Matemáticas Singapur Sentido numérico y resolución de problemas

Pedro Ramos Alonso

Facultad de Educación

Universidad de Alcalá

pedro.ramos@uah.es





http://masideas-menoscuentas.com/ @MsIdeasMnosCtas

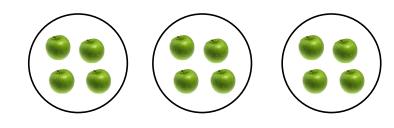
La multiplicación

- * ¿Cómo se puede introducir?
- * Una opción: "multiplicado por"

$$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$$

* La alternativa: "veces"

 3×4 significa 3 veces 4



$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$$

Las tablas...

* La interpretación del signo × y las tablas de multiplicar:

$$2 \times 1 =$$

$$2 \times 2 =$$

$$2 \times 3 =$$

$$2 \times 4 =$$

$$2 \times 5 =$$

Veces ↔ Multiplicado por

- * A nivel internacional, no hay mayoría clara.
- * Controversia en el periódico. ¿Por qué no es lo mismo 5×3 que 3×5 ?

http://verne.elpais.com/verne/2015/10/31/articulo/1446292466_

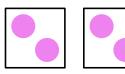
- * La ventaja de usar "veces": inmediato de entender.
- * Pero, ojo: "veces" y las tablas de multiplicar.

* Lo más importante: evitar contradicciones. ¿El doble de 6?

Aprendizaje comprensivo Memorización



$$1 \times 2 = 2$$



$$2 \times 2 = 4$$







$$3 \times 2 = 6$$









$$4 \times 2 = 8$$











$$5 \times 2 = 10$$

5 grupos de 2 son 10 5 veces 2 son 10

* ¿Aprender de memoria o aprender con la memoria?

1. Suma repetida.



$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$$

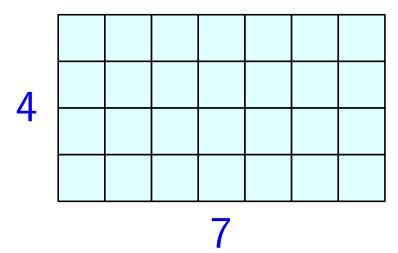
tres grupos de cuatro
tres veces cuatro

- * Es el significado más adecuado para la introducción de la multiplicación.
 - intuitivo
 - conexión con la suma, ya conocida

2. Modelo de área.

$$4 \times 7$$

$$7 \times 4$$



- a) Muy útil para entender varias propiedades de la multiplicación.
- b) Conexión con la geometría.

3. Modelo de proporcionalidad, escalado.

Multiplicado por: si leemos 5×2 como "cinco multiplicado por dos", ¿qué significa?

a) Conexión con la división: multiplicar por 3, operación inversa a dividir entre 3.

4. Modelo combinatorio.

Si tengo 3 pantalones y 4 camisetas, ¿de cuántas formas distintas puedo vestirme?

- a) Es un modelo importante en resolución de problemas y con varias aplicaciones.
- b) Accesible a los alumnos desde el principio de primaria.
- c) Poco trabajado en España.

Problemas

* Si tengo 3 pantalones, 4 camisetas y 2 gorras, ¿de cuántas formas distintas puedo vestirme?

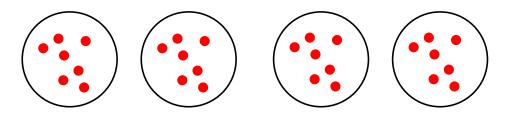
* ¿Cuántos números de 3 cifras empiezan por una cifra impar y son múltiplos de 5?

* En una matrícula de un coche, ¿qué es más probable, que haya alguna cifra repetida, o que todas las cifras sean distintas?

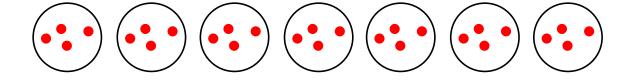
Propiedades de la multiplicación

* Conmutativa

* Ojo: no es nada intuitivo que 4 veces 7 sea igual que 7 veces 4

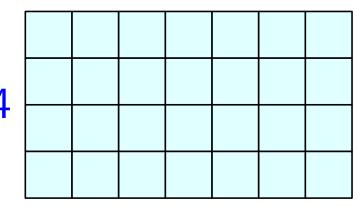


4 veces $7 \leftrightarrow 4 \times 7$



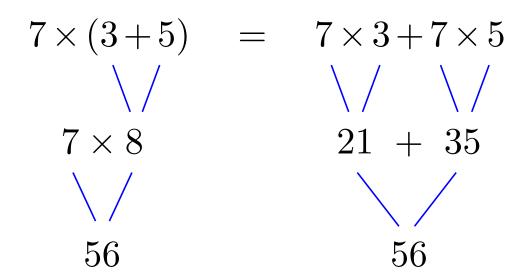
7 veces $4 \leftrightarrow 7 \times 4$

* Modelo de área.



Propiedades de la multiplicación

- * Propiedad distributiva
- * ¿Qué sentido tiene en primaria?
- * En los libros de texto ...



Propiedad distributiva

- * Fundamental para:
 - i) manipulaciones algebraicas: 2(x+3) = 2x+6
 - ii) cálculo natural (pensado, mental):

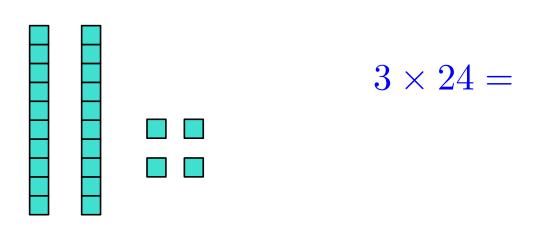
$$12 \times 7 =$$

iii) algoritmo tradicional (y otras variantes) de la multiplicación.

Hacia el algoritmo de la multiplicación

* Una cuestión previa: $8432 \times 10 = 84320$ ¿Por qué?

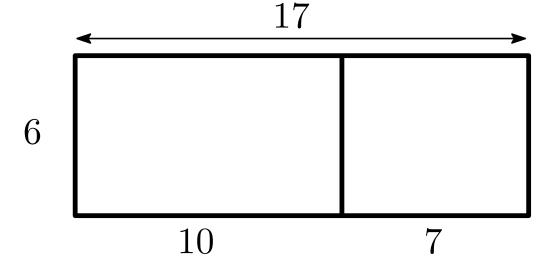
* Los materiales (en particular, los bloques de base 10) siguen siendo muy útiles.



El modelo de área

* Una excelente ayuda para la comprensión de las propiedades y para la introducción del algoritmo.

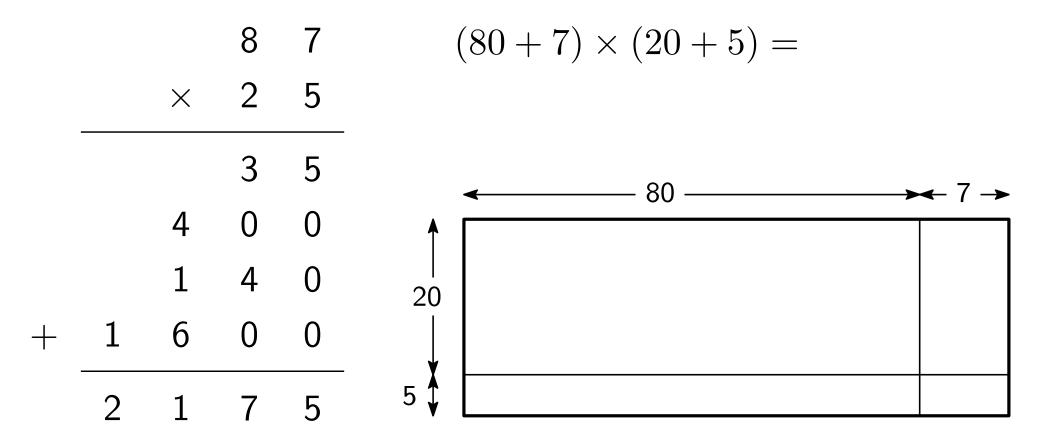
$$6 \times 17 = 6 \times 10 + 6 \times 7$$



	1	7
	×	6
	4	2
+	6	0
1	0	2

Algoritmos de la multiplicación

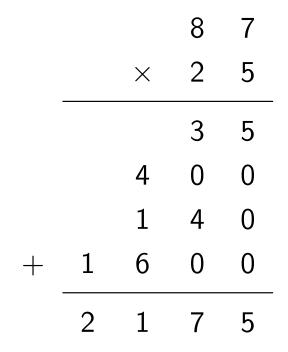
- * ¿Y si queremos multiplicar por un número de dos cifras?
- Una idea: usar el modelo de área.
 (El vídeo enlazado es de la Khan Academy.)

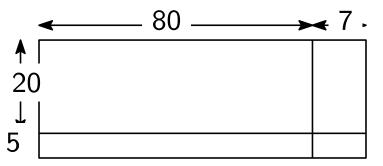


Algoritmos de la multiplicación

El tradicional explicado

Productos parciales





Problema (3° Primaria)

* Nos dicen que Juan pesa 5 veces más que su perro, y que entre los dos pesan 42 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?

La división

- * "Dividir es repartir". ¿Siempre?
- 1) Luis Ileva 20 caramelos al colegio y quiere repartirlos entre 4 amigos. ¿Cuántos caramelos le da a cada amigo?
- 2) Luis tiene 20 caramelos y hace bolsas con 4 caramelos. ¿Cuántas bolsas puede hacer?
- * El segundo significado es la división de agrupamiento. Tiene el sentido de "hacer grupos iguales". (No se trabaja lo suficiente en nuestras aulas). Relación con medida: ¿cuántas veces "cabe" 4 en 20?

Inventa dos problemas

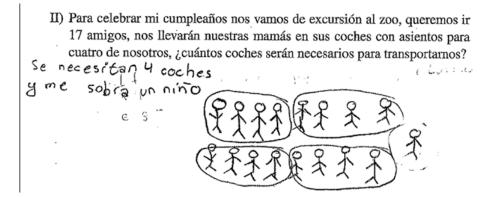
camisetas

96 euros 16

* En uno de ellos, la división debe tener sentido de reparto; en el otro, de hacer grupos.

División: el procedimiento y su interpretación

* El error en nuestras aulas: nos centramos en el algoritmo, y nos olvidamos de darle significado.



* Un ejemplo de pregunta de TIMSS (4º de primaria)

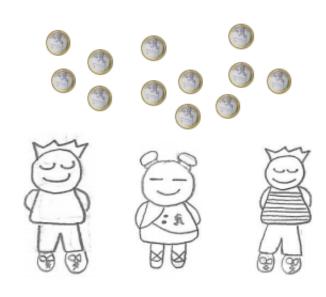
La pintura viene en latas de 5 litros. Santi necesita 37 litros de pintura. ¿Cuántas latas debe comprar?

- 5
- 6
- 0 7
- 8

Introducción de la división

Agrupa las monedas de la figura, para repartirlas por igual entre los tres amigos.

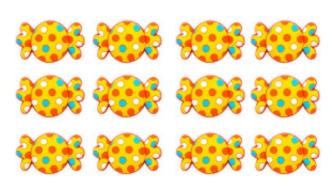
$$12:3=4$$



 e) Con los caramelos de la figura, hacemos bolsas con 4 caramelos cada una.

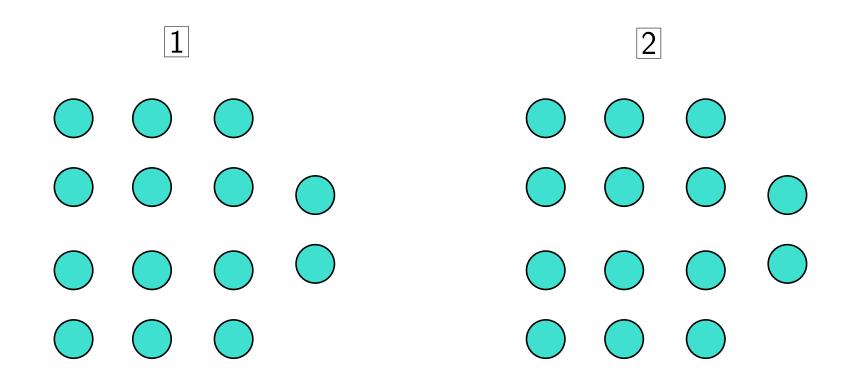
Necesitamos bolsas

$$12:4=3$$



Introducción a la división

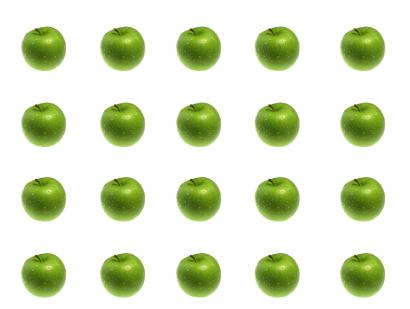
- * Con los puntos de las figuras:
 - 1. Haz dos grupos iguales.
 - 2. Haz grupos de dos.



Multiplicación y división

* Es importante trabajar la relación entre multiplicación y división, como operaciones inversas.

(Incluyendo también la diferencia entre reparto y agrupamiento)



División con resto

* División entera (con resto, o euclídea)

Dados dos números naturales D (dividendo) y d (divisor), existen unos únicos números naturales c (cociente) y r (resto) tales que

$$D = c \times d + r$$
 y $0 \le r < d$.

* Idea de cualquier algoritmo de división:

Aproximar por defecto el dividendo por múltiplos del divisor.

$$16 = \boxed{} \times 3 + \boxed{}$$

$$D = c \times d + r$$

- * Ventajas de esta notación:
 - * se adapta muy bien al cálculo mental y la estimación:

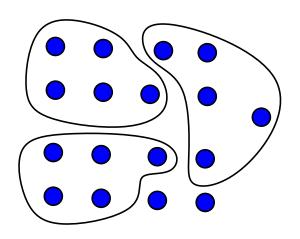
$$140 = \boxed{} \times 9 + \boxed{}$$

- ★ ayuda a entender el significado de la división (y de sus resultados, el cociente y el resto)
- * Problema: Un astronauta empezó su viaje un martes a las 9 de la mañana. Si el viaje duró 115 horas, ¿qué día y a qué hora aterrizó?
- * ¿Qué día de la semana será dentro de un año? ¿Por qué?

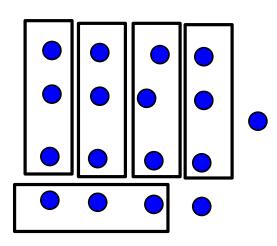
Introducción del algoritmo

- * Repartimos 17 caramelos entre 3 amigos.
 - 1. ¿cuántos caramelos le damos a cada amigo?
 - 2. ¿cuántos caramelos sobran?

- * Con 17 caramelos hacemos bolsas de 3 caramelos.
 - 1. ¿cuántas bolsas salen?
 - 2. ¿cuántos caramelos sobran?



$$\begin{array}{c|c|c}
-17 & 3 \\
\hline
15 & 5 \\
\hline
2 & \end{array}$$



¿Notación para la división?

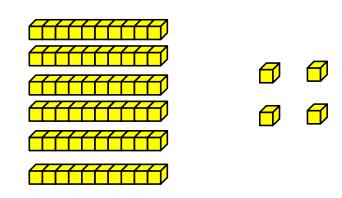
$$17 \div 3 = 5 R 2$$

$$17 = 3 \times 5 + 2$$

Algoritmo de la división: introducción

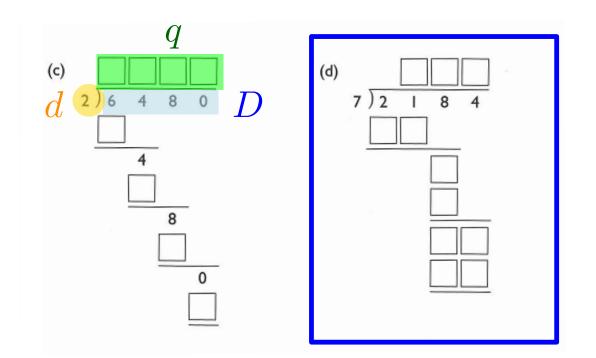
* También aquí debemos apoyarnos en los materiales, al principio.

* Queremos hacer la división $64 \div 2$. ¿Cómo la interpretamos?



* ¿Y si queremos hacer la división $52 \div 4$?

Divisiones en 4° – Singapur



* Los divisores de dos (o más) cifras han desaparecido del currículo (ya hace algunos años).

Algoritmos de división

* Algoritmo tradicional: dos versiones.

Algoritmo "extendido"

Algoritmo "usual" ("comprimido")

¿Otros algoritmos?

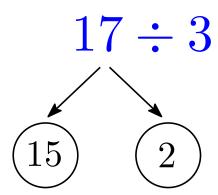
ABN

Una propuesta

Algoritmo de los "cocientes parciales"

¿Otros algoritmos?

* Basado en las descomposiciones de números:



- * Haz estos cálculos con los algoritmos indicados:
 - i) 147 ÷ 8, descomponiendo y con cocientes parciales.
 - ii) $1427 \div 26$, con cocientes parciales.

Un problema ¿de 5.°?

* Alicia tiene el triple de dinero que Benito, y Lucía tiene 16 euros más que Benito. Si entre los tres tienen 186 euros, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

Primaria-Secundaria: dos dificultades concretas

* El significado del signo "="

En la resolución de problemas es usual encontrarse expresiones como

$$7 \times 4 = 28 + 7 = 35$$

- * Es importante entender que el signo "=" es bidireccional.
- * Una idea que puede ayudar. Además de

$$3 + \boxed{} = 8$$

* Proponer también

$$9 = 4 + \boxed{}$$

$$2 + 6 = | + 3|$$

$$9 = 4 + \boxed{} 2 + 6 = \boxed{} + 3 \qquad 25 = 7 \times \boxed{} + 4$$

El paso aritmética-álgebra

- * La iniciación al lenguaje algebraico se trata en el año K-6 en muchos países.
- * Cuentas como

$$\pi + 2\pi = 3\pi$$

son una introducción excelente.

- * En Singapur, en los problemas sobre circunferencias y círculos, tratan π de estas tres formas distintas:
 - a) aproximando $\pi \approx 3.14$ (con calculadora).
 - b) de manera exacta.
 - c) aproximando $\pi \approx \frac{22}{7}$.

La calculadora (y otros dispositivos)

* Está en el currículo, y habría que integrarla en el aula.

aunque solo sea para que no ocurra esto: https://www.youtube.com/watch?v=zcIITKd4ivQ

* Usa tu calculadora para averiguar tu índice de masa corporal.

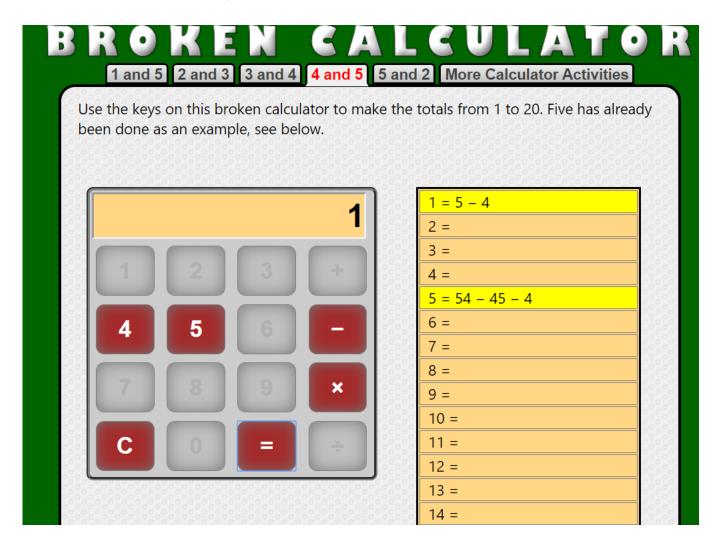
(La estatura es en metros)

ÍNDICE DE MASA CORPORAL kilos estatura x estatura

- * Dos aspectos distintos:
 - (1) su uso para hacer operaciones "complicadas", o para comprobar resultados.
 - (2) su utilidad en el diseño de actividades de aprendizaje.

Un ejemplo de actividad de aprendizaje

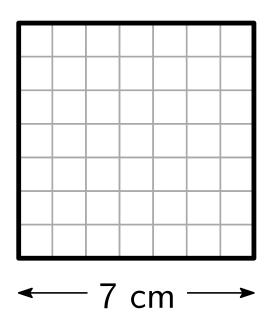
Calculadoras estropeadas.



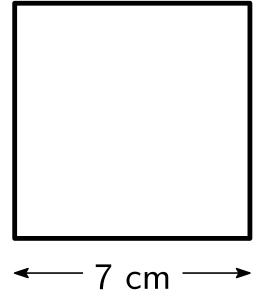
https://www.transum.org/Software/SW/Starter_of_the_day/Students/Broken_Calculator.asp

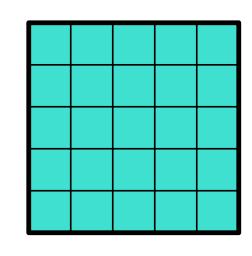
Potencias

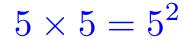
* La conexión con la geometría es fundamental.



1 cm



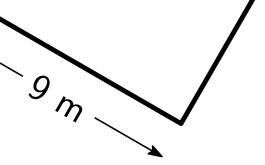




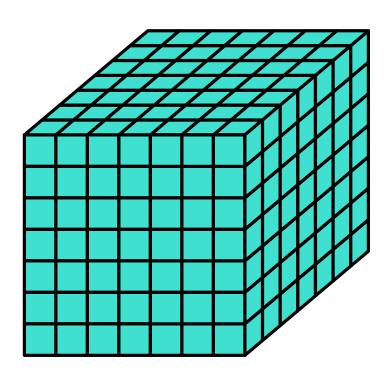


 $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^2$

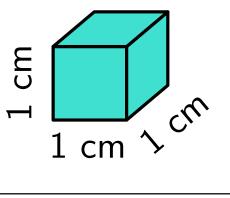




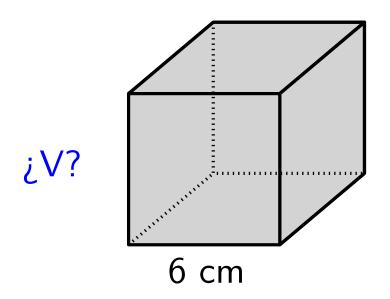
Potencias



$$7 \times 7 \times 7 = 7^3$$



$$1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^3$$



Raíces

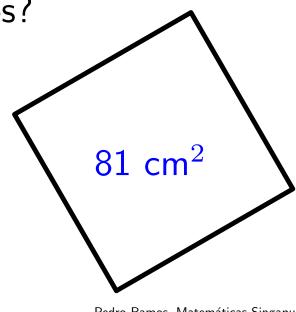
* Estudiar una operación y su inversa de forma conjunta facilita la comprensión.

*
$$\sqrt{16} = 4$$
 porque $4^2 = 16$ $(4 \times 4 = 16)$

* De nuevo, la conexión con la geometría ayuda.

* ¿Cuánto mide el lado de estos cuadrados?

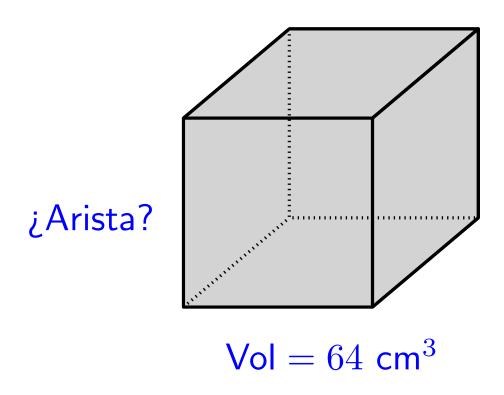
 49 cm^2



Pedro Ramos. Matemáticas Singapur.

Raíces

* $\sqrt[3]{125} = 5$ porque $5^3 = 125$ ($5 \times 5 \times 5 = 125$).



Una actividad para la raíz cuadrada

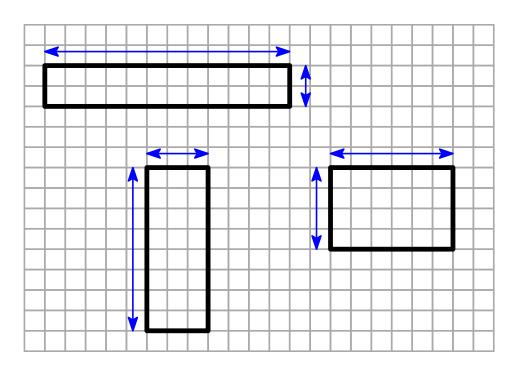
* Con una calculadora como la de la figura, encuentra $\sqrt{325}$ con 2 cifras decimales.

Repite el ejercicio con 0,8.



* Busquemos todos los divisores de 24.

Conexión con la geometría



* Los múltiplos en la recta numérica.

- * La divisibilidad es un área en la que se pueden plantear multitud de preguntas de exploración, desde un nivel muy básico hasta uno muy avanzado. Algunas posibilidades:
 - 1. Haz una lista con múltiplos de 5. ¿Observas alguna propiedad?
 - 2. Haz una lista con los divisores de 12, y otra con los divisores de 24. ¿Qué observas? ¿Puedes pensar en otras parejas de números con los que ocurra algo parecido?

3. Haz una lista con múltiplos de 2, otra con múltiplos de 3, y otra con múltiplos de 6. ¿Qué observas? ¿Puedes pensar en otras parejas de números con los que ocurra algo parecido?

0

Reglas de divisibilidad

* 2, 5, fáciles ¿3?

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

* Conocidas dificultades de comprensión. ¿Por qué?

* La descomposición en factores primos no es una buena herramienta para primaria.

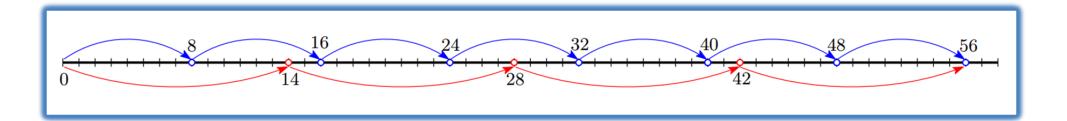
No está incluida en el currículo.

* Más conveniente calcularlos a partir de la definición.

Ejemplos

* Encuentra el máximo común divisor de 18 y 24.

* Encuentra el mínimo común múltiplo de 8 y 14.



Problema

* (Tomado de una prueba final de primaria de Singapur)

Alicia compró 150 naranjas y 100 manzanas para sus vecinos. Repartió las naranjas entre los vecinos (por igual) y le sobraron 17 naranjas. También repartió las manzanas, y le sobraron 5. ¿Cuántos vecinos tenía Alicia?

Un último problema

- * Yolanda preparó refresco y con él llenó dos tipos de botellas, grandes y pequeñas. Con 7.2 l del total de refresco llenó 3 botellas grandes y 5 botellas pequeñas. Sabemos que con el refresco que le sobró le faltaban 0.5 l para rellenar otra botella grande, pero sí pudo rellenar una botella pequeña, tras lo que le sobraron 0.3 l de bebida.
 - a) ¿Cuál es la diferencia entre la capacidad de las botellas grandes y las botellas pequeñas?
 - b) ¿Cuántos litros de refresco preparó Yolanda?

