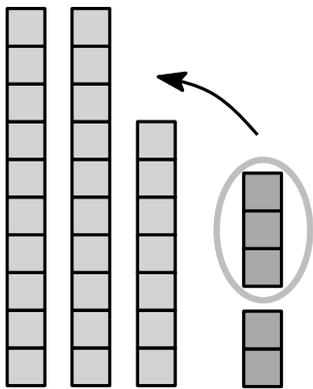
CPA

Abstracta (simbólica)

Fundamentos metodológicos

2 El aprendizaje de los procedimientos y la comprensión de los conceptos **deben trabajarse en paralelo.**

Richard Skemp: Relational understanding and instrumental understanding (1976)



$$27 + 5 = 30 + 2 = \square$$

↓

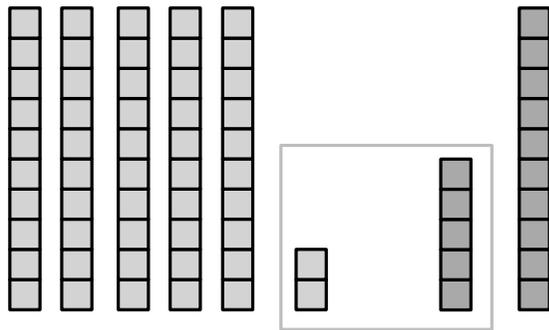
$$3 + 2$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 27 \\ + 5 \\ \hline 32 \end{array}$$

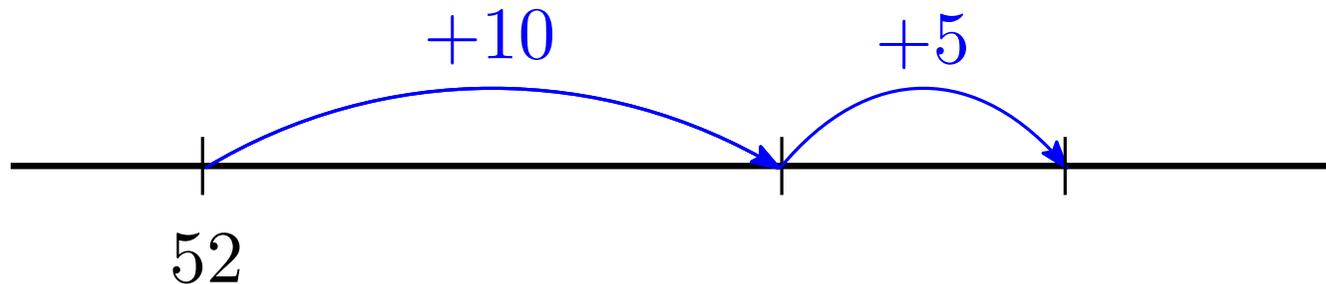
Fundamentos metodológicos

3 Variedad en las presentaciones (Zoltan Dienes)

La comprensión de un concepto es mejor si se presenta desde **distintos puntos de vista.**



$$52 + 15 = \square$$



Fundamentos metodológicos

4 El andamiaje y la zona de desarrollo próximo (Vygotsky)

En lugar de ir diciendo al alumno “esto se hace así”, se le proponen actividades que estén en su zona de desarrollo próximo.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{\square}{6} + \frac{\square}{6} = \frac{\square}{6}$$

Fundamentos metodológicos (resumen)

- ◇ El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)
- ◇ El aprendizaje de procedimientos y la comprensión de los conceptos deben ir en paralelo (Richard Skemp)
- ◇ La importancia de la variedad en las presentaciones (Zoltan Dienes)
- ◇ El andamiaje y la zona de desarrollo próximo (Lev Vygotski)

Y un elemento adicional:

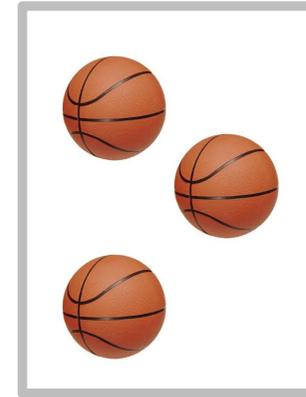
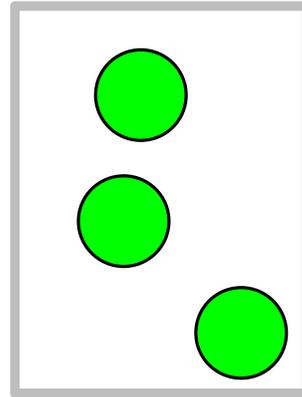
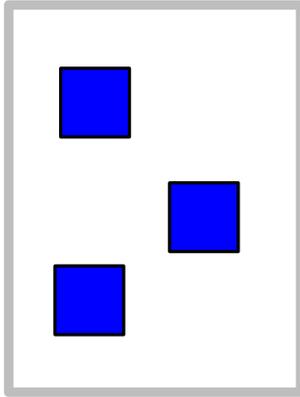
- ◇ La importancia de la **verbalización**.

Los inicios con los números

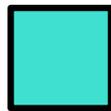
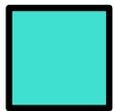
- * En este curso nos vamos a centrar en los inicios con la **aritmética** y en la **resolución de problemas**.
- * ¿Cuál es (o debería ser) el objetivo fundamental de aprendizaje (sobre números) durante la **educación infantil**?
- * El desarrollo del **sentido numérico**.
- * ¿Qué es el número **tres**?

- * La lectoescritura de los números requiere cierto trabajo (que no tiene contenido matemático).
- * Dedemos **aprender a contar** (memorizar la secuencia numérica) dotando a la actividad de **significado**.

Los inicios con los números - El sentido numérico

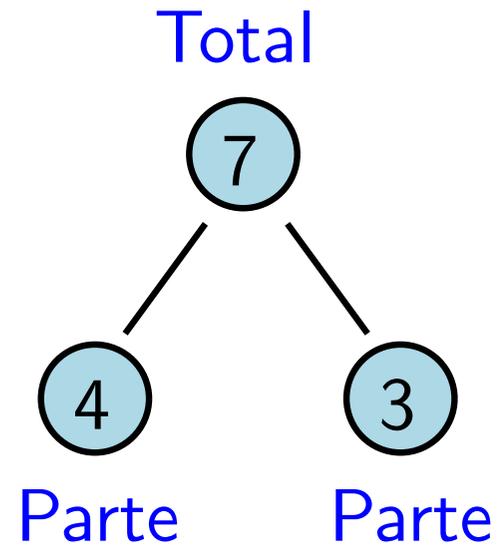
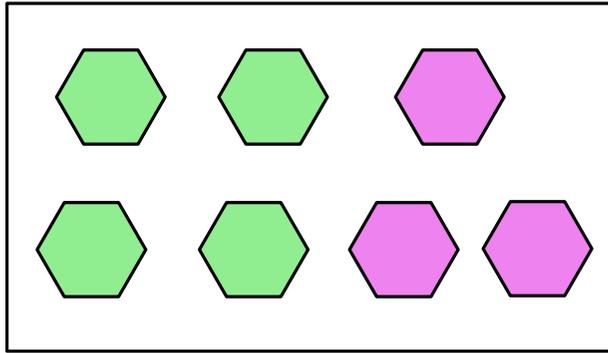


- * El concepto de **tres** es “lo que tienen en común” estos conjuntos.
- * Una dificultad de aprendizaje común en las primeras etapas: asignar el “tres” al tercer elemento, en lugar de al cardinal del conjunto.



¿cómo evitarla?

Los números conectados



“number bonds”

cuatro y tres son siete

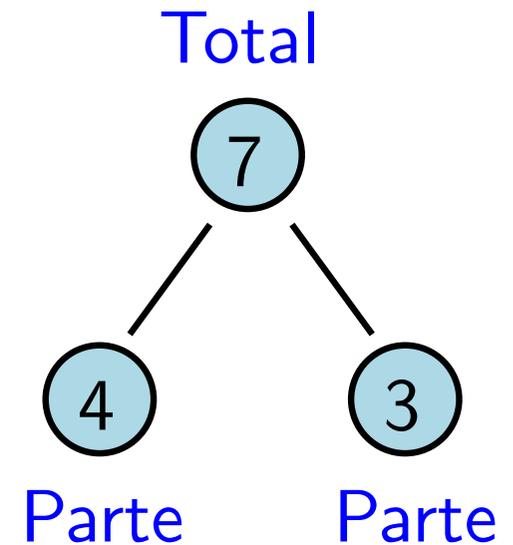
(esto debería ser **previo a la suma**)

Números conectados y policubos



Herramienta virtual (gratuita)

<https://www.didax.com/apps/unifix/>

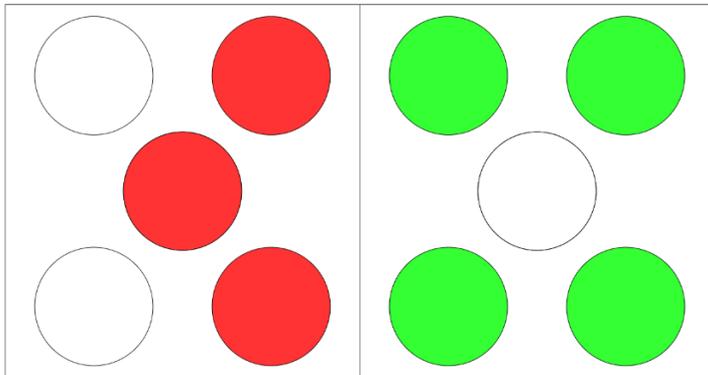
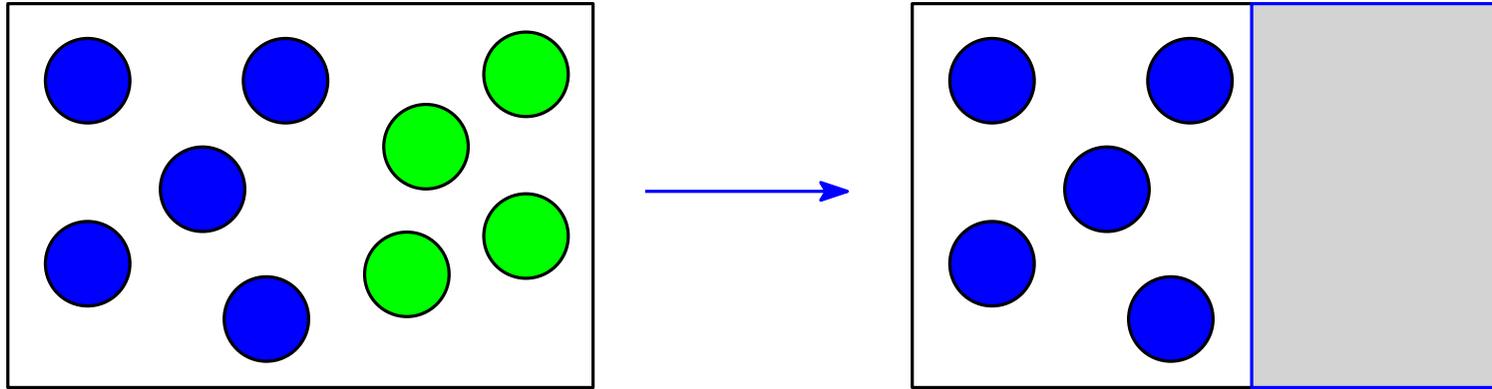


Regletas



Descomposiciones numéricas

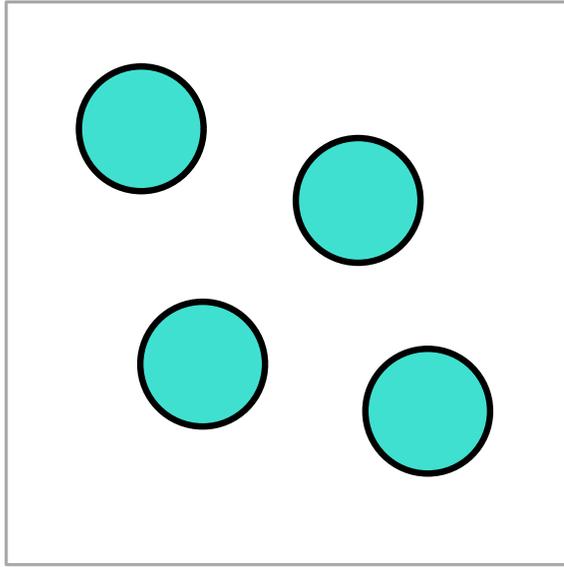
- * Muy importante trabajarlas en profundidad.



Rejilla húngara

<https://mathsbot.com/manipulatives/hungarianFrame>

La subitización

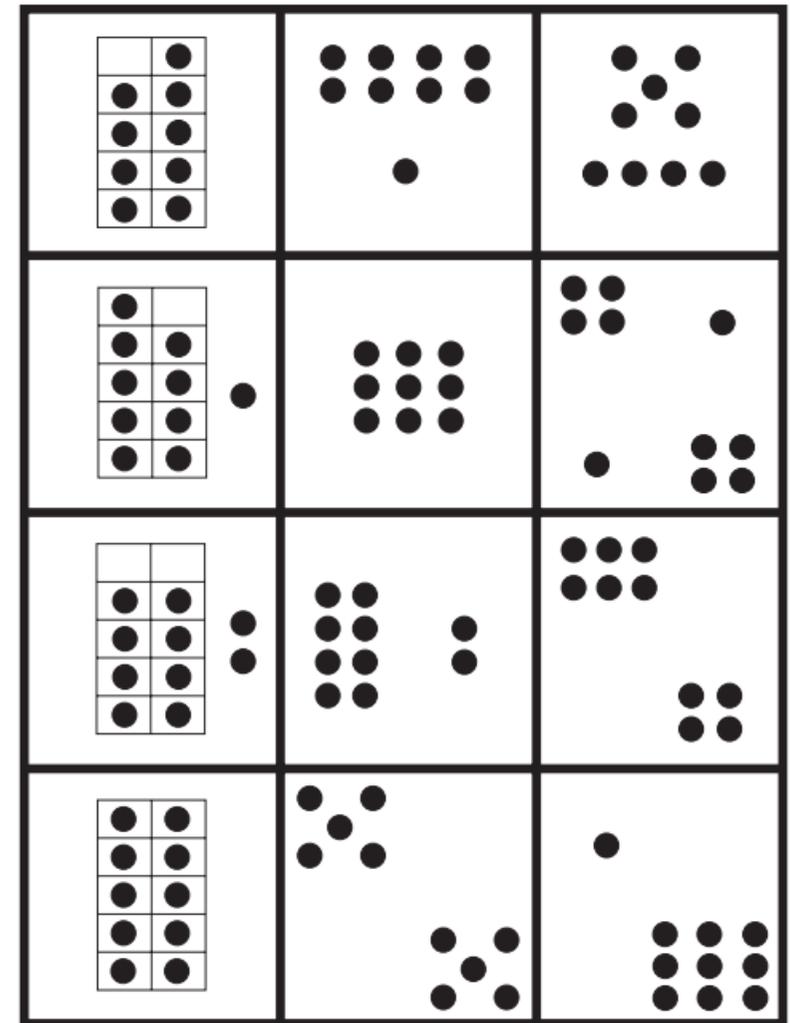
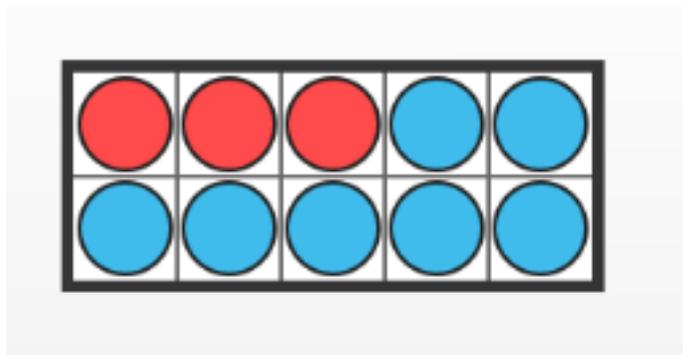
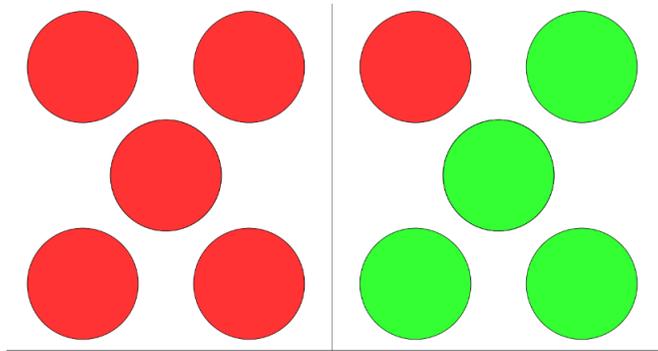


“contar sin contar”

- * Es una habilidad que conviene trabajar (con actividades adecuadas a la madurez de los alumnos, por supuesto).
- * También puede ayudar para trabajar la **descomposición** de los números.

Descomposiciones del 10

- * Serán especialmente importantes cuando los números crezcan.



Tarjetas de puntos

<https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps>

BLM 5
Dot Cards (c)

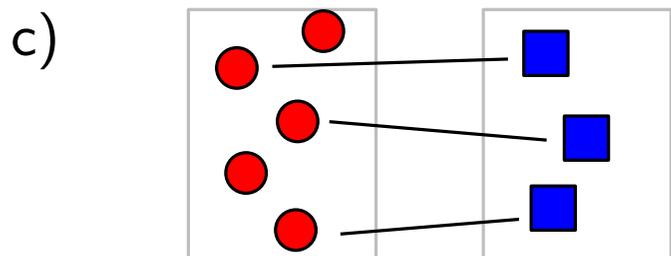
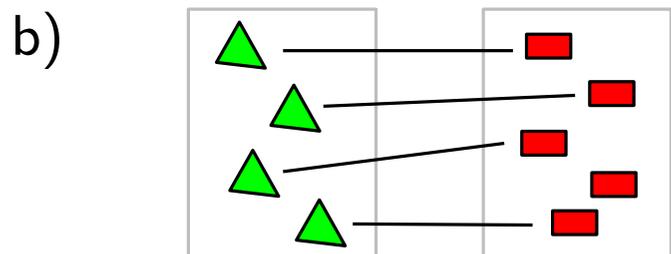
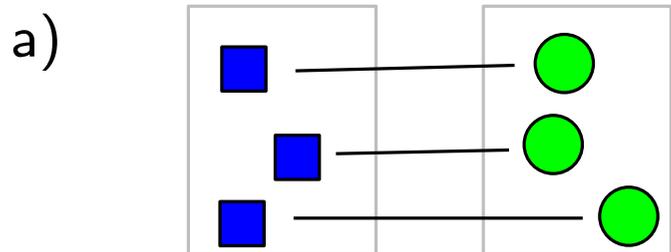
Copyright © 2014 Pearson Education, Inc. All rights reserved.

Pedro Ramos. Matemáticas Singapur.

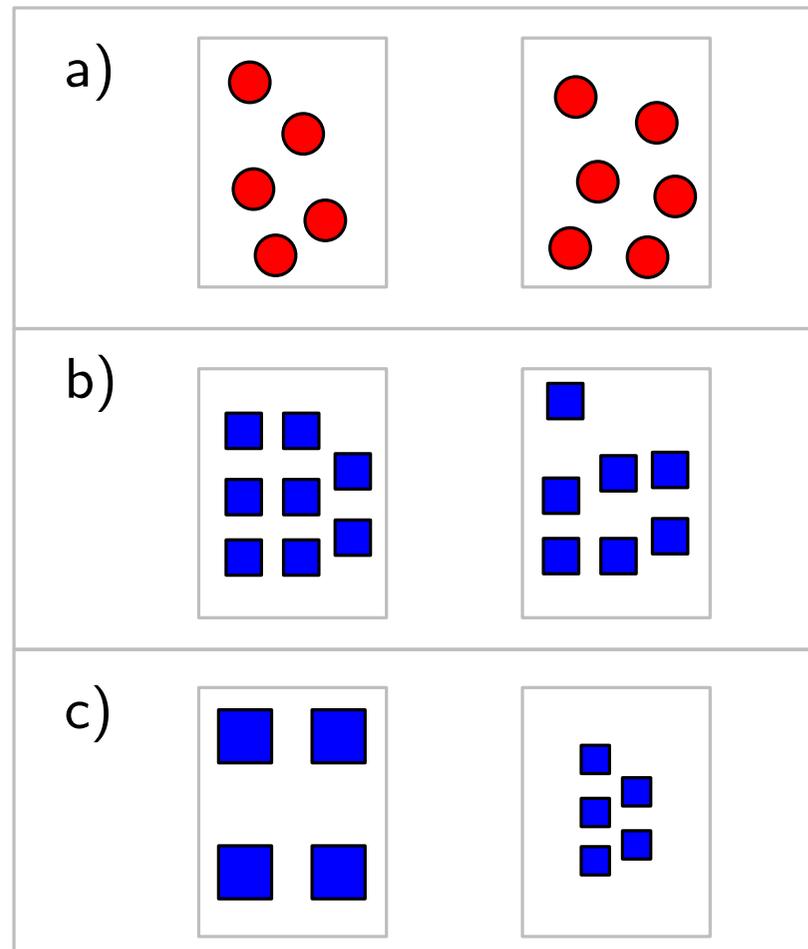
Comparar conjuntos

* Importante para el desarrollo del sentido numérico.

1 ¿Hay los mismos?



2 ¿Dónde hay más?



Materiales



policubos
cubos encajables

Formas de sumar

1. Sumar contando.

a) contar todo.

b) contar desde un sumando – el mayor.

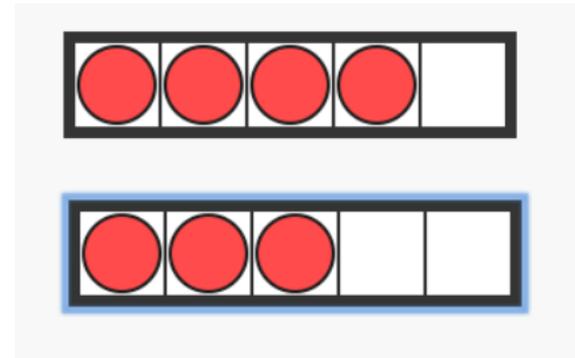
2. Sumar sin contar.

Fundamental desarrollar estrategias antes de empezar con el algoritmo tradicional.

Hay que trabajarlo de forma gradual, primero hasta el 10.

Estrategias de iniciación a la suma

- * Rejillas numéricas (grupos de 5).



- * Otras estrategias: usar los dobles, la compensación ...
- * El uso de materiales es fundamental.

$$4 + 5 = 4 + 4 + 1 =$$

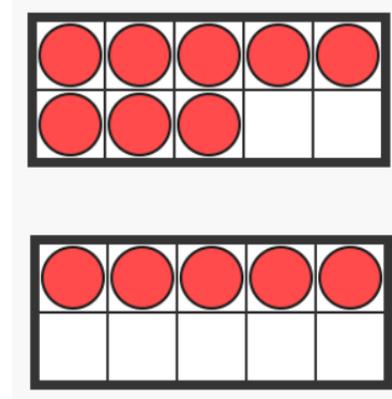
$$5 + 3 = 4 + 4 =$$

Actividad: suma de dos números de una cifra

- * Piensa diferentes estrategias para calcular $8 + 5$.

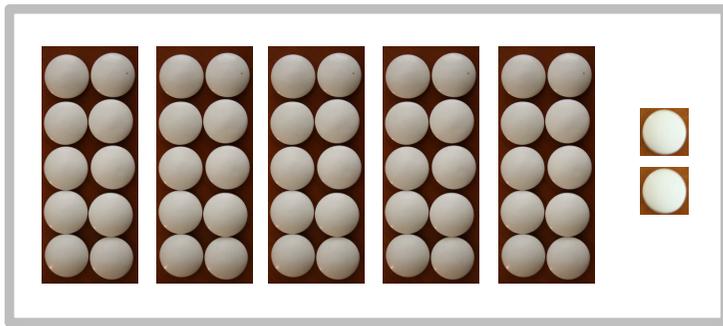
$$8 + 5 = \text{“diez y tres”}$$

<https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps>

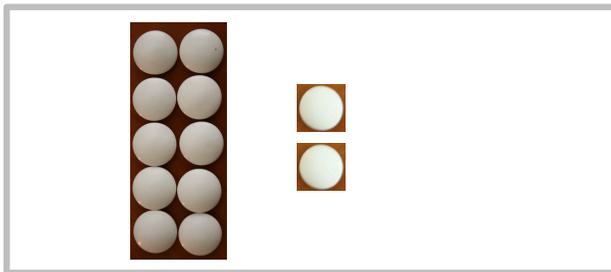


El número de dos cifras

- * Enfoque “tradicional”: ábaco y fichas de colores
- * Alternativa: hacemos grupos de diez.
Los materiales, de nuevo fundamentales.



_____ decenas y _____ unidades



12

diez y dos
se escribe **doce**

El número de dos cifras

- * Bloques de base 10



- * Una alternativa online:
<https://apps.mathlearningcenter.org/number-pieces/>

Algoritmos de la suma

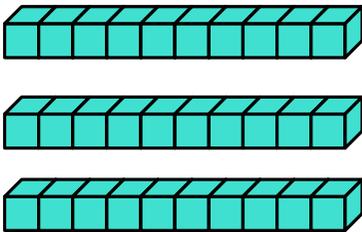
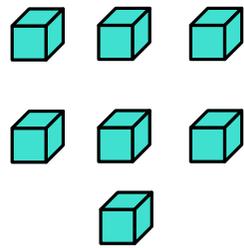
- * ¿Qué algoritmos para la suma son útiles si creemos que el aprendizaje de los procedimientos y la comprensión de los conceptos deben trabajarse en paralelo?
- * Primero, lo que no me parece una buena alternativa.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 574 \\ + 369 \\ \hline 943 \end{array}$$

Algoritmos de la suma

- * Hay formas muy distintas de presentar el “algoritmo tradicional” .

Tabla de valor posicional

decenas	unidades
dieces	unos
	

37

Actividad

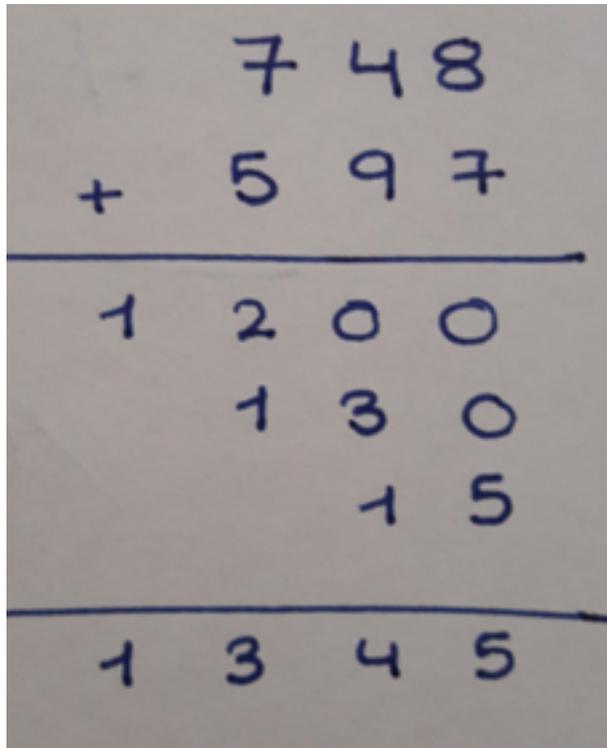
- * Utiliza los **bloques de base 10** para representar estos números, y calcula estas sumas, haciendo con los materiales los **reagrupamientos** (llevadas) necesarios.

$$\begin{array}{r} 47 \\ +25 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 363 \\ +174 \\ \hline \end{array}$$

Algoritmos de la suma

- * Y hay algoritmos “alternativos”:



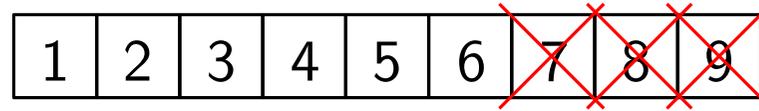
36 + 43		
	Quedan	Suma
	36	43
6	30	49
1	29	50
9	20	59
20	0	79

ABN

- * Temas para la reflexión: ¿ventajas e inconvenientes? ¿Es necesario el estudio de un algoritmo “formal”?

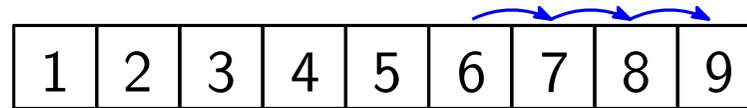
La resta

“De 9 quitamos 3”



$$9 - 3 = \square$$

“Del 6 al 9 van ...”



$$9 - 6 = \square$$

* Hay que trabajar los dos significados.

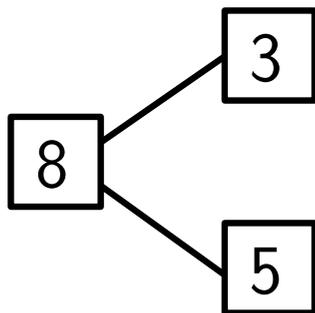
Formas de restar

1. Restar contando.
 - a) restar quitando.
 - b) contar desde el menor.

2. Restar sin contar.

Fundamental desarrollar estrategias antes de empezar con el algoritmo tradicional.

- * La conexión con la suma es fundamental.
- * Los números conectados son una herramienta muy útil.



$$3 + 5 = 8$$

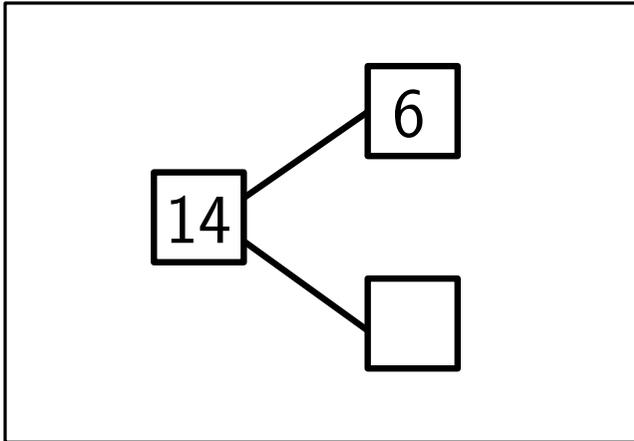
$$8 - 5 = 3$$

$$5 + 3 = 8$$

$$8 - 3 = 5$$

Actividad

- * Piensa estrategias para calcular $14 - 6$ (sin contar).



$$14 - 6 =$$

A diagram showing the equation $14 - 6 =$ followed by a blank line. Two arrows point downwards from the 6 to the numbers 4 and 2.

“Quitar de 10”

$$14 - 6 =$$

A diagram showing the equation $14 - 6 =$ followed by a blank line. Two arrows point downwards from the 6 to the numbers 4 and 10.

$$10 - 6 = 4$$

$$4 + 4 = 8$$

Algoritmos para la resta

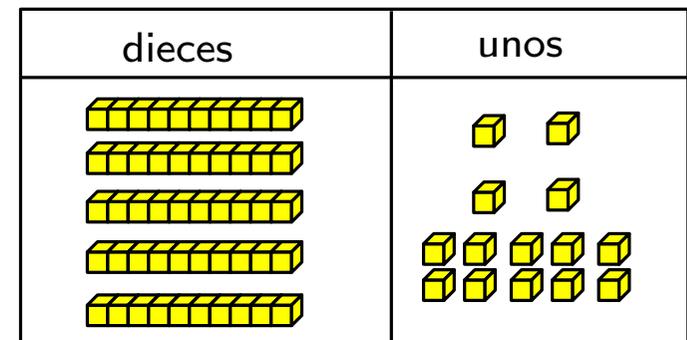
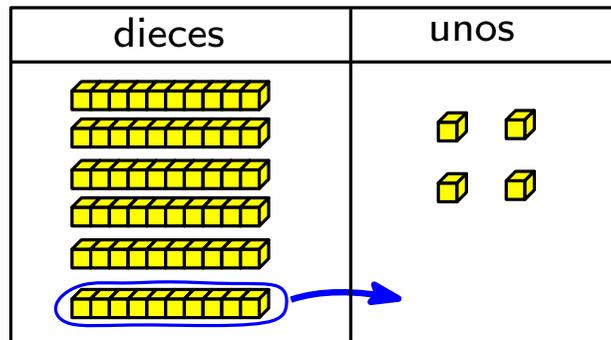
El algoritmo tradicional
(en España)

$$\begin{array}{r} 64 \\ - 48 \\ \hline 16 \end{array}$$

* Una alternativa (ya bastante extendida en nuestras aulas):

$$\begin{array}{r} 64 \\ - 48 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \quad 14 \\ \cancel{6} \quad \cancel{4} \\ - 4 \quad 8 \\ \hline \end{array}$$



* Restamos quitando → solo representamos el minuendo.

Actividad

- * Utiliza los bloques de base 10 para calcular estas restas, haciendo con los materiales los reagrupamientos necesarios.

$$\begin{array}{r} 53 \\ - 18 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 403 \\ - 137 \\ \hline \end{array}$$

¿Algoritmos alternativos?

- * ¿Existe para la resta un análogo de este algoritmo para la suma?

$$\begin{array}{r}
 748 \\
 + 597 \\
 \hline
 1345 \\
 \hline
 \end{array}$$

- * Algoritmo ABN para la resta.

437 - 248		
Quito	Quedan	Restan
8	240	429
29	211	400
100	111	300
11	100	289
100	0	189

437 - 248	
Pongo	Tengo
12	260
100	360
40	400
30	430
7	437

¿Y el “cálculo mental”? (Cálculo razonado)

- * Los números conectados y la recta numérica vacía son excelentes herramientas para desarrollar estrategias de cálculo flexible.
- * Piensa diferentes estrategias para calcular:
 - a) $123 + 45$
 - b) $98 + 137$
 - c) $145 - 28$
 - d) $203 - 106$

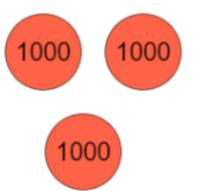
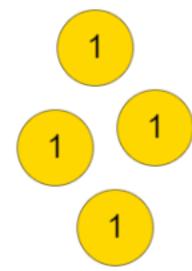
En 3.º, el grupo de mil

- * Representar los números de 4 cifras con los bloques de base 10 empieza a ser poco manejable.

Es prematuro prescindir de un apoyo en la representación (al menos para algunos alumnos).



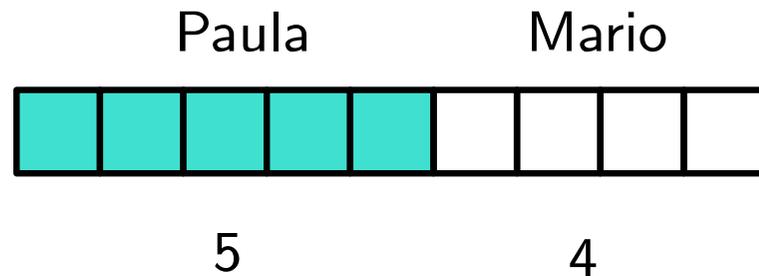
- * Las **fichas numéricas** (number disks) son una buena alternativa.

1000s	100s	10s	1s
			

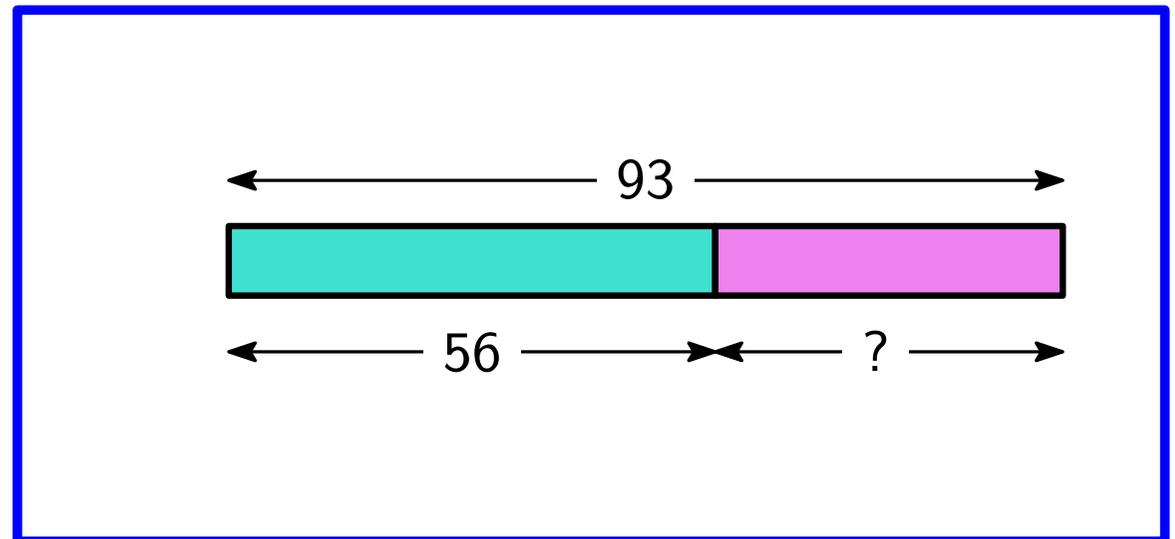
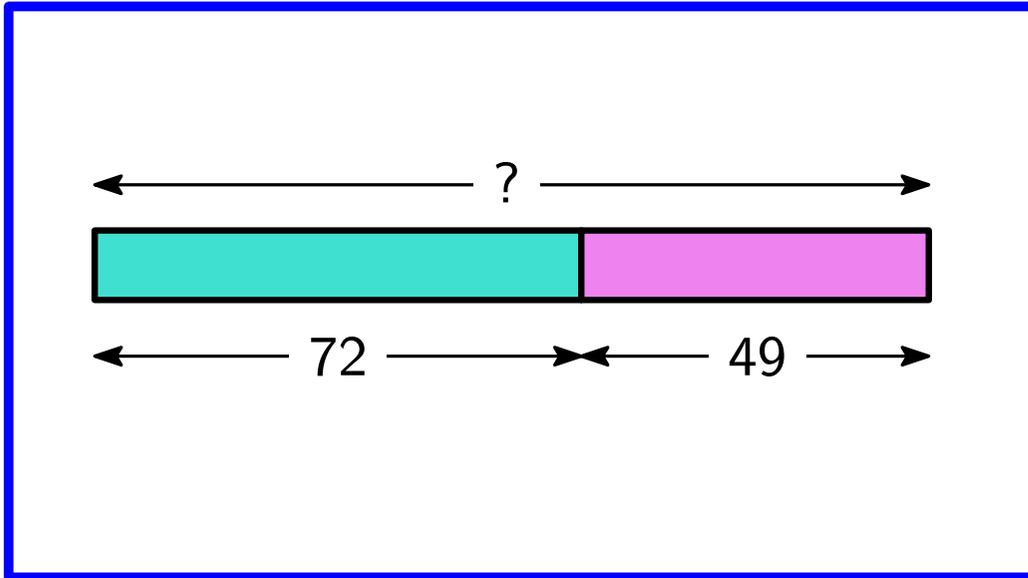
<https://mathsbot.com/manipulatives/placeValueCounters>

Resolución de problemas

- * Y este problema ... ¿es de sumar o de restar?
- * Una herramienta muy útil: [el modelo de barras](#).



Partes - Total



Observaciones

- * Para que el modelo sea efectivo hay que introducirlo y trabajarlo adecuadamente.
- * En el paso de representar 15 unidades explícitamente a representarlas con una barra hay una abstracción a la que hay que prestar la atención necesaria.
- * En este modelo el alumno se centra en las relaciones, no en los objetos ni en las cantidades descontextualizadas.
- * Los objetos son representados mediante rectángulos, un rectángulo es un objeto fácil de dibujar, de dividir. Útil para representar números más grandes y mostrar relaciones de proporcionalidad.

Problemas

1. Un pastelero ha hecho 35 bollos rellenos de chocolate, y también ha hecho bollos rellenos de crema. Sabemos que ha hecho 19 bollos de chocolate más que bollos de crema.
 - a) ¿Cuántos bollos de crema ha hecho el pastelero?
 - b) ¿Cuántos bollos ha hecho en total?

2. Jaime tiene 15 euros más que Lucía y entre los dos tienen 97 euros. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

2. Jaime tiene 15 euros más que Lucía y entre los dos tienen 97 euros. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Problemas

1. Luis tiene 316 euros y su amiga Marta tiene 488 euros. ¿Cuánto tiene que darle Marta a Luis para que los dos se queden con la misma cantidad de dinero?
2. Tengo 765 euros y quiero repartirlos entre Alicia y Benito, de manera que Alicia reciba el doble que Benito. ¿Cuánto dinero recibirá cada uno?
3. Lisa tiene 128 euros y Pablo tiene 97 euros. Se compraron dos abrigos iguales, y después de pagar Lisa tenía el doble de dinero que Pablo. ¿Cuánto les costó el abrigo?
4. Marta tiene el doble de dinero que Pablo, y Juan tiene 13 euros menos que Marta. Si entre los tres tienen 192 euros, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

* Curso introductorio al modelo de barras (en abierto):
<https://sites.google.com/view/modelodebarras/home>

Dificultades en la resolución de problemas

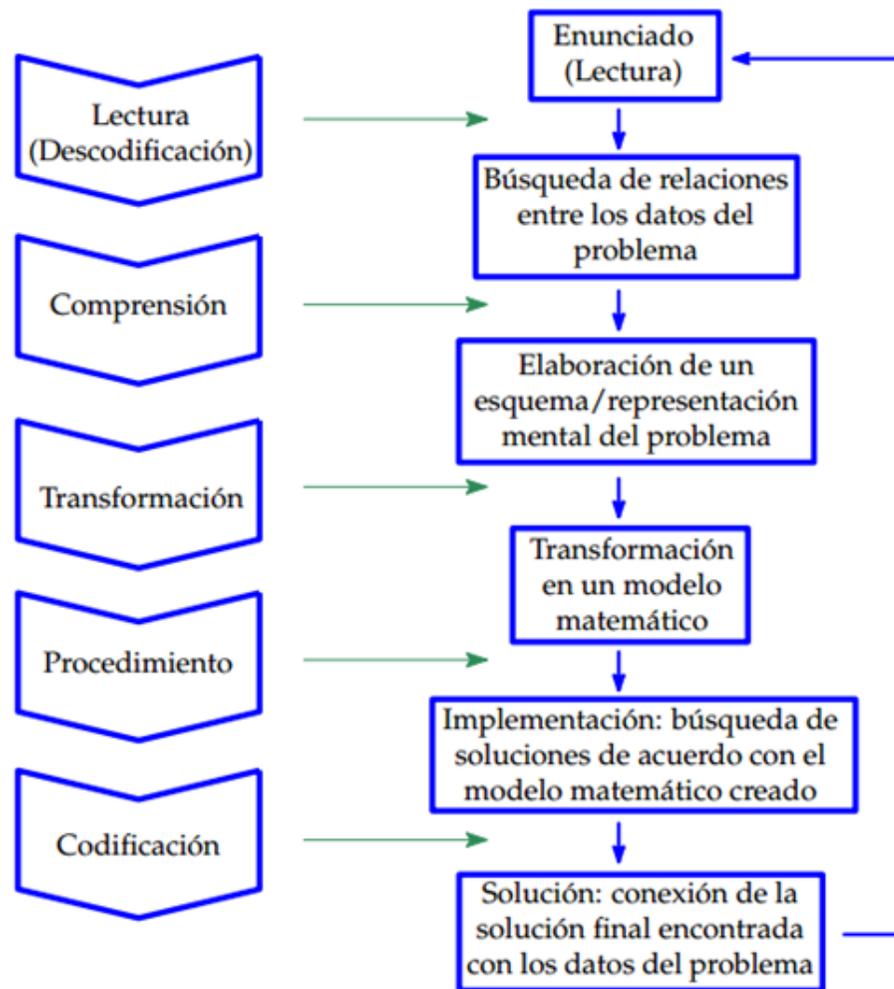


Figura 2.2: Jerarquía de errores de Newman integrada con las fases de resolución de problemas.

Arántzazu Fraile Rey: El desarrollo de actitudes valiosas para la resolución de problemas en Educación Primaria. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá