

Matemáticas “metodología Singapur”

Fracciones

Pedro Ramos Alonso
Facultad de Educación
Universidad de Alcalá
`pedro.ramos@uah.es`



<http://masideas-menoscuentas.com/>
@MsIdeasMnosCtas

Las fracciones: un objeto, varias interpretaciones

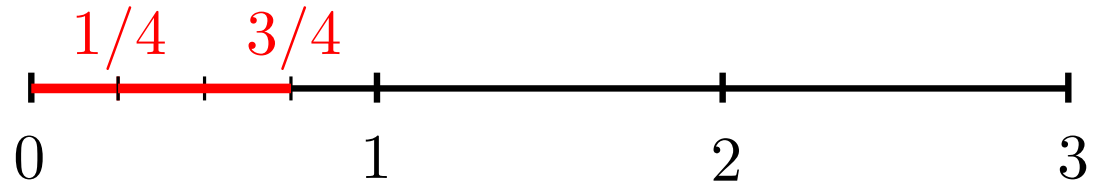
(1) Parte de un todo



Hemos coloreado los $\frac{3}{5}$ de ...

(2) Una **cantidad**, una **medida**
(un número, un punto de la recta numérica)

¿ $\frac{3}{4}$?

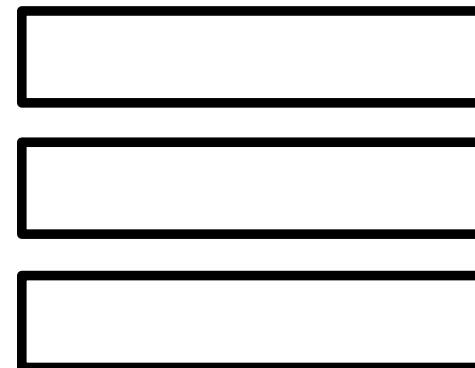


El denominador fija la unidad

El numerador, cuántas unidades tomo

(3) Un reparto (división)

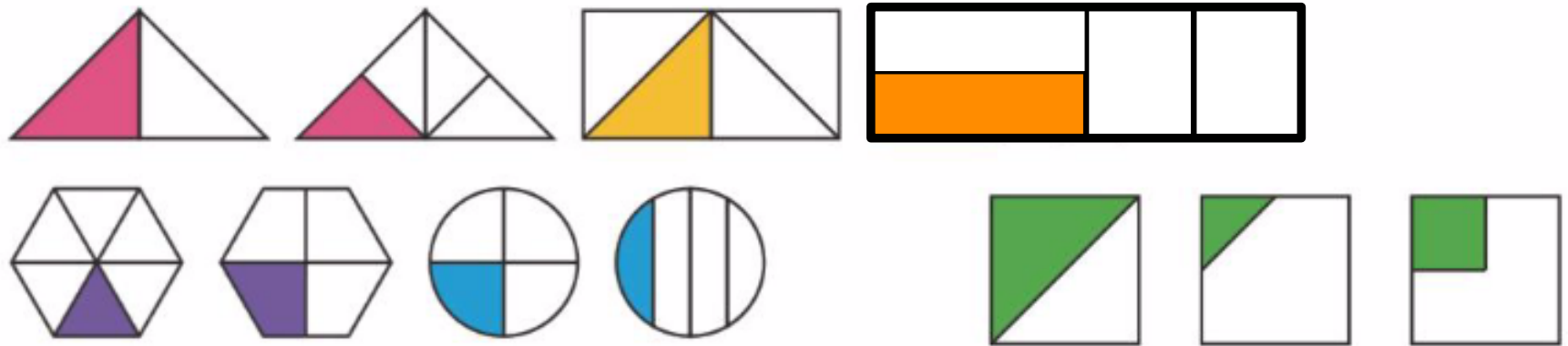
Queremos repartir 3
chocolatinas entre 5 niños.
¿A cuánto toca cada uno?



Importante en el aula

- * Para entender un nuevo concepto, es importante ver ejemplos positivos y negativos.

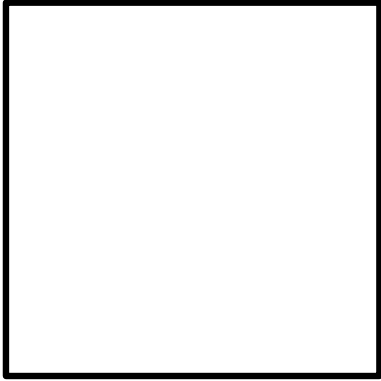
1 ¿Qué figuras están divididas en cuartos?



3 ¿Qué figuras representan $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{4}$? Rodea con diferentes colores.



Una actividad



1. Organizamos a los alumnos en grupos.
2. Repartimos hojas en forma de cuadrado.
3. Pedimos que dividan cada papel en 4 trozos iguales, y que busquen todas las soluciones distintas que puedan.

Algunos ejemplos

- * He comido $\frac{1}{3}$ de los bombones de una caja y me quedan 12 bombones. ¿Cuántos bombones tenía la caja?



12 bombones

- * Lucía tenía la misma cantidad de cuentas rojas que azules. Usó $\frac{3}{4}$ de sus cuentas rojas y la mitad de sus cuentas azules para hacer un collar. ¿Qué fracción del total de sus cuentas ha usado para hacer el collar?

Definición de fracción

- * Una **fracción** es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

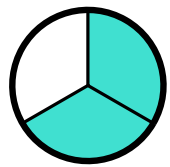
numerador

denominador

no es un
número

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

$$1 \text{ medio} + 1 \text{ tercio} =$$



$2/3$



Parte de un todo



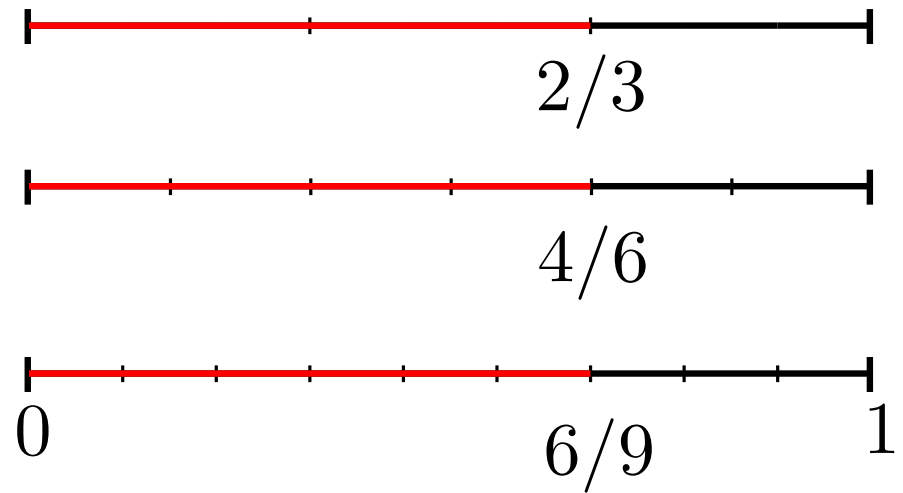
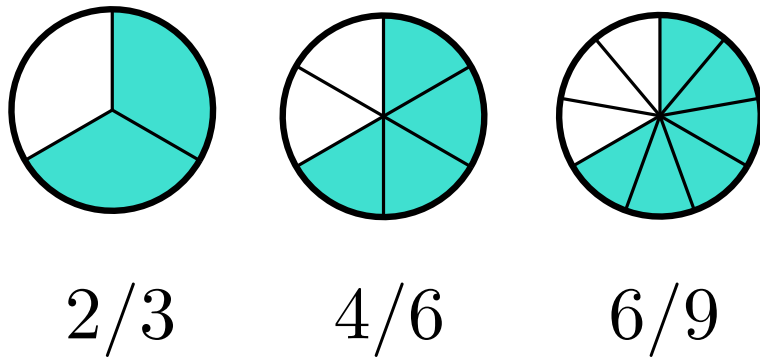
Punto de la recta numérica

- * Las dos interpretaciones son necesarias.
Lo más conveniente es empezar por la primera interpretación, e introducir la segunda en cursos posteriores.

Fracciones equivalentes

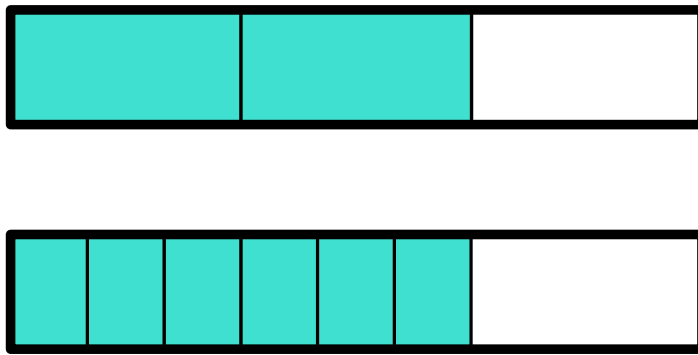
- * Las fracciones $2/3$, $4/6$, $6/9$, ... representan la misma cantidad.

Diremos que son fracciones equivalentes.



Fracciones equivalentes

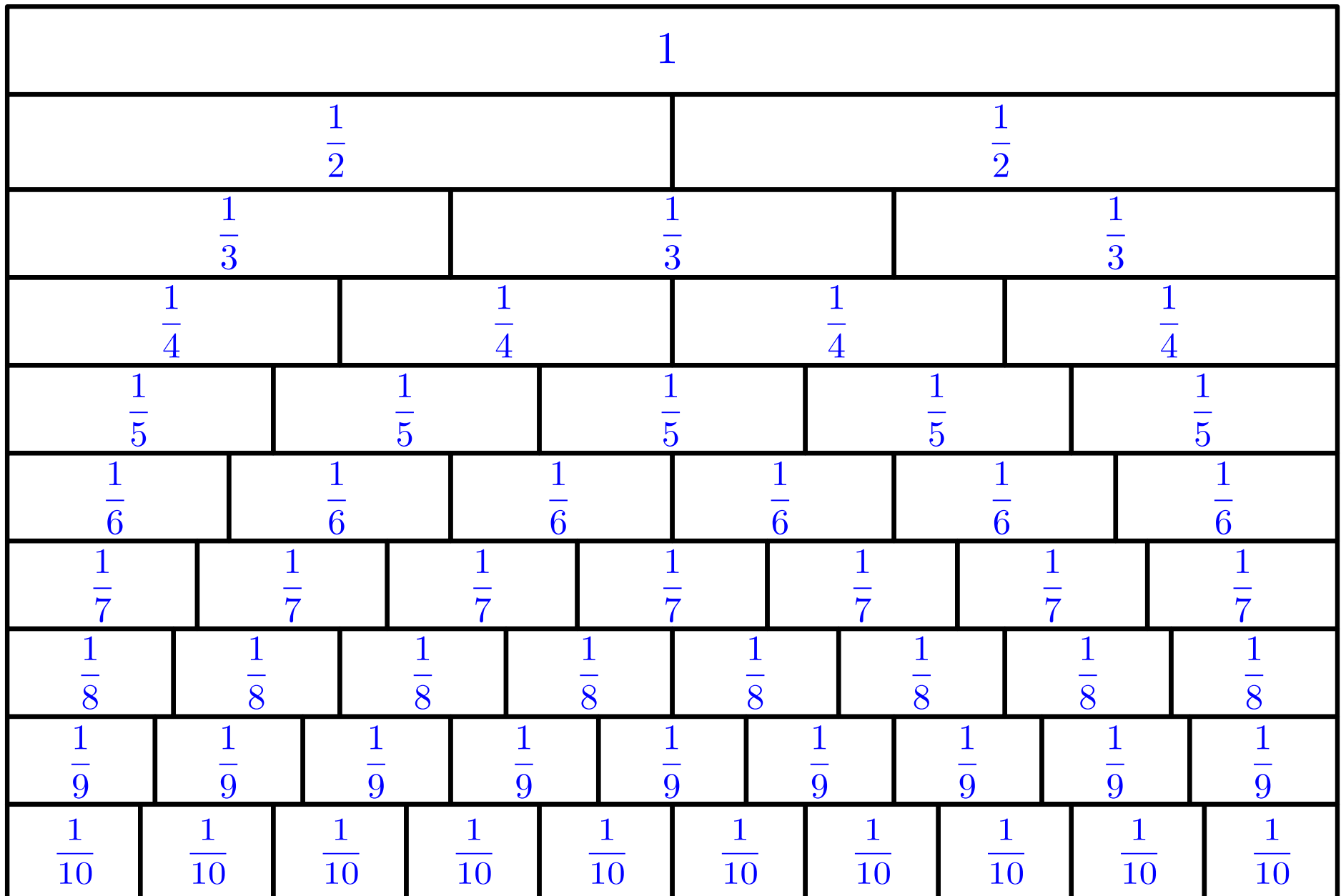
- * Es un concepto básico, y es fundamental que se entienda bien.



$$\frac{\times 3}{\times 3} \quad \curvearrowright \quad \frac{2}{3} \quad \curvearrowright \quad \frac{: 3}{: 3}$$
$$\frac{6}{9}$$

- * Una herramienta muy útil: el **muro de fracciones**.

Muro de fracciones



Propuestas de actividades

* Fracciones equivalentes: $\frac{2}{3} =$

* Comparación de fracciones: $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$

* Suma de fracciones: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$

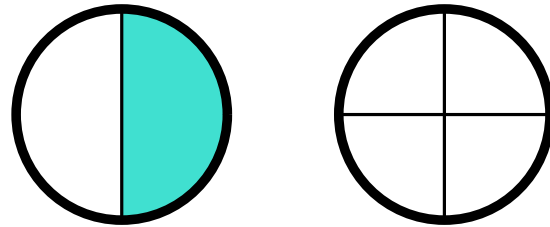
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

* Descomposición egipcia: $\frac{3}{5} = \frac{1}{\boxed{}} + \frac{1}{\boxed{}}$

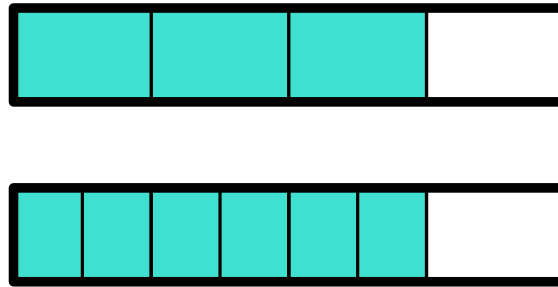
<https://toytheater.com/fraction-strips/>

Propuestas de ejercicios

$$\frac{1}{2} = \frac{\boxed{}}{4}$$



$$\frac{3}{4} = \frac{6}{\boxed{}}$$



$$\frac{2}{6} = \frac{1}{\boxed{}}$$

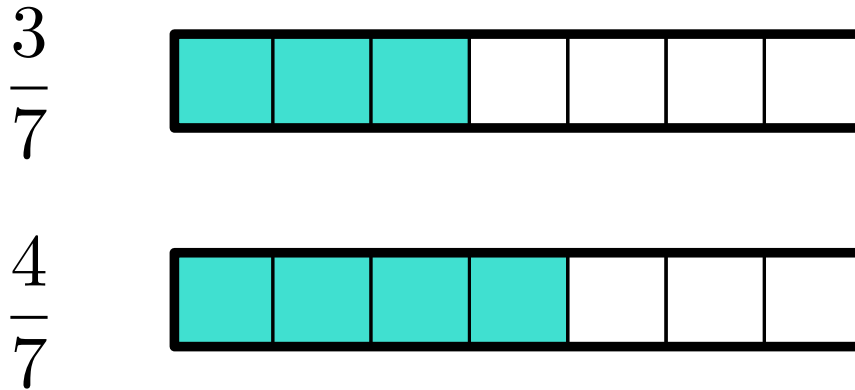


Comparación de fracciones

- * Muy relacionada con la equivalencia.

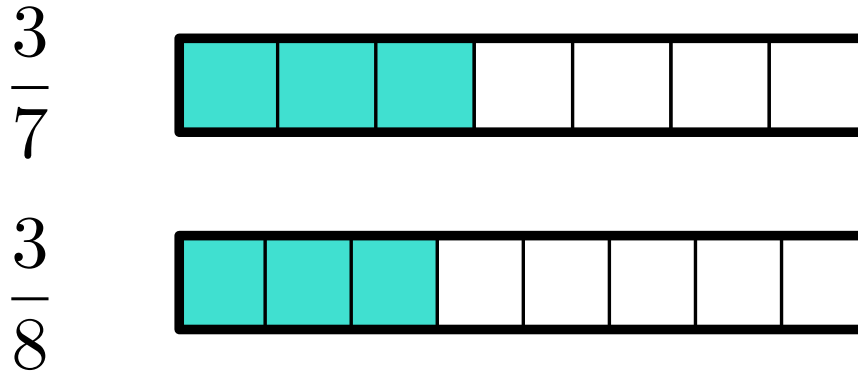
Si queremos que los alumnos comprendan, y no que memoricen, hay que huir de “recetas” y comparar usando **representaciones gráficas** (o físicas).

- * El caso más sencillo: **mismo denominador**.



Comparación de fracciones

- * Siguiente paso: mismo numerador.



- * Después: comparación con una fracción conocida:

a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$

b) $\frac{7}{8}$ y $\frac{8}{9}$

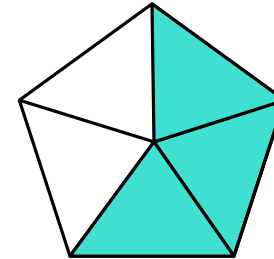
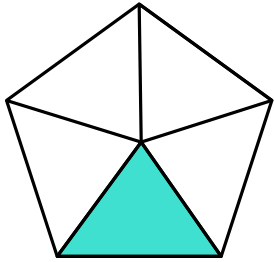
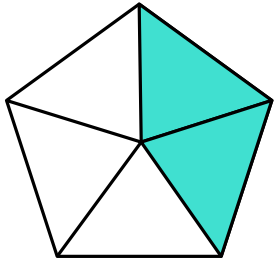
- * Busca un razonamiento para el caso b) que se puede generalizar, por ejemplo, para comparar $\frac{15}{16}$ y $\frac{22}{23}$.

Fracciones equivalentes: caso general

- * ¿Son equivalentes las fracciones $\frac{8}{14}$ y $\frac{12}{21}$?
- * ¿Cómo podemos comparar $\frac{7}{12}$ y $\frac{13}{23}$?
- * ¿Son actividades adecuadas para primaria?

Suma de fracciones

- * Un posible problema del enfoque más extendido:



$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

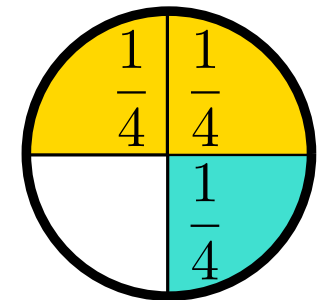
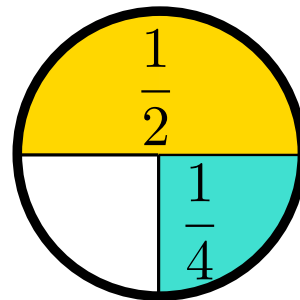
Suma de fracciones

- * En lugar de “dar la receta”, ayudar a dar pasos hacia ella.
(Zona de desarrollo próximo – Vygotsky)

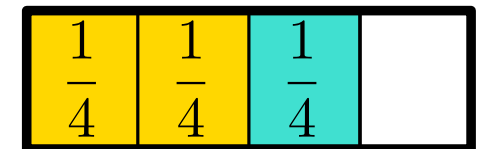
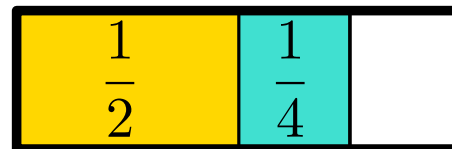
$$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{\square}{6} + \frac{\square}{6} =$$

- * Es importante, al principio, mostrar el **significado** de lo que hacemos.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

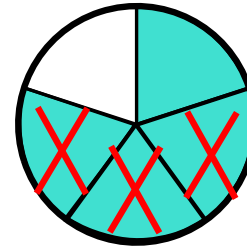


Fracciones
relacionadas



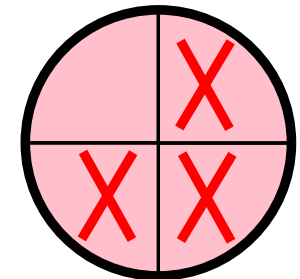
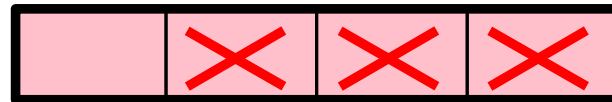
Resta de fracciones (mismo denominador)

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$



- * Dos amigos compraron una tarta y se comieron entre los dos $\frac{3}{4}$ de la tarta. ¿Cuánta tarta sobró?

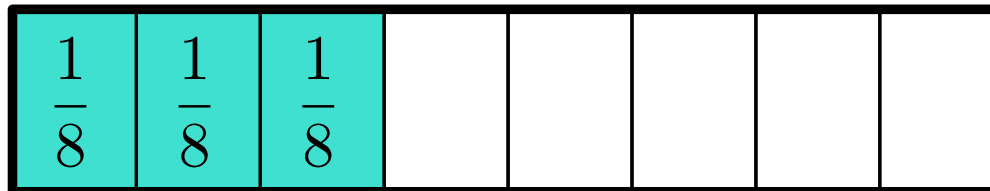
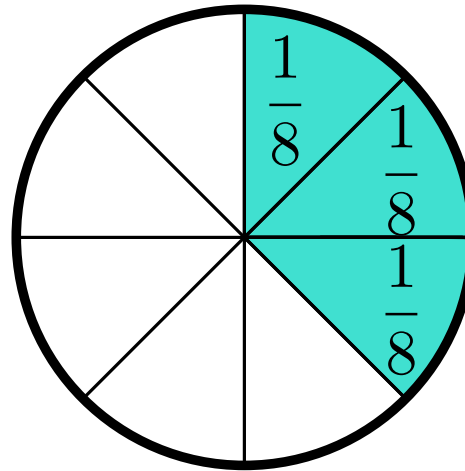
$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$



- * ¿Es necesario/conveniente escribir $1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$?

Resta de fracciones

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{4} =$$



Actividad

- * Representa gráficamente las siguientes operaciones con fracciones, incluyendo el proceso de expresarlas con el mismo denominador.

$$\diamond \frac{2}{5} + \frac{3}{10} =$$

$$\diamond \frac{2}{5} - \frac{3}{10} =$$

El caso general

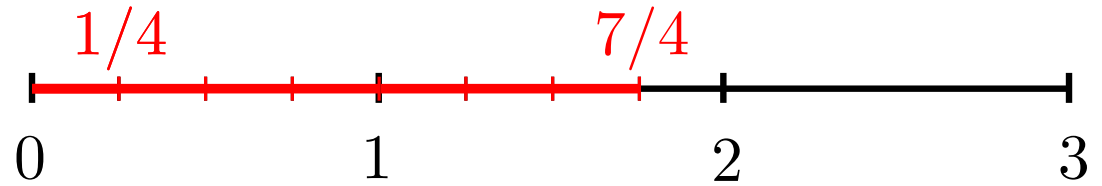
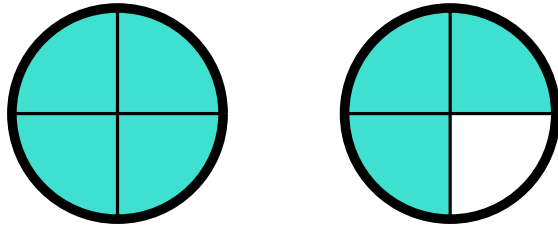
- * ¿Qué denominador utilizar?

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} =$$

- * Una reflexión pendiente: la complejidad de los cálculos que pedimos en cada etapa.
- * Las representaciones (concretas, visuales) ayudan cuando los números son pequeños. En cierto momento, hay que avanzar al terreno puramente simbólico.

Fracciones impropias

* ¿Qué significa $\frac{7}{4}$?



La recta numérica

* Ayuda a entender que $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$

¿Números mixtos?

* Esta interpretación será especialmente útil cuando aparezcan los números decimales.

Ejercicio 1

* Compara las fracciones $11/3$ y $15/4$ de dos formas:

1. Representándolas en la recta numérica.
2. Expresándolas con un denominador común.

Reflexiona sobre la relación entre estos dos procedimientos.



* ¿Y el caso general? Por ejemplo, $\frac{37}{4} =$

Modelo de barras y fracciones

1. En una hora se llenan $\frac{5}{7}$ de un depósito. ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse el depósito completo?
2. Una barra de 108 cm de largo se partió en dos piezas. Si sabemos que $\frac{3}{5}$ del trozo más grande miden lo mismo que $\frac{3}{4}$ del trozo más pequeño, ¿cuál es la longitud de cada uno de los trozos?

Problemas

1. Luis y Nuria hicieron tarjetas durante dos días. El sábado Nuria hizo 19 tarjetas más que Luis. El domingo, Nuria hizo 20 tarjetas, y Luis hizo 15. Al acabar los dos días, comprobamos que Nuria hizo $\frac{3}{5}$ del total de las tarjetas. ¿Cuántas tarjetas hizo Luis?
2. Al principio teníamos el triple de zumo de naranja que de zumo de piña. Después de bebernos 270 ml de cada hay 9 veces más de zumo de naranja que de zumo de piña. ¿Cuánto zumo de naranja había al principio?

Multiplicación de fracciones

- * Desde el punto de vista del algoritmo, multiplicar fracciones es más sencillo que sumarlas.
Sin embargo, desde un punto de vista conceptual es mucho más complicado.

- * Vamos a ir paso a paso:

i) $5 \times \frac{2}{3}$ cinco veces dos tercios

Es importante cómo la interpretamos, cómo la verbalizamos.

“cinco veces dos tercios”

Multiplicación de fracciones

ii) Fracción de una cantidad: $\frac{2}{3} \times 12$. dos tercios de doce

¿Cómo lo haría un alumno al que no le damos “instrucciones”?



- * El procedimiento que luego usamos debería respetar esa idea.
- * Además, estamos descubriendo que multiplicar por $1/3$ es equivalente a dividir por 3.

Multiplicación de fracciones

iii) ¿Y qué pasa con $\frac{2}{3} \times 5$?

dos tercios de cinco



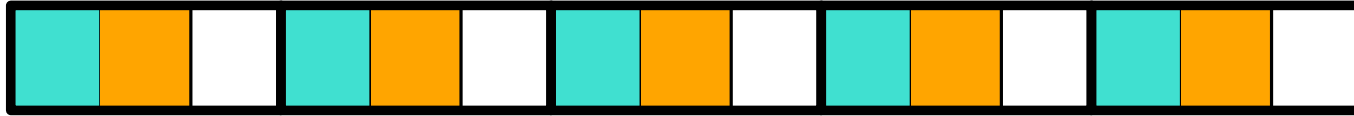
Un requisito previo es haber entendido la **fracción como división**, y que $\frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3}$.



Multiplicación de fracciones

$$\frac{2}{3} \times 5.$$

“Dos veces un tercio de cinco”



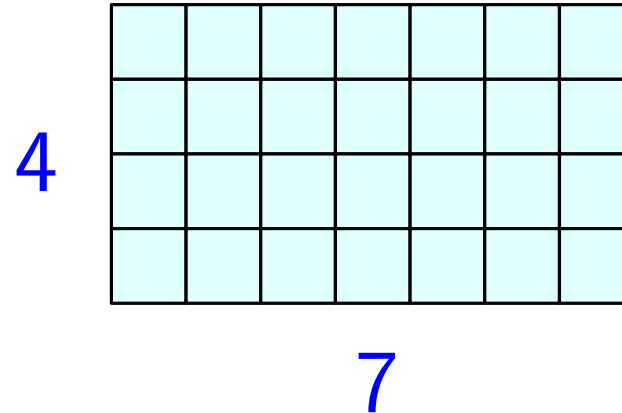
- * Como podemos ver, “dos tercios de cinco vale lo mismo que cinco veces dos tercios”.
- * Pero no **significa** lo mismo:
Piensa dos problemas, uno que se resuelva con la operación “**5 veces 2/3**” y otro que se resuelva con la operación “**2/3 de 5**”.

Multiplicación de fracciones. Modelo de área

- * Multiplicación de números naturales.

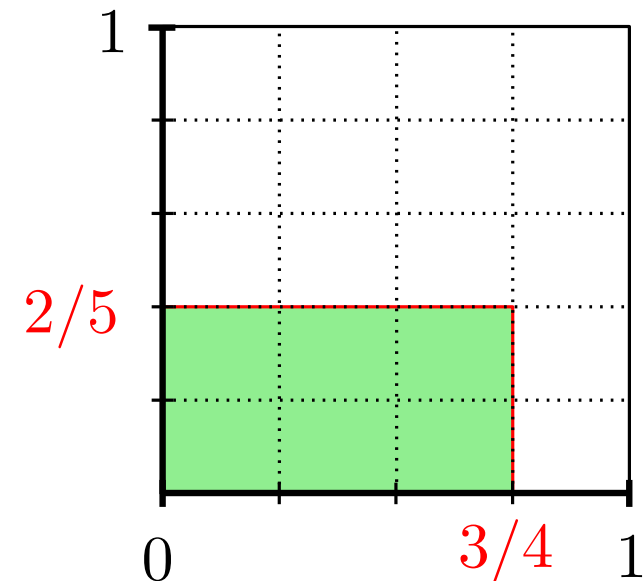
$$4 \times 7$$

$$7 \times 4$$



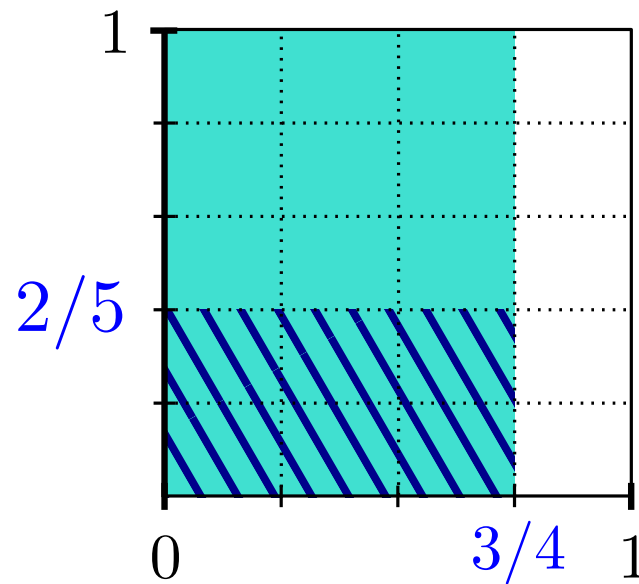
- * Queremos que siga siendo cierto para fracciones.

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$$

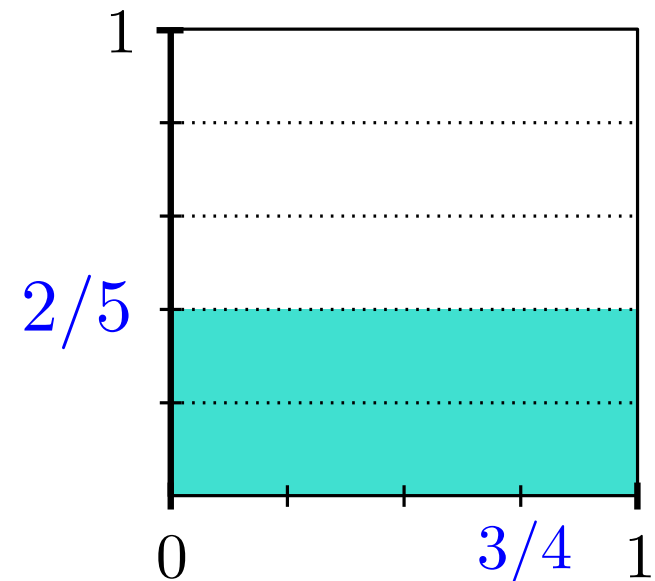


Multiplicación de fracciones. Modelo de área

* $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ significa también $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$.

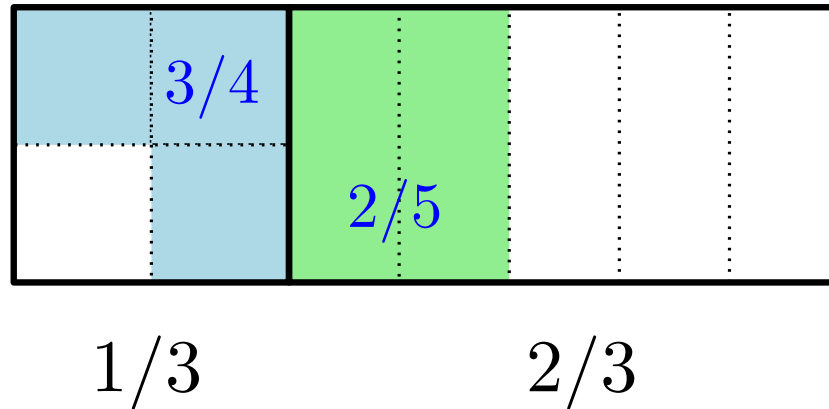


¿ $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$ es lo mismo
que $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$?



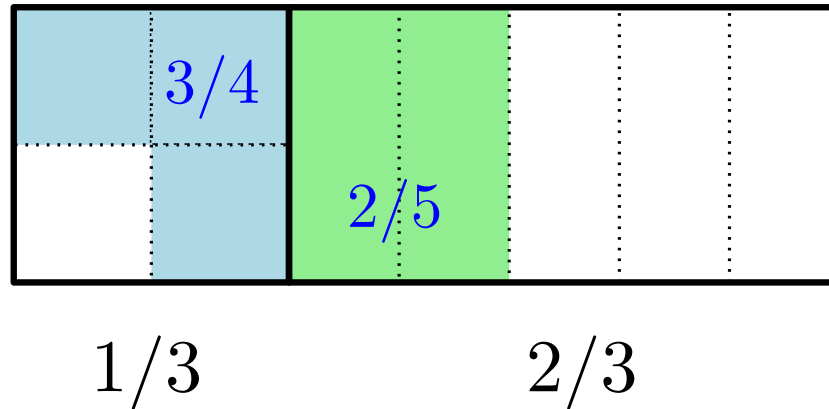
Ejercicios

* ¿Qué fracción del total está coloreada?



Ejercicios

- * ¿Qué fracción del total está coloreada?



- * Si tengo 6 vasos (iguales), en cada vaso hay $\frac{1}{4}$ de zumo natural y $\frac{3}{4}$ de agua, y echo los 6 vasos en una botella, ¿qué fracción del líquido de la botella será zumo natural?

División de fracciones: primeros ejemplos

- * Cuando el divisor es un número natural:

$$\frac{4}{5} \div 2 =$$

$$\frac{3}{5} \div 2 =$$

- * Empezar así muestra que no todo es “raro” cuando aparecen las fracciones.

División de fracciones: primeros ejemplos

- * Piensa un problema o situación que le de sentido a la operación $3 : \frac{1}{2}$.

- * Con ejemplos como éste se trabaja que dividir entre $1/n$ es equivalente a multiplicar por n .

$$4 : \frac{1}{3} = 4 \times 3 = 12$$



Siguiente paso

- * ¿Cuántas botellas de $\frac{2}{3}$ de litro se pueden rellenar con 5 litros de agua? Calcula el resultado de manera gráfica.



- * Buscando un procedimiento general. Calcula (gráficamente)

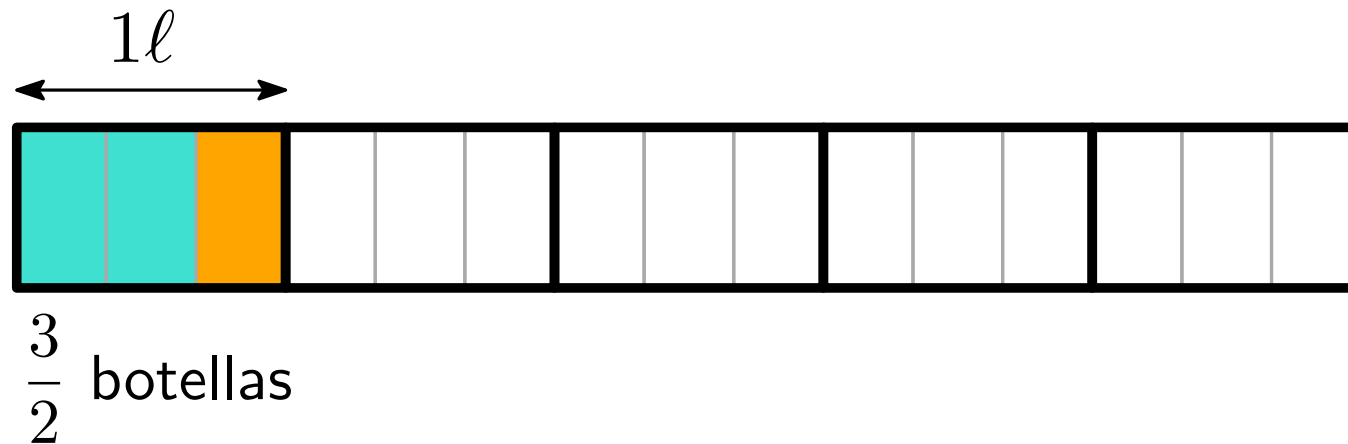
a) $1 : \frac{2}{3}$

b) $1 : \frac{3}{4}$

c) $1 : \frac{2}{5}$

Procedimiento general

- * ¿Cuántas botellas de $\frac{2}{3}$ de litro se pueden rellenar con 5 litros de agua?



$$* 5 : \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2}$$

es decir, para dividir por una fracción, se multiplica por su **inversa** (la fracción “dada la vuelta”)

Otra opción: común denominador

- * Calcula la división de fracciones $\frac{7}{4} \div \frac{1}{2}$ **reduciendo a común denominador** e interpreta gráficamente el procedimiento.



- * Dos opciones para la división de fracciones:

$$1. \quad \frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

$$2. \quad \frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{15}{20} \div \frac{8}{20} = \frac{15}{8}$$

- * ¿Ventajas e inconvenientes?

Referencias

- * Las imágenes de libros de texto usadas en estas transparencias corresponden a los proyectos:
 - Piensa Infinito, Editorial SM.
 - Pensar sin Límites, Editorial Polygon Education.