Los problemas y los ejercicios

Se plantearán distintas situaciones en las que los alumnos tratarán de distinguir, según la idea que ellos tienen, entre problemas o ejercicios, Deben analizarse y decidir cómo es la situación para ellos.

Actividades

1.- ¿Qué es un problema para ti? ¿Y un ejercicio? ¿Es lo mismo? Escribe algunas de las diferencias que a tu juicio existen entre ejercicio y problema.

Algunos asocian la palabra problema a Matemáticas y ejercicio a otras materias.
No tienen nada claro que ejercicio y problema sean cosas distintas. Expresan algunas ideas muy ambiguas que no nos conducen a nada.
Para muchos de ellos un problema es lo mismo que un ejercicio pero con texto, independientemente del contenido.
Leemos el siguiente texto recogido del libro de COU de Anaya escrito por Miguel de Guzmán, José Colera y Adela Salvador:

¿QUÉ ES UN PROBLEMA?

Un verdadero problema es una situación que se presenta, en la que sabemos más o menos, o bien con seguridad, a donde queremos ir, pero no sabemos "Cómo".
La principal dificultad consiste precisamente en aclarar la situación y en dar con algún camino adecuado que te lleve a la meta. A veces, no sabemos si la herramienta adecuada para la resolución del problema está entre la colección de técnicas que dominamos, o ni siquiera si se ha creado una técnica que pueda ser suficientemente potente para resolver el problema.

Esta es la situación en que se encuentra el investigador. El planteamiento de problemas "imposibles" de resolver, ha sido una constante entre los Matemáticos de todas las épocas y el conseguir llegar a resolver esos problemas o demostrar su imposibilidad, ha sido su fin a lo largo de la Historia del mundo de las Matemáticas.

Un ejercicio, por el contrario, es una situación en la que sabemos perfectamente lo que hay que hacer y además conocemos la herramienta adecuada para hacerlo. Tiene por objeto, practicar los conocimientos adquiridos (Operaciones (sumas, restas,...) Ecuaciones, etc...).
Hacemos notar que, lo que para alguien es un problema para otro puede ser un ejercicio, dependiendo de su nivel de conocimientos, experiencia, etc...

***2.-* En una calle hay 100 edificios. Una fábrica de cifras de plástico es encargada de poner los números encima de cada portal. ¿Cuántos ceros necesita?, ¿cuántos ochos?, ¿cuántos seises?**

Cada pregunta añadida tiene su matiz y hay que descubrirlo en el momento adecuado.

Todo lo ven como un puro ejercicio.

Actividad de profundización:
Si convenimos que los números pares están a la derecha y los impares a la izquierda, al ir en sentido ascendente por una calle, ¿hacia donde debemos girar si desembocamos en una calle en la que buscamos el número 35 y vemos de frente el nº 8?

¿Hay Calles que no cumplan esta norma?

***3.-* ¿Cuántos cubos tiene en total?**

Contesta a la misma pregunta para una torre que tenga un nº de pisos de dos cifras y de tres cifras.

Este problema resulta interesante y adecuado para este tema porque tiene cuestiones muy sencillas y otras bastante complicadas.

Analizan bien para descubrir las relaciones, leyes, reglas, generales.

Tienen dificultad para representar figuras tridimensionales.

Si descubren las leyes generales, después todo son ejercicios.

4.- **De las preguntas que apareen en la actividad anterior, decide cuales son ejercicios y cuales problemas.**

5.- **¿Cuántos martes y trece puede haber en un mes?**

Para hacer este problema es imprescindible proporcionarles un calendario de un año natural completo (puede ser bisiesto, hacerlo notar).

Les cuesta bastante entender el procedimiento para suponer que el día 1 de enero cae en los diferentes días de la semana y a partir de ahí contar.

6.- **Escribe un enunciado con dos preguntas, de modo que una sea un ejercicio para ti y otra sea un problema. (Pueden ser situaciones no matemáticas, ni siquiera académicas).**

En muchos casos no se ajustan a lo que se pretende con la actividad: identifican situaciones y cuestiones que son un problema para la persona que las escribe.

Hay algunos que siguen identificando "problema" con "problema de matemáticas".

***7.-* a) En un cajón tenemos, sin ordenar y revueltos 24 calcetines blancos y 24 negros. Estamos en la habitación a oscuras:**

¿Cuántos calcetines debo sacar, como mínimo, para asegurarme que tengo dos del mismo color? ¿Y para asegurarme dos negros?

b) En otro cajón tenemos 12 pares de guantes blancos y 12 negros. Responde ahora a las mismas preguntas del apartado anterior.

Estas situaciones no las consideran un problema, se resuelve fácil y es adecuada para hablar de lo que en matemáticas se considera una solución aceptable, en el sentido de que sea válida.

***8.-* Un cubo está formado por 64 cubitos más pequeños. Pintamos las caras del cubo grande de un color. ¿Cuántos de los cubitos pequeños tendrán pintadas 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 caras?**

¿Y si la arista del cubo estuviera formada por 2, 3 5,… cubitos?

***9.-* Reflexiona sobre las siguientes afirmaciones y di con cuáles estás de acuerdo:**

Un ejercicio es una situación que se resuelve nada más leerla una vez.

Un ejercicio es una situación en la que el profesor quiere que practique lo que ya sé.

Un ejercicio es una cosa muy fácil.

Un ejercicio es algo en lo que se da por hecho, que sé lo se necesita para resolverlo.

Un poco de Historia. Los problemas en matemáticas.

Las Matemáticas evolucionan a través de sus problemas. Cada vez que se plantea un problema, la Matemática da un paso adelante. Los problemas no siempre pueden resolverse, pero eso no significa, en absoluto, un paso atrás. Por el contrario, en numerosas ocasiones la búsqueda de una solución imposible ha permitido nuevos conocimientos y grandes avances de la ciencia.

Los Problemas tienen un origen doble

1.- Problemas surgidos de necesidades técnicas. (Arquímedes, renegaba de este tipo de problemas, y se sentía avergonzado por haber construido sus famosas máquinas para el sitio de Siracusa (según testimonio de Plutarco).

2.- Problemas de pura curiosidad, los acertijos. Problemas que el matemático se propone para su propia satisfacción personal.

En numerosas ocasiones cuando la ciencia o la tecnología necesitan de un problema de Matemáticas, este ya está resuelto.

Podemos recordar una aplicación particularmente brillante de la matemática en las ciencias exactas y en la tecnología:

- El Planeta Neptuno, uno de los más distantes del sistema solar, fue descubierto en el año 1846 mediante cálculos matemáticos. Analizando ciertas regularidades en el movimiento de Urano, los astrónomos Adams y Leverrier llegaron a la conclusión de que estas irregularidades eran producidas por la atracción gravitatoria de otro planeta. Leverrier calculó, basándose en las leyes de la mecánica, el lugar exacto donde debía estar el planeta; y un observador a quien comunico sus resultados lo localizó con su telescopio en la posición indicada por Leverrier. Este descubrimiento fue un triunfo, no sólo para a mecánica y la astronomía *(y* en particular para el sistema de Copérnico), sino también para la potencia del cálculo matemático.

Analicemos brevemente lo que ocurre con los problemas que los matemáticos se proponen:
Hay varias posibilidades (Dieudonné):

- Problemas que no evolucionan, permanecen planteados. Se han planteado, se ha intentado resolver, no se ha sabido y sigue sin saberse, a veces durante milenios.

  Ejemplo. Los antiguos griegos, hace más de 2000 años, estudiaron el problema de los ***Números Perfectos*** (número que es igual a la suma de sus divisores exceptuando él mismo). Euclides, proporcionó un bello teorema para conocer todos los números perfectos Pares. Pero desde entonces nos preguntamos en vano si hay números perfectos impares. Nunca se ha encontrado ninguno y nunca se ha demostrado que no existieran.

  Todos los números pares perfectos son de la forma $N = 2^n (2^n -1)$.

- El problema se ha resuelto, pero su solución no ha tenido consecuencias.. Uno coge un problema, lo resuelve mediante una idea ingeniosa, pero ahí se queda todo. No se ve nada en la solución que pueda servir para resolver otros problemas.

  Ejemplo. Problemas de Diofanto S. III d.C. (existen entre 100 y 200 de la misma índole).

  i) Hallar tres números X_1, X_2, X_3 tales que $Xi\ Xj + Xi + Xj$ sea un cuadrado para todas y cada una de las tres combinaciones posibles de los números.

  ii) Hallar un triángulo rectángulo de lados a, b, c, (a hipotenusa) (a - b y a-c sean cubos).

- El descubrimiento de un método.

  Los artificios para resolver un problema, pueden servir para resolver otro problema y después otro, y... Finalmente comprendemos que toda una clase de problemas está sometida a la jurisdicción del método que acaba de encontrarse. Pero, ¿de dónde sale el método y porqué va bien? Ni el inventor lo sabe. Todo lo que puede hacerse es refinarlo, mejorarlo, diversificarlo, pero sin comprenderlo todavía.

  Ejemplo: La teoría de números rebosa métodos de este tipo.

  Uno de los más antiguos es el famoso "método de descenso infinito", inventado por Fermat, para demostrar que la ecuación X^4 = Y4 + Z4 no tiene solución entera positiva.

  En qué consiste la demostración:

  Con una serie de manipulaciones aritméticas consigue demostrar que, si existe una solución, existe también otra menor, es decir, tal que uno al menos de los números que la integran es menor que los que componen la primera solución. Este procedimiento no puede seguirse indefinidamente sin alcanzar forzosamente un mínimo, lo cual el manifiestamente imposible

  Teorema de Fermat. Demostrado por Kummer (1810 - 1893) y sus seguidores para valores n de 3 a 100 (X^n + Yn = Z^n no tiene solución entera positiva para n> 2)

Y llegamos al paraíso de los Matemáticos.

- Problemas que a fuerza de reflexión han engendrado ideas nuevas que, a menudo, superan de manera inconmensurable al problema que dio origen.

No se trata solamente de métodos, de artimañas cada vez más refinadas, sino que, en esas ocasiones los matemáticos tenemos la impresión, de que al analizar el problema y las nuevas ideas que ha suscitado, comprendemos lo que pasa.

Ese es el objetivo de todo hombre de ciencia: Llegar a comprender qué pasa en el asunto objeto de sus estudios. Es, desde luego, una simple imprecisión que la próxima generación comprenderá mucho mejor. Ello forma parte de la evolución natural de las ciencias, pero de todos modos no cabe duda de que se produce una ganancia en comprensión formal.

Los ejemplos típicos son los famosos problemas que se plantearon los analistas y algebristas a partir del S. XVII.

Desde el punto de vista de quienes pretenden que lo que cuentan es la técnica únicamente, esos problemas eran idiotas. Veamos porqué.

El primer problema famoso, (se remonta a los babilonios) es el de la "***Resolución de ecuaciones por radicales".*** Durante mucho tiempo, se dispuso (únicamente) de la fórmula para resolver la ecuación de 2º grado.

"Y ¿por qué no ha de haber también una fórmula para el 3º grado y para los demás?"

A principios del XVI, Scipione Ferro encontró una para 3º grado. 30 años más tarde Ferrari (alumno de Cordano) para 4º grado. Se siguió buscando fórmulas, pero sin éxito.

A todo esto, se descubrió el cálculo infinitesimal, una de cuyas repercusiones fue precisamente la de permitir la determinación en un número finito de pasos, de las raíces de cualquier ecuación con tantos decimales como se quiera.

Es un método estándar, que se conoce desde Newton y que con el ordenador, proporciona el resultado en pocos segundos.

No hay duda que el método era prefecto para los usuarios y los técnicos. ¿Por qué entonces, los matemáticos siguieron buscando soluciones por radicales?

Este es un problema "tonto", que siguió preocupando a los matemáticos siglo y medio.

Durante mucho tiempo se trabajó en el problema de la resolución de ecuaciones por radicales. Incluso Euler, uno de los más grandes matemáticos de aquella época hizo innumerables tentativas, sin llegar nunca a nada.

Poco después Lagrange planteó por vez primera la siguiente cuestión:

"¿Por qué funcionan todas esas fórmulas? ¿Qué se esconde tras ello?

Encontró una respuesta: no fue una respuesta completa, pero le valió para ser el primero en tomar el camino que había de conducir a algún resultado.

Conocido ya el teorema Fundamental del Álgebra y que las raíces de un polinomio pueden permutarse y que determinadas funciones permanecen invariantes por tales permutaciones.

Analizando esta idea, Lagrange acabó por darse cuenta que el éxito de los métodos de Cardano y otros para resolver ecuaciones de 3º y 4º grado residía en la existencia de ciertas funciones no simétricas de las raíces, las cuales poseían determinadas propiedades de invariancia por permutaciones.

Poco a poco se fue avanzando y la cuestión central de las preocupaciones de los algebristas pasó a ser la siguiente:

¿Qué sucede cuando se permutan las raíces de una ecuación?

A lo largo de 60 años, ello dio origen a la Teoría de Grupos. Fueron todavía necesarios casi 100 años para que el concepto adquiriese su verdadera naturaleza, y ello fue motivo para una expansión prodigiosa de toda la matemática, porque se cayó progresivamente en la cuenta de que por todas partes existían grupos desde la aritmética más abstracta, hasta la teoría cuántica, la relatividad y todo el análisis, por no hablar de la geometría...etc.

Y cada vez que se ha descubierto un nuevo grupo en una teoría matemática, ésta ha experimentado un gran avance. La de grupo es una de esas nociones primeras que se encuentran por doquier y que los matemáticos buscamos en todos los campos.

Hemos visto, pues, un problema -incluso un poco "tonto", que una vez profundizado y analizado con amplitud, ha revelado posibilidades completamente insospechadas y han abierto camino a grandes avances matemáticos.

Existen pocos "paraísos" matemáticos de este tipo. Se trata de excepciones y no de reglas.

Uno de los grandes momentos en la historia de las Matemáticas, se produce sin duda, en la Antigua Grecia, en lo que Carl. B. Boyer denomina "Época heroica" (s. V.a.C) "*Porque raramente antes ni después se ha enfrentado el hombre con problemas matemáticos de una importancia tan fundamental con tan pocas herramientas*".

Estaban profundamente interesados en algunos problemas que fueron la base de la mayor parte de los desarrollos posteriores de la geometría.

En el mundo griego, la matemática estaba más estrechamente relacionada con la filosofía que con los problemas prácticos de la vida ordinaria.

<u>Tres Problemas Clásicos</u>.

1.- La cuadratura del Círculo (Anaxágoras). No se tienen muchos detalles del origen del problema, ni de las reglas que lo regían. Se trata de construir un cuadrado de área exactamente igual a un círculo (con regla y compás). Este problema ha fascinado a los matemáticos durante más de 2000 años.

2.- Duplicación del Cubo (Problema de Delos)

Origen: la peste en Atenas. Se envió una delegación al oráculo de Apolo de Delos para preguntar como se podría conjurar la peste, a lo que el oráculo contestó que duplicando el altar cúbico dedicado a Apolo. Ellos duplicaron la arista. La peste siguió.

3.- Trisección del Ángulo (Con regla y compás).

Estos son conocidos como "Los tres problemas clásicos de la Antigüedad".

Más de 2.200 años después se demostró que los tres problemas eran insolubles utilizando únicamente regla y compás.

No obstante, la parte mejor de la matemática griega y también buena parte del pensamiento matemático posterior vino motivado por los esfuerzos para lograr lo imposible o, si estos esfuerzos fracasaban, para modificar las reglas del problema.

La Época heroica fracasó en su objetivo inmediato, pero los esfuerzos realizados se vieron coronados con un éxito brillante desde otros puntos de vista.

Por ejemplo: La cuadratura de las lúnulas. "Segmentos semejantes de círculos están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus bases."

Para terminar, algunas citas de importantes matemáticos

"La vitalidad de las matemáticas se debe a que sus resultados tienen su origen y encuentran muchos y diversas aplicaciones en el mundo real. (Industria, Ingeniería, Ciencias,... etc)".

"Las construcciones más abstractas de la matemática, aquellas que surgen de la misma ciencia sin motivación inmediata, tienen sin embargo,

fructíferas aplicaciones." Alessandrow, y otros "La Matemática" Pag. 22 Tomo I

Hilbert: *"Mientras una rama de la ciencia ofrezca problemas en abundancia, esa rama estará viva."*
En el Congreso de París (1900), Hilbert que era ya un famoso profesor de Gotinga, presentó una comunicación, en la que basándose en las tendencias de investigación de finales del XIX, trataba de predecir la dirección de progresos futuros.
Hizo esto proponiendo 23 importantes problemas, que según él estarían o deberían estar entre los que ocupasen la atención de los matemáticos en el siglo XX.