GeoGebra
en la enseñanza de las Matemáticas

“GeoGebra incluso para Primaria”

Enrique Hernando Arnáiz

La Merced-Jesuitas, Burgos

Asoc. “M iguel de Guzmán”

EsTalMat CyL – IGCL

GEOGEBRA: ENLACES Y REFERENCIAS

INSTALADORES:
http://www.geogebra.org/download
Otras versiones: http://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_Installation

MANUALES:
PDF:
http://static.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf
http://static.geogebra.org/book/intro-en.pdf
WIKI:
http://wiki.geogebra.org/es/Manual
http://wiki.geogebra.org/es/Tutoriales
http://wiki.geogebra.org/es/Pistas
GG EN LA ENSEÑANAZA (R. Losada):
http://geogebra.es/cvg/index.html
http://geogebra.es/cvg/manual/index.html

LIBRO SOBRE GEOGEBRA TUBE:
http://tube.geogebra.org/student/b831633# (M. A. Fresno)

LIBRO GEOGEBRA: GeoGebra en la enseñanza de las Matemáticas CFIE Burgos:
http://tube.geogebra.org/student/b941025#

PROYECTO GAUSS (actualizado):
http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/materiales_didacticos.htm

INSTITUTOS GEOGEBRA:
IGCL: http://www.geogebracyl.socylem.es/
IGC: http://www.geogebra.es/
http://institutosgeogebra.es/
GeoGebra Institute Network: http://www.geogebra.org/institutes

REFERENCIAS:
- Proyecto Gauss (R. Losada y J. L. Álvarez)
- GeoGebra en la enseñanza de las Matemáticas (R. Losada)
- Club GeoGebra Iberoamericano (A. Carrillo, E. Amaro, F. Haro)
- Wiki/geogebra.org
- geogebratube
- IGCL “GeoGebra, un punto de partida” (J. M. Arranz, R. Jiménez)

Tema 1: CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO
1ª parte

Aquí van una serie de actividades para su desarrollo en el aula, siempre con distintos niveles de dificultad para promover su uso en los diferentes niveles educativos.

Para completar estas propuestas de cada tema, platearemos unos problemas como reto para que podáis afrontar la búsqueda de las soluciones, siempre sin olvidar que se deberán resolver con ayuda de GeoGebra.

CIRCUNFERENCIAS

El objetivo no es facilitar un material para seguirlo al pie de la letra ya que se trata de ofrecer un conjunto de actividades que puedan servir de referencia, de manera que cada docente seleccione las que considere oportunas y por supuesto, este si es el objetivo, las complete con otras actividades y tareas, creando materiales propios para posteriormente usarlos y/o compartirlos.

C1.- Actividad de investigación

Dibuja un punto A y piensa cuántas circunferencias puedes dibujar que pasen por el punto A. Indica cómo has realizado la construcción.

Ahora vamos a dibujar además del punto A otro punto B para averiguar cuántas circunferencias pasan a la vez por A y por B. Al igual que antes, indica cómo realizas la construcción.

Lo complicamos algo más, ahora dibuja tres puntos no alineados A, B y C, para averiguar cuántas circunferencias pasan a la vez por estos tres puntos.

Si añadimos un punto más, ¿podríamos construir la circunferencia que pasa por todos los puntos?

C2.- ELEMENTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

Dibuja una circunferencia de centro A y que pase por un punto B. Traza los

siguientes elementos:

- Un radio.
- Una cuerda.
- Un diámetro.

C3.- ANIMACIONES

Una animación sencilla

Dibuja una circunferencia.

Utiliza la herramienta *Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos*. Llama O al centro y A al punto por el que pasa la circunferencia.

Crea un nuevo punto P en la circunferencia.

Activa la animación automática del punto P. ¿Qué ocurre?

Otra animación

Dibuja los radios OA y OP.

Utiliza la herramienta *Segmento entre dos puntos*

Intenta animar el punto A. ¿Qué ocurre?

A continuación, anima el punto P. ¿Qué ocurre?

¿Cuál es la diferencia entre las dos animaciones?

Animación y rastro

En la construcción anterior, oculta el radio OA. Cambia el color del radio OP.

Para ello, pulsa el botón derecho sobre el radio y selecciona *Propiedades de objeto*. Pulsa de nuevo el botón derecho sobre el radio y *Activa rastro*.

Pulsa para iniciar la animación.

C4.- POSICIONES RELATIVAS

Posición relativa de dos circunferencias

Dibuja dos circunferencias.

Investiga que posiciones relativas pueden tener las dos circunferencias.

Posición relativa de una circunferencia y una recta

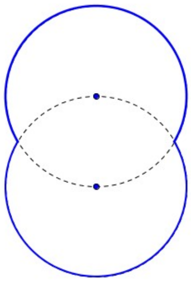
¿Qué posiciones relativas pueden tener una circunferencia y una recta?

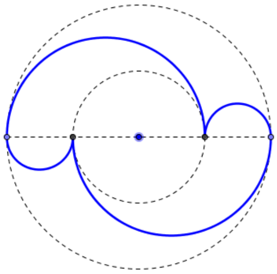
Una vez dibujadas una circunferencia y una recta encuentra los puntos de intersección entre ambos objetos.

A continuación, mueve cualquiera de los dos objetos para cambiar su posición relativa, ¿qué ocurre con los puntos de intersección?

C5.- DIBUJANDO CIRCUNFERENCIAS

Intenta realizar las construcciones siguientes:





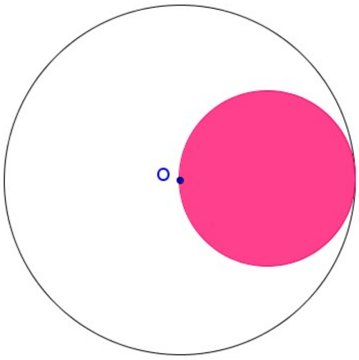
¿Puedes calcular su longitud y su área?

C6.- ÁREAS

Dos circunferencias

En una circunferencia se inscribe una nueva circunferencia que pasa por el centro y es tangente a la primera.

Realiza la construcción.



Determina la relación entre las áreas de las dos circunferencias.

Tres circunferencias

Realiza la siguiente construcción:

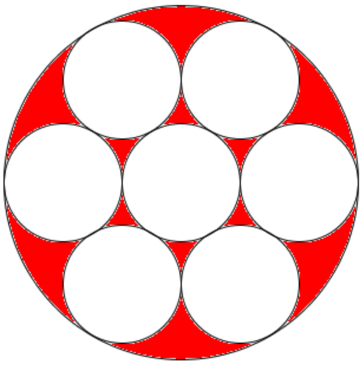
Dibuja tres circunferencias a, b y c, que cumplan las condiciones siguientes:

- La circunferencia b pasa por el centro de la circunferencia a y es tangente a ella.
- La circunferencia c pasa por el centro de la circunferencia b y es tangente a ella.

Una vez dibujadas, responde a la cuestión siguiente: ¿qué fracción del círculo a queda dentro del círculo b pero fuera del círculo c?

Siete circunferencias

Realiza la construcción siguiente.



Si las circunferencias pequeñas tienen un radio de una unidad de medida, ¿cuál es el área de la parte dibujada en rojo?

C7.- TANGENTES

Recta tangente por un punto de la circunferencia

Dibuja una circunferencia c cuyo centro llamamos O y sea A un punto de la circunferencia.

Traza la recta tangente a la circunferencia por el punto A.

¿Qué propiedad cumple la recta tangente?

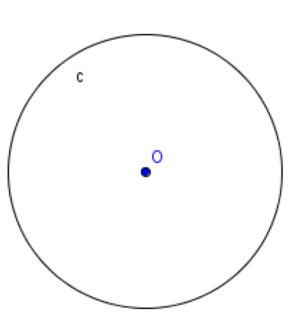
Recta tangente por un punto exterior

Sea P un punto exterior a una circunferencia de centro O. Traza las rectas tangentes a la circunferencia por el punto P.

¿Qué propiedades cumplen las dos tangentes?

Circunferencia tangente

Dibuja una circunferencia c cuyo centro llamamos O y un punto exterior P.



Construye la circunferencia de centro P que sea tangente a la circunferencia c.

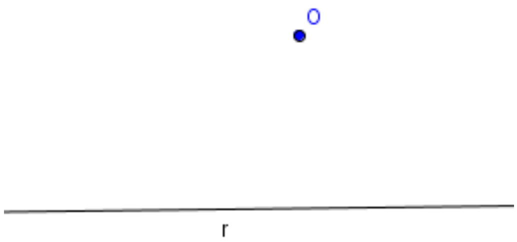
Una vez construida mueve los objetos que intervienen en la figura para comprobar que las condiciones de tangencia se mantienen. Mueve primero el punto P, a continuación mueve el centro O y por último intenta cambiar el tamaño de la circunferencia.

¿Hay alguna posición en la que desaparece la circunferencia obtenida? Estudia que

pasaría si P es un punto interior a la circunferencia.

Una tangente más

Dibuja la circunferencia cuyo centro es O y es tangente a la recta r.



Circunferencia tangente

Dibuja una circunferencia c cuyo centro es O y un punto A en la circunferencia. Sea P un

punto interior a la circunferencia.

Traza la circunferencia que pasa por el punto P y es tangente a la circunferencia c en el punto A.

¿Hay que cambiar algo en la construcción para que sea válida para el caso en el que el punto P sea exterior a la circunferencia c?

C8.- PARA TERMINAR

Para finalizar, os proponemos otra propuesta de investigación.

Dibuja una circunferencia, colorea el círculo y traza dos rectas que corten a la circunferencia.

Intenta averiguar cuál es el mayor número de partes en las que puedes dividir el círculo con las dos rectas.

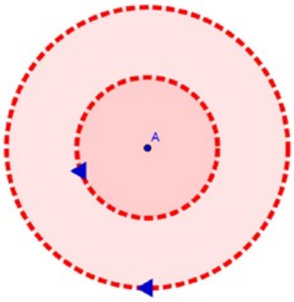
Y si en lugar de dos rectas, dibujamos tres rectas.

¿Cuál es el máximo de partes en las que podrás dividir el círculo?

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO PROBLEMAS PROPUESTOS (1ª parte)

Correspondientes a este primer bloque de contenidos os proponemos los siguientes retos para resolver con GeoGebra.

Problema_C1.



Dos ciclistas están circulando en un circuito descrito por dos circunferencias concéntricas de radios una doble que la otra. ¿Qué velocidad deben de llevar uno respecto al otro para que den el mismo número de vueltas?

Construye una situación con GeoGebra que justifique la respuesta.

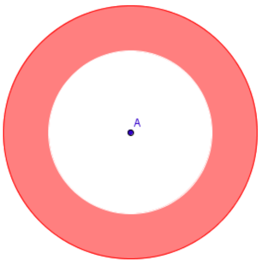
Problema_C2.

En una caja cuadrada de lado 10 cm se van a meter dos monedas antiguas, para ello se disponen de muchos tamaños, ¿de qué tamaño máximo aproximado se deben tomar para que encajen dos monedas en la caja?

¿Y si queremos meter tres monedas?

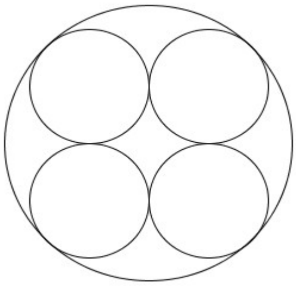
Problema_C3.

A partir de una corona circular, construye un círculo cuya área sea igual al área de la corona circular.



Problema_C4.

Realiza la construcción siguiente:



Encuentra la relación entre el radio de la circunferencia mayor y el radio de las circunferencias interiores.

Problema_C5.

En una circunferencia se trazan dos radios.

Construir una cuerda en la circunferencia que quede dividida en tres partes iguales por los dos radios.

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

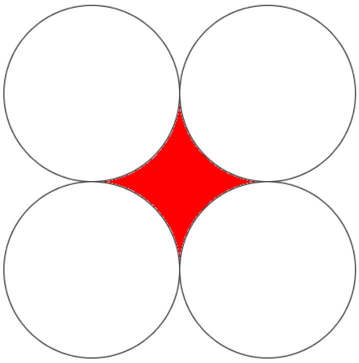
2ª Parte

C9.- ÁREAS

Este bloque lo dedicaremos a realizar distintas construcciones a partir de las cuales calcularemos áreas.

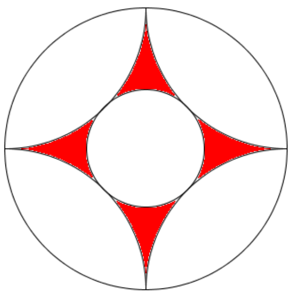
Cuatro círculos

Realiza la construcción de los cuatro círculos e intenta obtener el valor del área de la zona sombreada.



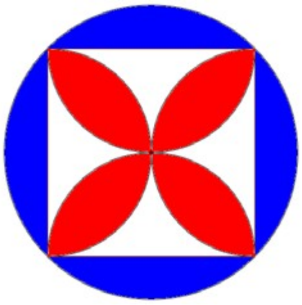
Arcos

Realiza la construcción que aparece en la figura e intenta calcular el área de la zona sombreada.



Más áreas

Una vez construida la figura, determina la relación entre el área de la zona de color rojo y la de color azul.

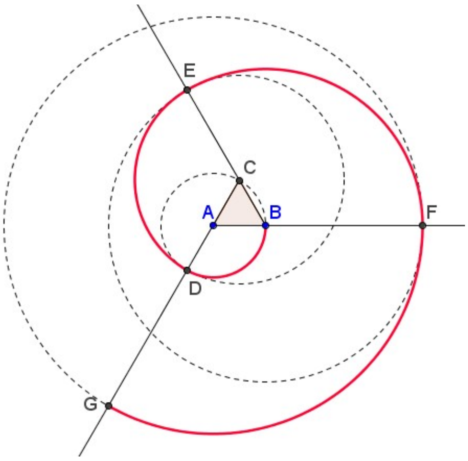


C10.- ESPIRALES

Espiral de tres centros

Utilizando las opciones que GeoGebra ofrece para dibujar arcos, dibuja la espiral de tres centros, siguiendo el proceso que aparece en la figura.

No olvides dibujar un triángulo equilátero para comenzar la construcción.



Dibuja ahora una espiral de cuatro centros.

C11.- TEOREMAS

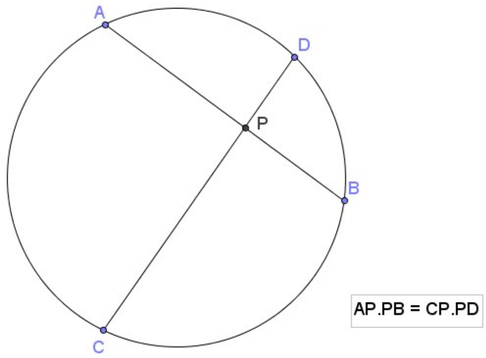
Tres circunferencias (Teorema de Johnson)

Dibuja tres circunferencias del mismo radio que pasen por un punto A. Cada dos de estas circunferencias se cortan en otro punto distinto de A. Traza la circunferencia que pasa por estos tres puntos. ¿Qué observas?

Dos cuerdas

En una circunferencia se dibujan dos cuerdas AB y CD que se cortan en un punto P.

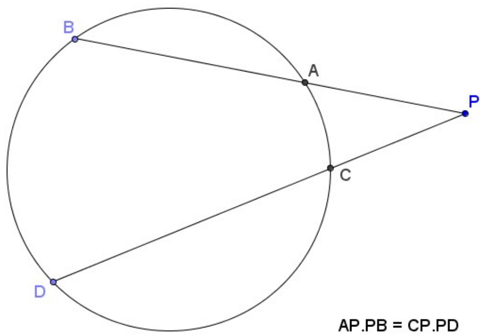
Comprobad que se verifica que $AP \times PB = CP \times PD$.



De las secantes

En una circunferencia se dibujan dos cuerdas AB y CD que se cortan en un punto P.

Si dos rectas secantes interceptan a una circunferencia, los segmentos cumplen la Relación $AP \; x \; PB = CP \; x \; PD$.

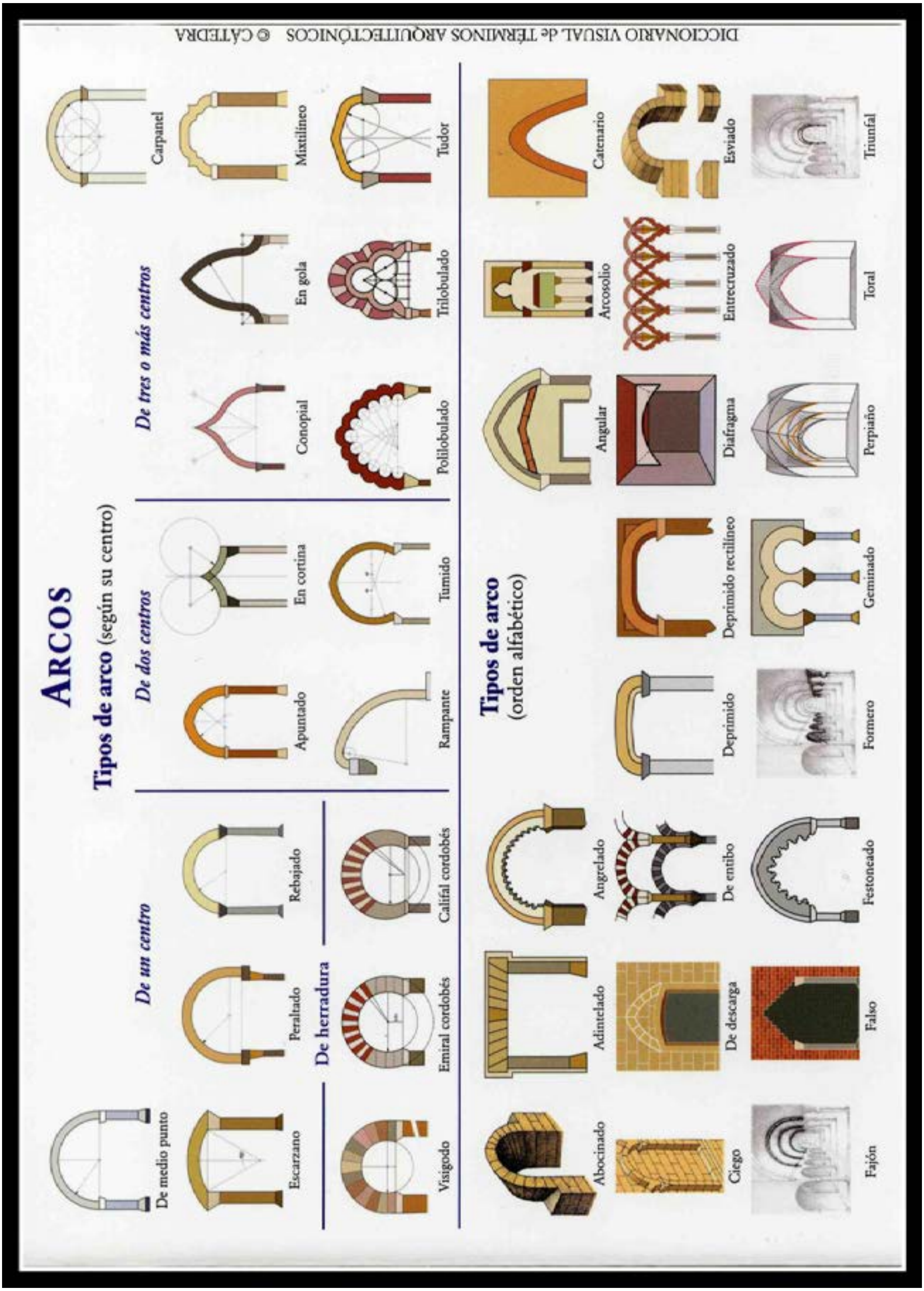


C12.- ÁREAS IGUALES

“Dividir un círculo en cuatro áreas iguales mediante circunferencias”
(Johannes de Muris, s. XIV)

Pista: A partir de un punto dela circunferencia, inscribe un hexágono, un cuadrado y un triángulo.

Para finalizar, os proponemos construir los distintos arcos que se pueden encontrar en el arte y la arquitectura.



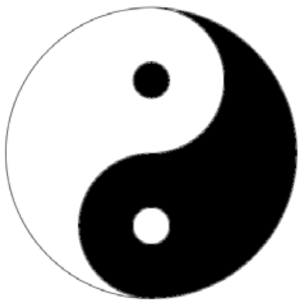
Para ello, os recomiendo la Web de José Antonio Mora, en la que podréis encontrar unos applets excelentes con las distintas construcciones.

http://jmora7.com/Arcos/index.htm

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO PROBLEMAS PROPUESTOS (2ª parte)

Problema_C6.

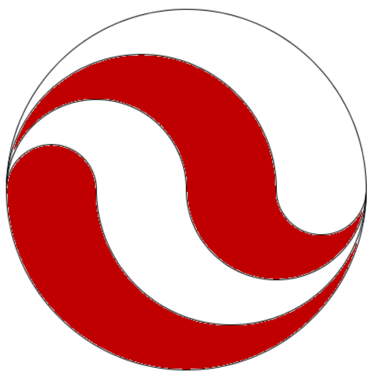
El Yin-Yang es un símbolo místico en cuya construcción se utilizan circunferencias y semicircunferencias.



La parte oscura es el Yin y la clara es el Yang. Realiza la

construcción de este símbolo.

Intenta generalizar el símbolo para obtener algo similar a la siguiente figura:



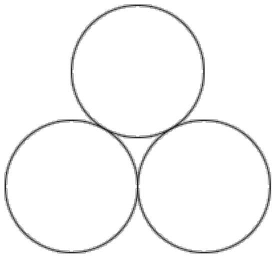
Determina el área y el perímetro de la parte blanca.

Problema_C7.

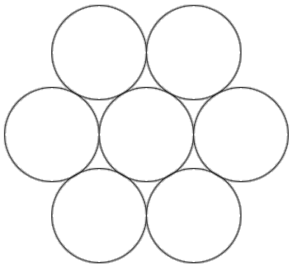
Sea A uno de los puntos comunes de dos circunferencias. Dibuja una recta que pasando por A determine cuerdas de igual longitud en cada una de las circunferencias.

Problema_C8.

Realiza la siguiente construcción en la que hay tres circunferencias tangentes.



Puedes intentar ampliar la figura para obtener la siguiente:



Problema_C9.

A partir de cuatro puntos no alineados, encuentra una circunferencia que esté a la misma distancia de los cuatro puntos.

Tema 2: POLÍGONOS
1ª parte

INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a trabajar con polígonos de más de tres lados, trabajaremos los triángulos más adelante. Vamos a clasificar los cuadriláteros atendiendo a sus lados y también a sus diagonales. También trabajaremos con polígonos regulares en los que vamos a identificar su apotema y sus diagonales. Vamos a diferenciar entre polígonos cóncavos y polígonos convexos, y vamos a poder comprobar que GeoGebra es una potente herramienta para resolver situaciones de áreas y perímetros.

P1.- Actividades de investigación

A) Dados dos puntos fijos A y B

- ¿Cómo debe estar colocado un tercer punto C para que se pueda construir un cuadrado que tenga A, B y C como vértices del mismo?
- ¿Y un rectángulo?
- ¿Y un trapecio regular?

B) Construye un cuadrado a partir del segmento correspondiente al lado.

- ¿Es posible dibujar un cuadrado a partir del segmento correspondiente al lado utilizando la herramienta Rota objeto en torno a un punto el ángulo indicado?
- Intenta generalizar este método para dibujar cualquier polígono regular.

C) Dado un segmento AB, construir un cuadrado en el que una de sus diagonales sea el segmento AB.

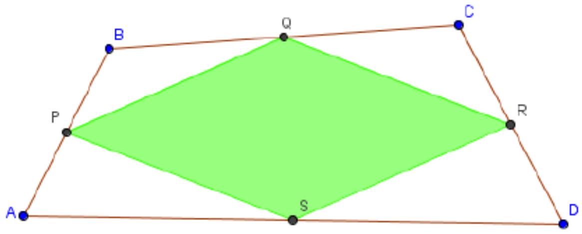
D) Construye diversos cuadriláteros: un cuadrado, un rectángulo, un rombo, un romboide, un trapecio y un trapezoide.

E) Construye un hexágono regular sin utilizar la herramienta de polígono regular que ofrece GeoGebra, como si utilizaras regla y compás.

F) Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos en un polígono. Dibuja un cuadrilátero cualquiera y haz una clasificación de los cuadriláteros atendiendo a sus diagonales (Cuadrado, Rectángulo, Rombo, Romboide, Paralelogramo, Trapecio, Trapezoide).

P2.- Cuadrilátero de Varignon

El cuadrilátero de Varignon PQRS se obtiene al unir los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera ABCD.

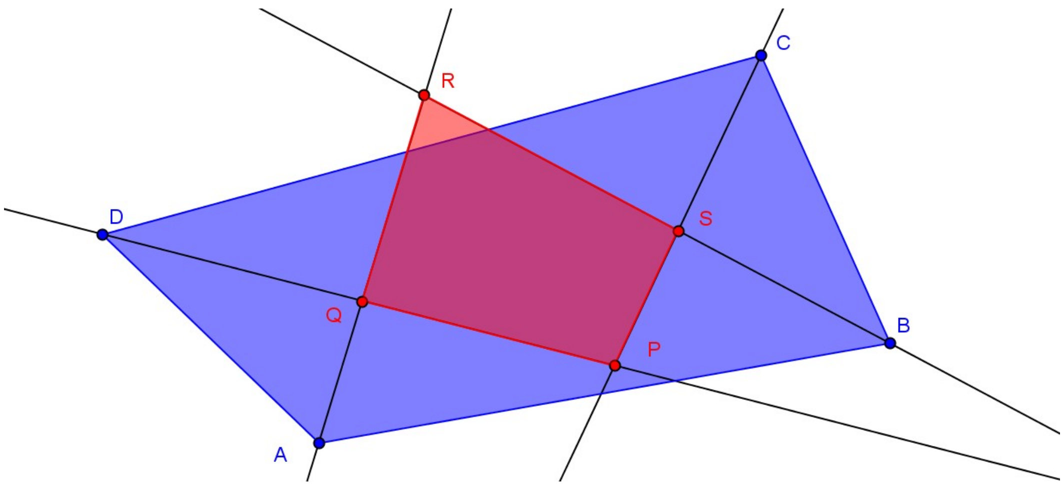


Dibuja un cuadrilátero y traza el cuadrilátero de Varignon.

- Comprueba que el cuadrilátero de Varignon es un paralelogramo.
- Comprueba igualmente que el área del cuadrilátero de Varignon es la mitad del área del cuadrilátero inicial.
- Dibuja las diagonales del cuadrilátero ABCD para investigar cuando el cuadrilátero de Varignon será un rectángulo.
- ¿Y cuándo será un cuadrado?

P3.- tividad para investigar

Si en un cuadrilátero ABCD se trazan las bisectrices de los ángulos interiores, las bisectrices de dos ángulos contiguos se cortan en un punto. Llamamos a estos puntos P, Q, R y S. Clasifica el cuadrilátero PQRS según sea el cuadrilátero inicial ABCD.



P4.- POLÍGONOS REGULARES

A) Dibuja un cuadrado que tenga 4 unidades de lado (Utiliza la herramienta *Polígono*)

¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

Mueve los vértices para intentar obtener otro polígono que tenga:

a. El mismo perímetro. b. La misma área.

c. El mismo perímetro y la misma área.

Intenta hacer lo mismo para un cuadrado que tenga 3 unidades de lado.

¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

Mueve los vértices para intentar obtener otro polígono que tenga:

a. El mismo perímetro. b. La misma área.

c. El mismo perímetro y la misma área.

¿Qué diferencias hay entre los dos valores utilizados?

B) Los elementos de un polígono regular son los lados, la apotema y las diagonales, dibuja un polígono regular de cinco lados y señala los tres elementos con diferentes colores

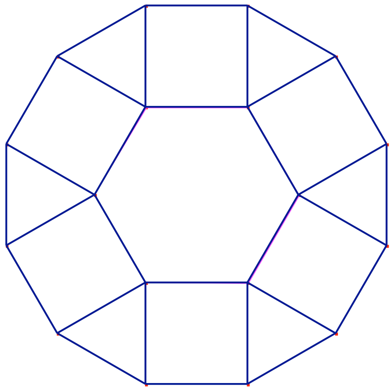
Dado un segmento AB y construye sobre él:

- Un triángulo equilátero
- Un cuadrado
- Un pentágono regular
- Un hexágono regular
- Y polígonos regulares de siete, ocho, nueve y diez lados. (Puedes definir un deslizador para que en una sola construcción puedas dibujar los ocho polígonos que se piden).

C) Utilizando la construcción anterior, rellena la siguiente tabla:

Nº de lados	3	4	5	6	7	8	…	12
Nº de diagonales								

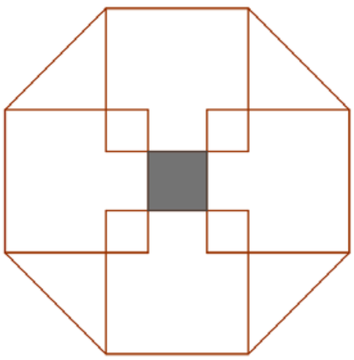
D) Dibuja un hexágono regular y sobre cada uno de sus lados construye un cuadrado. Une los vértices por medio de segmentos para obtener una figura similar a la siguiente:



- ¿Es regular esta figura?
- Puedes calcular el valor de la apotema en función de la medida del lado
- Si hacemos una construcción similar sobre los lados de un cuadrado. La figura obtenida ¿es un octógono regular?

P6.- Octógono Regular

Sobre los cuatro lados de un octógono regular de 1 unidad de lado se han dibujado cuatro cuadrados interiores de lado el mismo que el del octógono. Reproduce el dibujo y calcular el área de la zona sombreada



P7.- POLÍGONOS CÓNCAVOS Y CONVEXOS

Un polígono se llama convexo cuando al unir dos puntos cualesquiera de éste el segmento que los une se queda dentro del mismo, caso contrario, si algún segmento se sale completamente o en parte fuera del polígono diremos que es cóncavo.

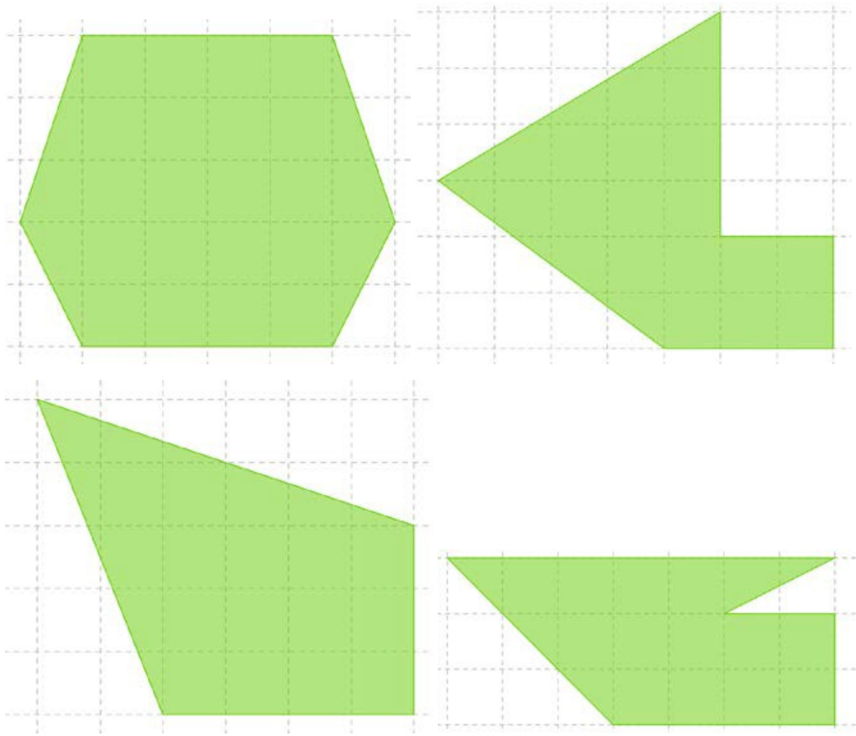
Dibuja un polígono cualquiera:

- Oculta todos sus vértices

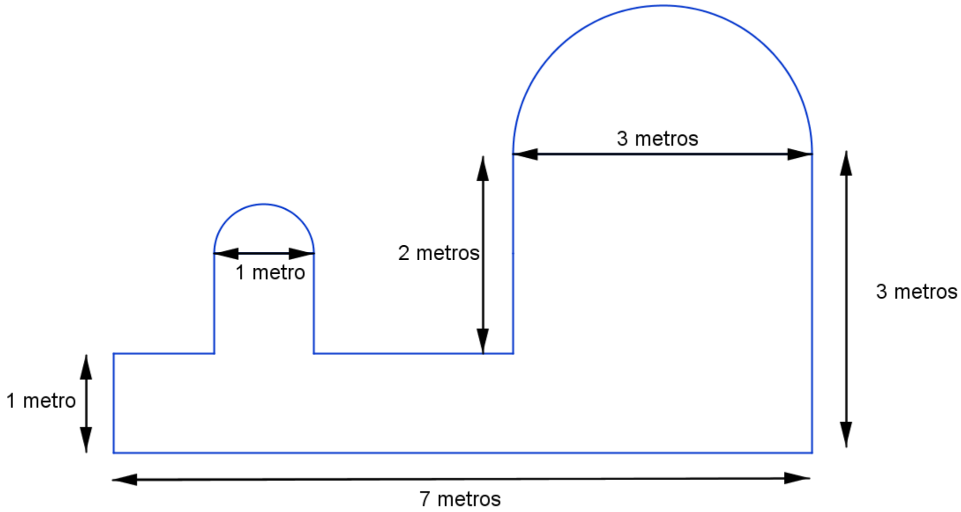
- Dibuja dos puntos P y Q sobre el polígono, mueve los puntos para comprobar que están bien construidos
- Dibuja el segmento PQ y pon este segmento de otro color y aumenta el grosor del trazo
- Comprueba moviendo los puntos como es el polígono que has construido, si es convexo o es cóncavo
- Sitúa el punto P sobre uno de los lados del polígono (no en un vértice) y activa la animación automática del punto Q
- Finalmente activa el rastro del segmento PQ y comprueba lo que ocurre, si tu polígono cambia por completo de color será convexo y si aparece otro polígono distinto al tuyo éste es cóncavo

P8.- ÁREAS Y PERÍMETROS

Realiza las siguientes construcciones y calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras, considerando el lado de la cuadrícula una unidad

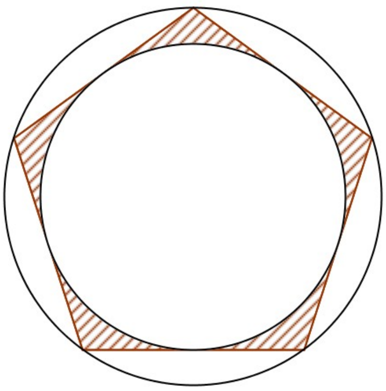


Construye una figura similar a la de la figura con GeoGebra y calcula su área.



Pentágono Regular

Realiza la siguiente construcción



¿Puedes hallar el área de la superficie rallada? Supongamos que el lado del pentágono regular es de 12 cm.

POLÍGONOS. PROBLEMAS PROPUESTOS (1ª parte)

Correspondientes a este primer bloque de contenidos os proponemos los siguientes retos para resolver con GeoGebra.

Problema_P1.

Dado un octógono regular, dibujar el cuadrado inscrito de mayor área y el cuadrado circunscrito de menor área y hallar la relación entre ambas áreas

Problema_P2.

Dibuja un cuadrado de lado 12 unidades utilizando la técnica de regla y compás (sin utilizar la herramienta cuadrado). Dibuja un cuadrado inscrito al anterior de área la tercera parte y averigua la relación que existe entre sus diagonales

Problema_P3.

En una urbanización se han construido siete casas iguales que distan 35 metros entre sí una de la otra. Se quiere vallar la urbanización con una valla en forma de cuadrado y además se quiere construir una piscina en el centro de la urbanización que equidiste de las siete viviendas.

Haz una construcción con GeoGebra de la situación descrita y calcula la longitud del vallado y la situación de la piscina. Si en lugar de siete viviendas fuesen ocho, ¿Cómo afectaría a la construcción?

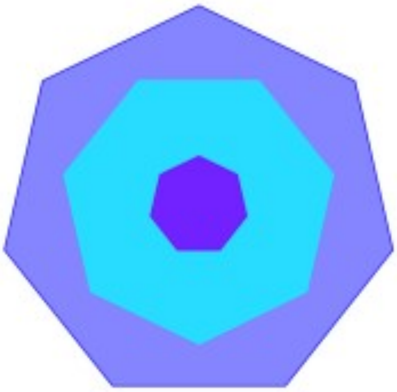
Problema_P4.

Construye un cuadrado cualquiera y otro que tenga doble de área que el primero.

Problema_P5.

Dado un heptágono regular, los puntos de corte de las diagonales definen otros dos heptágonos.

El mediano al unir los vértices de dos en dos, y el pequeño al unirlos de tres en tres. Comprueba que las proporciones de las áreas de ambos heptágonos son invariables sea cual sea el lado del heptágono.



POLÍGONOS

2ª Parte

P9.- INTRODUCCIÓN

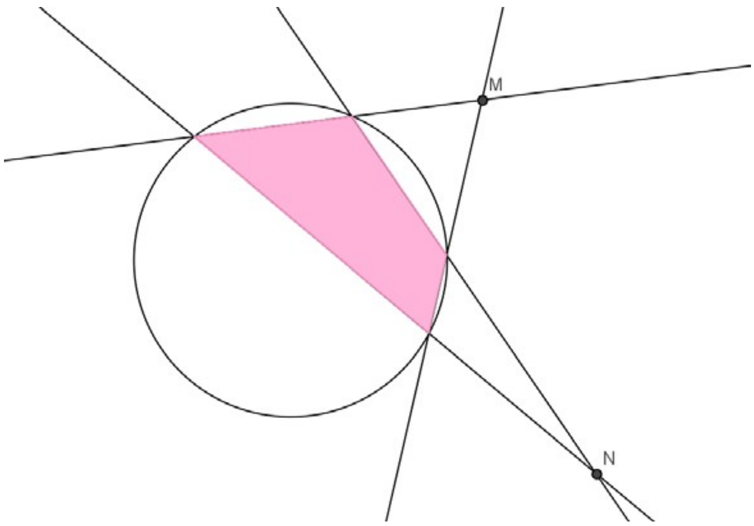
En esta segunda parte vamos a seguir trabajando con polígonos y vamos a incluir polígonos estrellados. De la misma manera, vamos a estudiar los ángulos en los diferentes polígonos regulares.

Actividades de Investigación

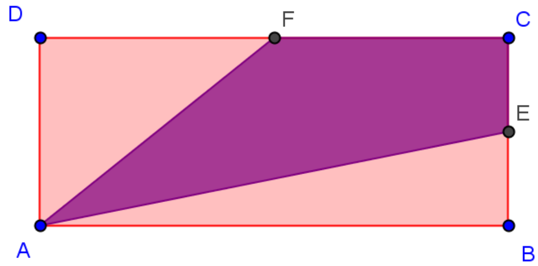
A) Dado un polígono cualquiera, construye un nuevo polígono de un lado menos cuya área sea igual a la del polígono inicial.

B) A partir de un polígono cualquiera, construye un nuevo polígono de un lado más y cuya área sea igual a la del polígono inicial.

C) Cuadriláteros cíclicos: Cuatro puntos de una circunferencia determinan un cuadrilátero que recibe el nombre de cíclico, obtenido uniendo cada punto con el punto contiguo. Si ABCD es un cuadrilátero cíclico, y M y N son los puntos de intersección de los lados opuestos. Comprueba que la intersección de las bisectrices de los ángulos en estos puntos M y N con el cuadrilátero inicial determinan cuatro puntos A', B', C' y D' que forman un rombo.



D) En el rectángulo ABCD, E es el punto medio del lado BC y F es el punto medio del lado CD. Dibuja el cuadrilátero AECF e intenta determinar su área en función del área del rectángulo inicial.



Geoplano

A) Activa la cuadrícula y la atracción de puntos a la cuadrícula.
Dibuja una figura cualquiera utilizando la herramienta *Polígono*.

Intenta dibujar en otra posición del geoplano otra figura distinta que tenga:

a. El mismo perímetro. b. La
misma área.

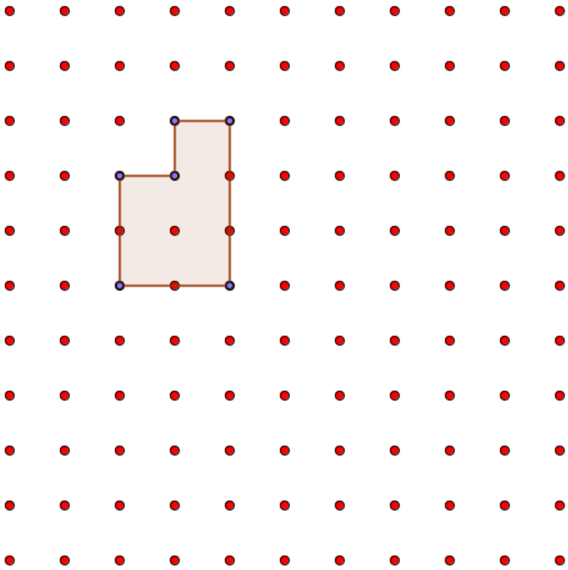
c. El mismo perímetro y la misma
área. d. El doble de perímetro.

e. La mitad del área.

unidad.

B) Crea todos polígonos que puedas de manera que solo tengan un punto interior. Calcula su área y su perímetro considerando que la distancia entre dos puntos es 1

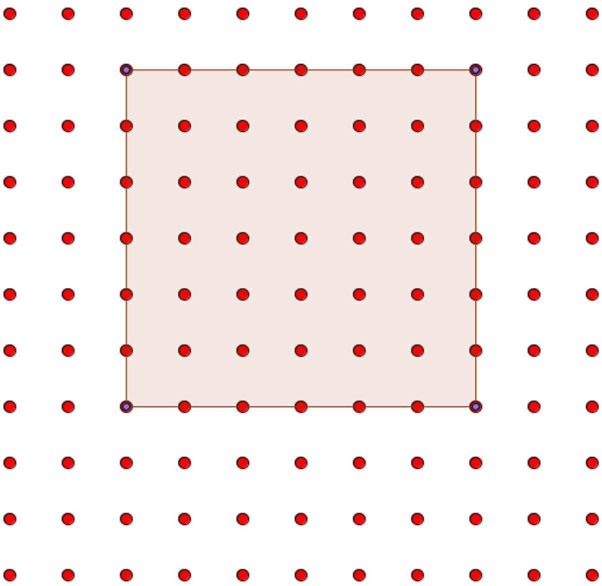
Averigua cuál tiene mayor perímetro y mayor área.



C) Dividir un cuadrado.

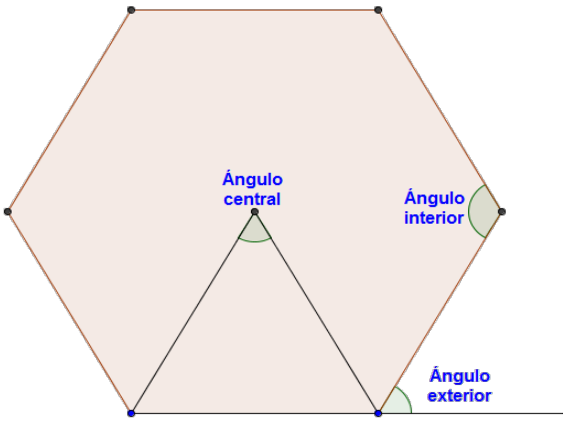
Aprovechando el geoplano que puedes construir en GeoGebra. Dibuja un cuadrado. Intenta dividirlo en dos partes de igual área.

¿Hay más de una forma de obtener la división anterior?



Ángulos de un polígono regular

En un polígono podemos dibujar los ángulos siguientes:



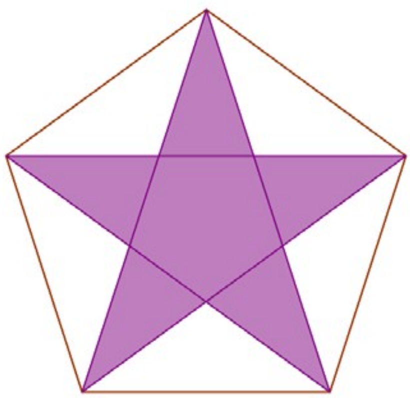
Investiga la medida de estos ángulos en los distintos polígonos regulares.

Encuentra alguna relación para determinar los ángulos para cualquier polígono regular en relación al número de lados del mismo

Polígonos estrellados

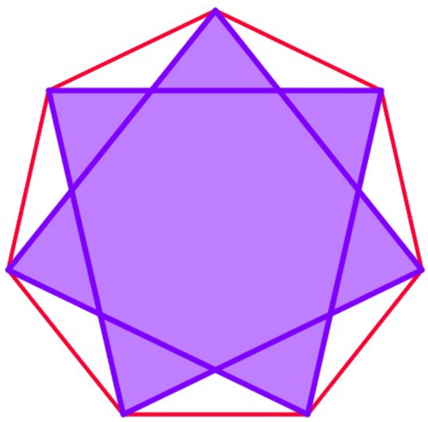
Si en un polígono regular unimos los vértices no consecutivos se obtienen los diferentes polígonos estrellados

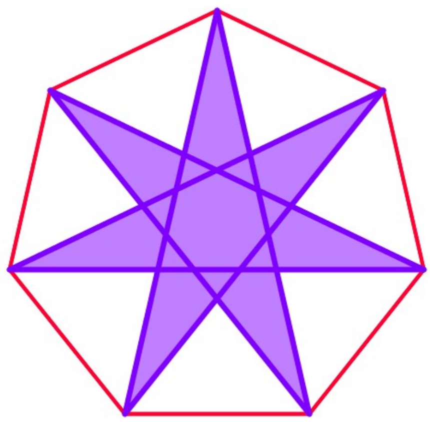
En el caso del pentágono regular lo podemos hacer uniendo los vértices cada dos,



obteniendo

Si partimos un polígono de siete lados podemos obtener dos polígonos estrellados





Encuentra todos los polígonos estrellados para polígonos regulares de 8, 9, 10 y 11 lados. ¿Qué conclusiones puedes sacar?

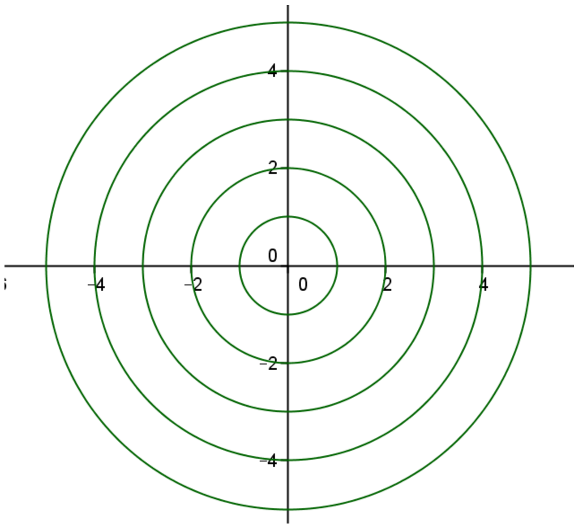
Comando Secuencia

El comando secuencia que nos permitirá obtener figuras que sigan un patrón.

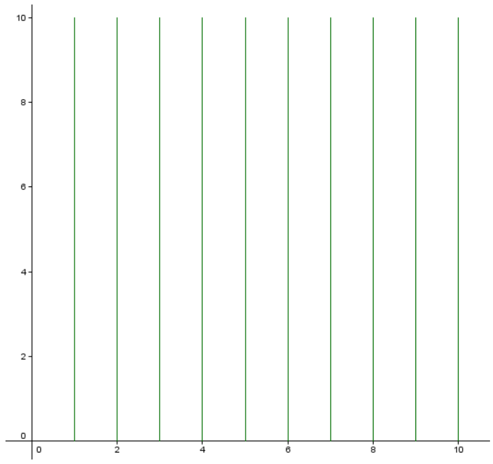
Es importante conocer la sintaxis que utiliza este comando que incorpora varios argumentos

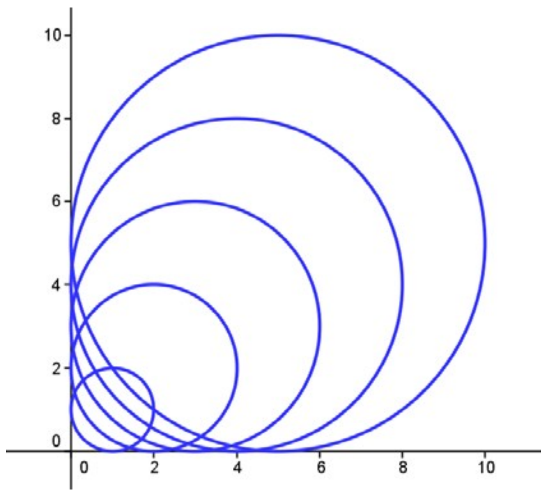
Secuencia[expresión, variable, valor inicial, valor final, incremento]

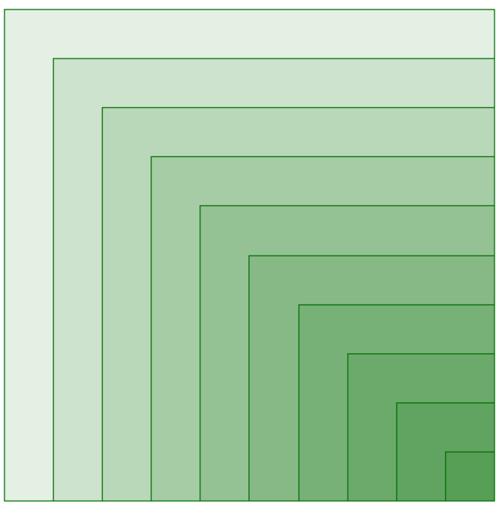
Por ejemplo, al introducir el comando: **Secuencia[Circunferencia[(0,0),r],r,1,5]** obtendremos cinco circunferencias concéntricas de centro (0,0) cuyos radios serán de 1, 2, 3, 4 y 5 unidades (el incremento de la variable es 1 por defecto)

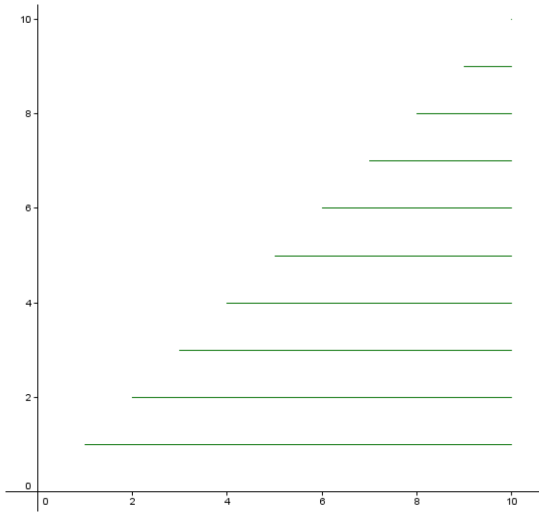


Dibuja las siguientes figuras geométrica utilizando los comandos **Segmento[A,B]**; **Polígono[A,B, n]** y **Circunferencia[A,r]**





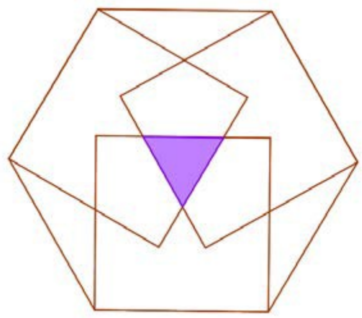




POLÍGONOS. PROBLEMAS PROPUESTOS (2ª parte)

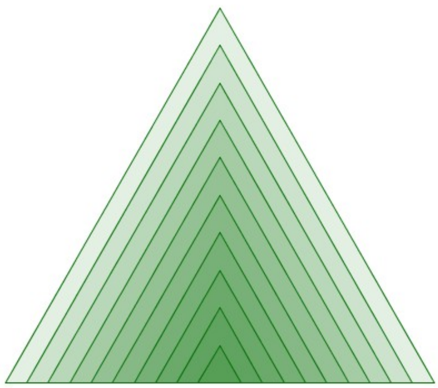
Problema_P6.

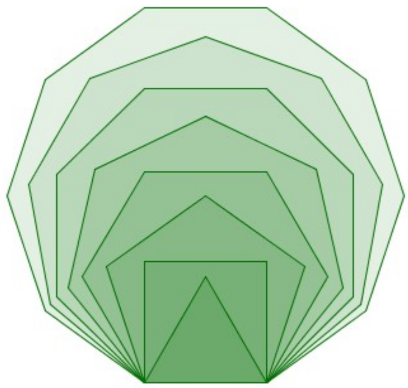
Reproduce la siguiente figura y halla el área del triángulo interior en función del hexágono regular inicial



Problema_P7.

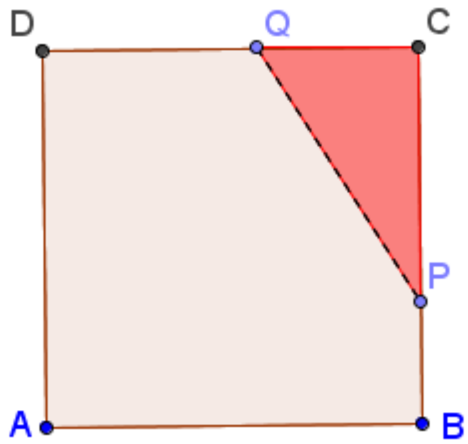
Utilizando el comando **Secuencia** reproduce las siguientes figuras

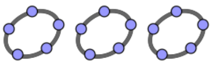




Problema_P8.

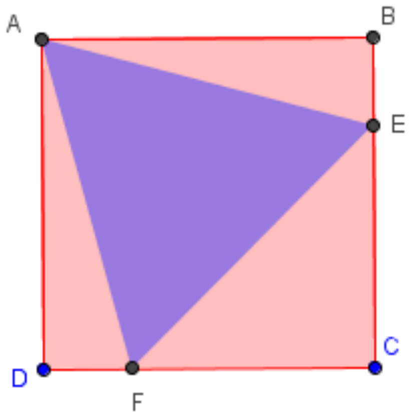
Dado un cuadrado ABCD, encuentra dos puntos P y Q; uno en el lado CD y otro en el lado BC, de forma que al cortar dicho cuadrado por el segmento PQ el área del triángulo sea la tercera parte del área del cuadrado.





Problema_P9.

Dado un cuadrado ABCD construye un triángulo equilátero de modo que sus vértices sean AEF, donde E es un punto sobre el lado BC y F un punto sobre el lado DC.

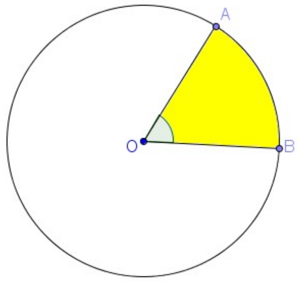


Tema 3: ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

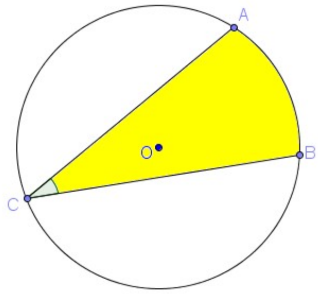
1ª parte

ÁNGULOS

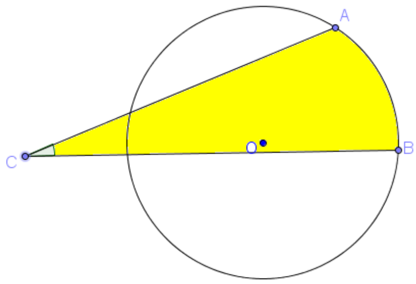
Antes de comenzar con las distintas actividades, proponemos dibujar y medir los distintos ángulos que se pueden trazar en la circunferencia.



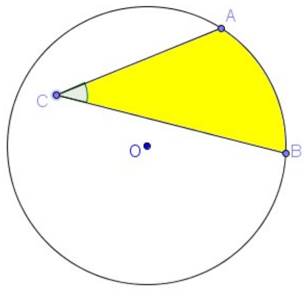
Ángulo central



Ángulo inscrito



Ángulo exterior



Ángulo interior

Para comenzar con este bloque de actividades se proponen unas investigaciones sencillas encaminadas a descubrir la relación entre distintos ángulos.

A1.- Actividades de investigación

Relación entre ángulos inscritos que abarcan el mismo arco

Realiza la siguiente construcción:

- Dibuja una circunferencia, marca tres puntos A, B y P sobre la circunferencia.
- Construye el ángulo inscrito APB.
- Mide el ángulo APB.
- Mueve el punto P.

¿Qué observas en la medida del ángulo cuando P recorre la circunferencia?

Construye un nuevo ángulo inscrito AQB y mueve cualquiera de los elementos que intervienen en la construcción anterior para estudiar la relación entre los dos ángulos anteriores.

Deduce qué relación hay entre dos ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco.

A2.- Relación entre un ángulo inscrito y su correspondiente ángulo central

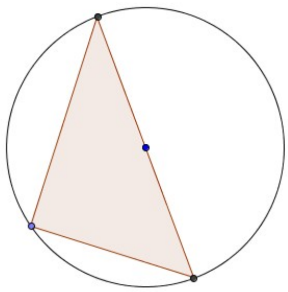
Realiza la siguiente construcción:

- Dibuja una circunferencia de centro O y dos puntos A y B sobre la circunferencia.
- Construye y mide el ángulo central AOB.
- Dibuja y mide un ángulo inscrito APB.

Mueve el punto P para estudiar la relación entre los dos ángulos anteriores y completa la siguiente propiedad: *"La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es ________________del correspondiente ángulo central"*.

A3.- Ángulos inscritos en una semicircunferencia

Realiza la construcción que aparece en la figura para estudiar la medida de un ángulo inscrito que abarca un arco correspondiente a una semicircunferencia.



A4.- Relación entre un ángulo exterior y los arcos que abarca

Dibuja un ángulo exterior a una circunferencia e intenta relacionar su medida con la de los dos arcos que abarca.

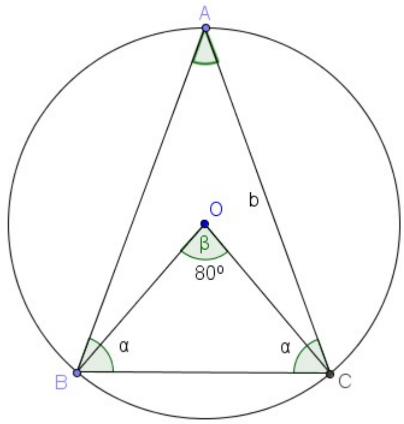
A5.- Relación entre un ángulo interior y el arco que abarca

Dibuja un ángulo interior a una circunferencia e intenta relacionar su medida con la del arco que abarca y la del arco opuesto.

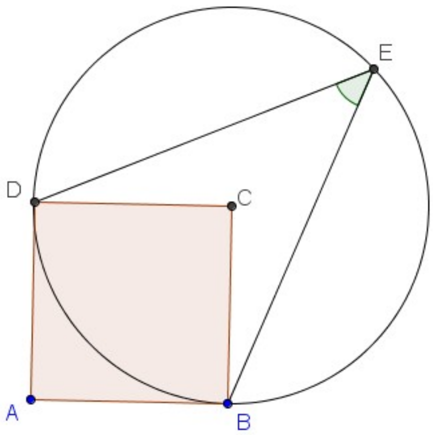
A6.- Medidas de ángulos

Averigua, con papel y lápiz, el valor del ángulo α sabiendo que el triángulo ABC es un triángulo isósceles.

Comprueba los resultados utilizando las correspondientes opciones para medir los ángulos.



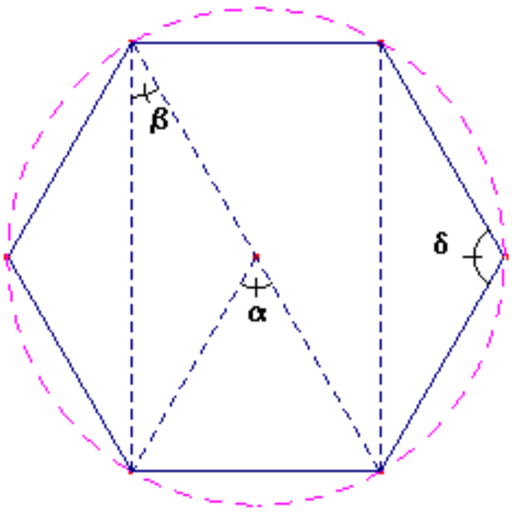
ABCD es un cuadrado y C es el centro de la circunferencia que aparece en la imagen siguiente:



Halla la medida del ángulo inscrito representado en la imagen.

A7.- ÁNGULOS EN UN POLÍGONO REGULAR

Intenta averiguar cuál es el valor de los ángulos marcados en la figura.



Utiliza las opciones del programa para comprobar tus resultados.

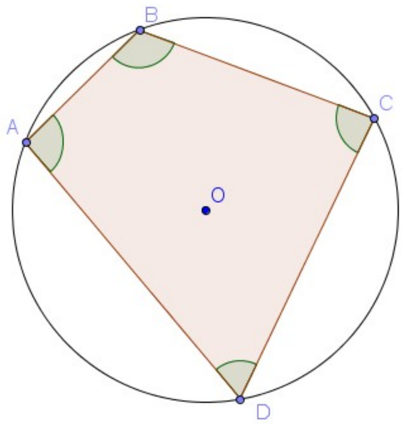
Completa la siguiente tabla:

POLÍGONO REGULAR	α	β	δ
Triángulo equilátero			
Cuadrado			
Pentágono			
Octógono			
Decágono			

Intenta generalizar las medidas de los ángulos anteriores para un polígono regular de lados.

A8.- CUADRILÁTERO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

Inscribe un cuadrilátero en una circunferencia y mide cada uno de los ángulos e intenta deducir relaciones entre ellos.



Una vez deducidas las relaciones entre los ángulos, comprueba qué ocurre al mover los distintos vértices del cuadrilátero.

¿Qué pasa cuando la circunferencia cambia de tamaño?

Un cuadrilátero cuyos vértices están sobre una circunferencia se denomina *cuadrilátero cíclico*.

¿Puedes enunciar la propiedad que debe cumplir un cuadrilátero para ser cíclico?

¿De los siguientes cuadriláteros cuáles son cíclicos?

- Trapecio isósceles.
- Rombo.
- Rectángulo.
- Cuadrado.

A9.- CUERDAS

Dibuja una circunferencia de centro O y dos cuerdas AB y CD iguales.

A continuación, traza los radios OA, OB, OC, OD y mide los ángulos AOB y COD.

Deduce la relación existente entre los ángulos centrales que corresponden a dos cuerdas iguales.

Ahora, dibuja en otra circunferencia de centro O, dos cuerdas AB y CD que no sean paralelas y de distinto tamaño.

Dibuja a continuación las rectas perpendiculares a cada una de las cuerdas por el centro de la circunferencia.

Contesta las cuestiones siguientes:

a. ¿Qué tipo de triángulos son AOB y COD?

b. ¿Qué representa la perpendicular anterior en cada uno de los triángulos?

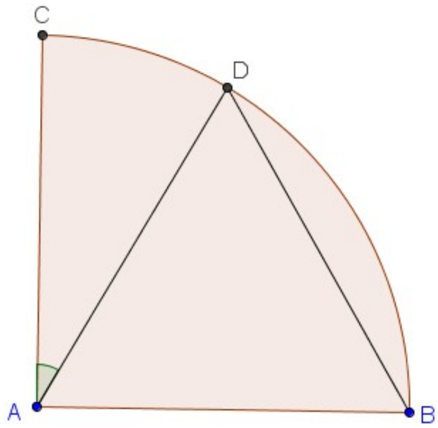
c. ¿Por dónde pasa la perpendicular anterior con respecto a cada una de las bases?

ÁNGULOS. PROBLEMAS PROPUESTOS (1ª parte)

Problema_A1.

ABC es un cuarto de circunferencia y AD=DB.

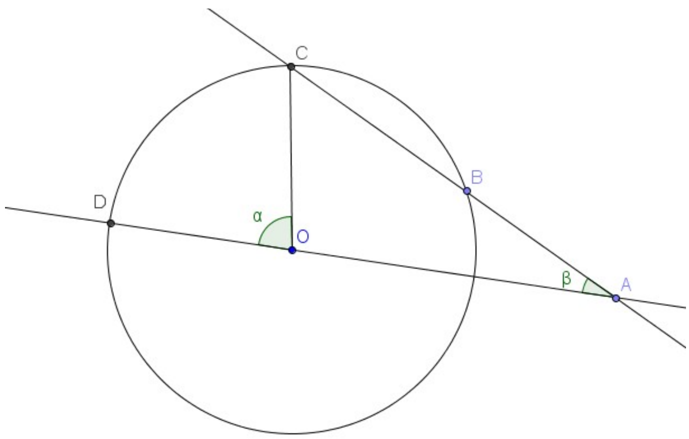
Realiza la construcción de la imagen y determina el valor del ángulo representado.



Problema_A2.

Dada la circunferencia de centro O, desde el punto A se traza la secante ABC, de modo que AB sea igual al radio de la circunferencia, y se traza AOD que pasa por el centro.

Encontrar la relación entre los dos ángulos representados en la figura.



Problema_A3.

El ortocentro es el punto de corte de las alturas de un triángulo.

Utilizando las propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia, intenta encontrar el ortocentro de un triángulo.

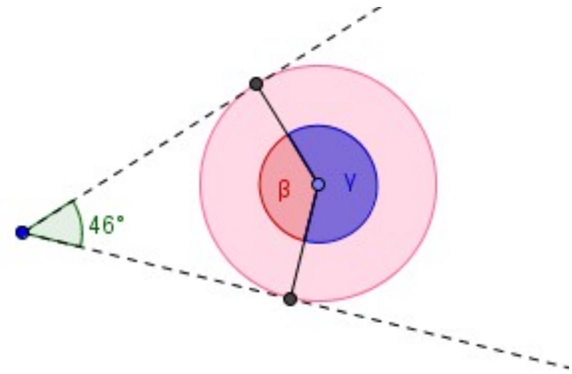
Para encontrar el ortocentro es conveniente utilizar la relación existente en un ángulo inscrito en una semicircunferencia.

Te ayudaremos un poco.

Dibuja la circunferencia cuyo diámetro es uno de los lados del triángulo, por ejemplo el lado AC.

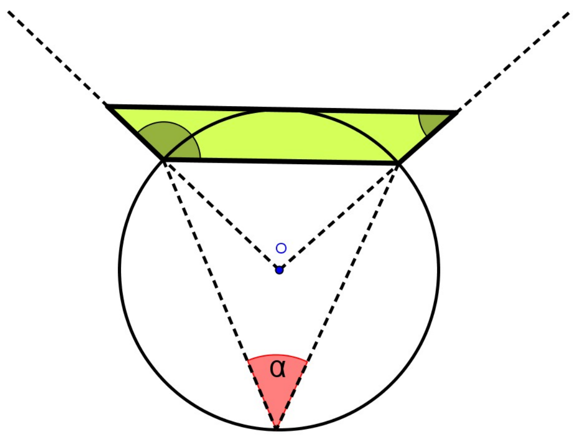
Problema_A4.

Dos tangentes a una circunferencia forman un ángulo de 46º ¿Cuánto mide el menor de los ángulos, β, que forman en la circunferencia?



Problema_A5.

Sea una circunferencia de centro O. Reproduce la siguiente figura y calcula los ángulos del trapecio isósceles en función del ángulo α.



ÁNGULOS

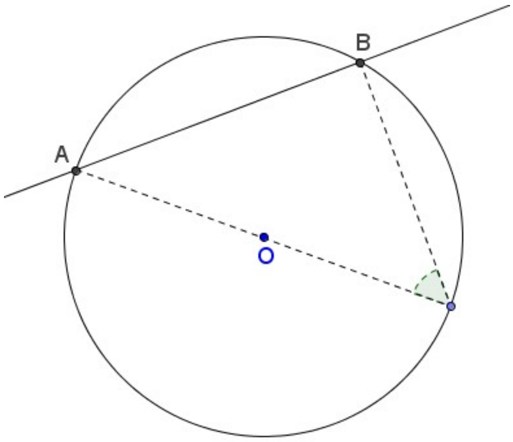
2ª Parte

MEDIDAS DE ÁNGULOS

A10.- Actividad

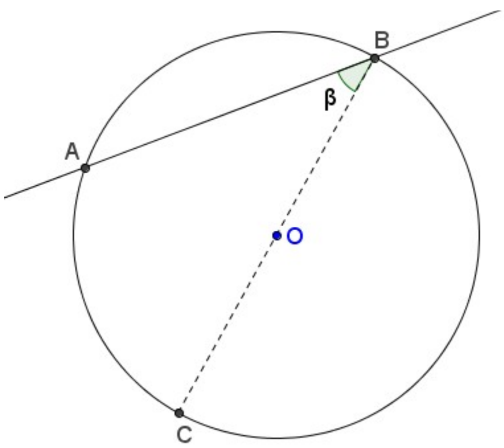
Al trazar una secante cualquiera a una circunferencia, determina dos arcos. Sea AB uno de esos arcos.

Determina el valor de los ángulos inscritos cuyos lados pasan por los puntos de intersección de la secante con la circunferencia.



A11.- Actividad

Sea AB uno de los arcos determinados por una secante sobre una circunferencia y β el ángulo determinado por la secante y el diámetro que aparece representado en la figura siguiente:



Intenta determinar en función del valor de AOB, la medida del ángulo β.

A12.- Actividad

Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia de centro O. La altura trazada por el punto A corta a la circunferencia en un punto H. Sea A’ el punto diametralmente opuesto al punto A.

Determina la relación entre los ángulos BAA’ y CAH.

¿Qué ocurre con las bisectrices de los ángulos BCA y AA´H?

A13.- Actividad

En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia ¿qué relación hay entre los ángulos opuestos?

¿Cuál es la relación entre estos ángulos cuando el cuadrilátero es circunscrito a una circunferencia?

RELACIONES ENTRE ÁNGULOS

A14.- Actividad

Dibuja un triángulo ABC inscrito en una circunferencia que sea rectángulo en A.

Traza la recta tangente a la circunferencia por el punto B. La bisectriz del ángulo en C corta a la recta AB en un punto P y a la recta tangente en un punto Q.

Comprueba que el triángulo PBQ es isósceles.

Intenta averiguar en qué condiciones será un triángulo equilátero.

A15.- Actividad

Un arco AB de una circunferencia se divide en dos partes iguales por el punto C.

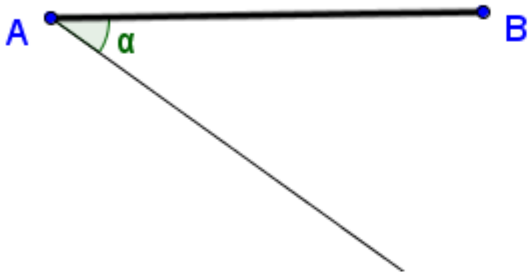
Desde el punto C se trazan las cuerdas CD y CE que cortan a AB en los puntos F y G, respectivamente.

Comprueba la relación existente entre los ángulos opuestos del cuadrilátero FGED.

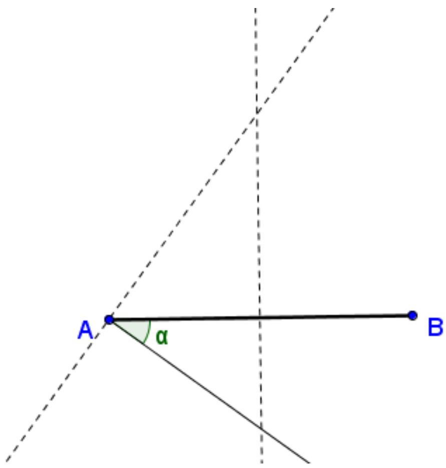
A16.- ARCO CAPAZ

El arco capaz de un segmento, para un ángulo dado, es el lugar geométrico de los puntos del plano desde los que el segmento se ve bajo el mismo ángulo.

A partir de un segmento AB y de un ángulo α vamos a obtener el arco capaz.

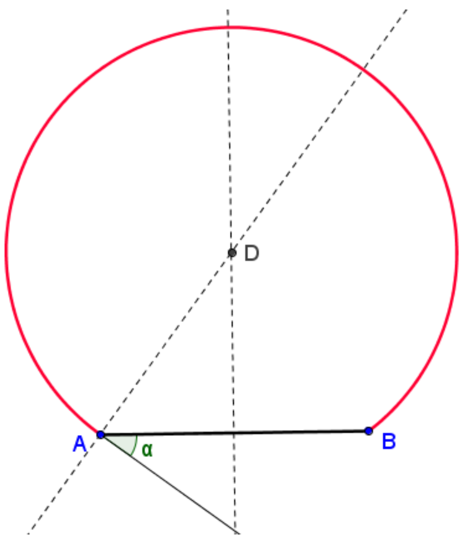


Trazamos la mediatriz del segmento AB y la recta perpendicular a la semirrecta que determina el ángulo α.

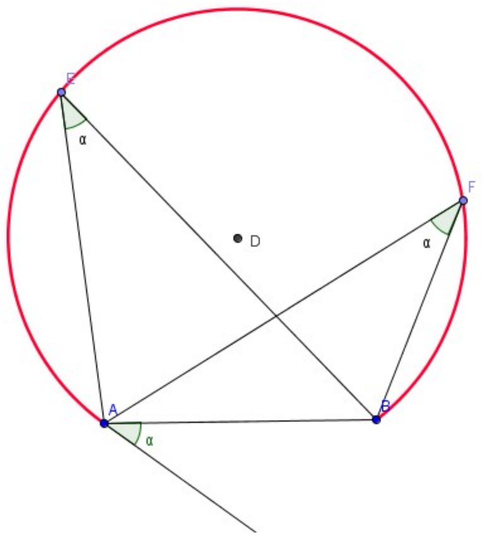


Sea D el punto de intersección de las dos rectas anteriores.

El arco capaz del segmento AB para el ángulo α es el arco trazado con centro en D que tiene por extremos los puntos A y B.



Podemos comprobar que todos los ángulos inscritos cuyo vértice esté sobre este arco, cuyos extremos sean A y B son de la misma medida e iguales a α.



A17.- Actividad

Intenta determinar cuál es el arco capaz para un segmento cualquiera y un ángulo recto.

La construcción del arco capaz se utiliza para resolver problemas como el enunciado a continuación.

Actividad 8

Desde un barco se divisan dos faros A y B formando un ángulo α y las posiciones del faro B y otro punto de la costa C se divisan con un ángulo β.

A partir de estos datos, con ayuda del arco capaz se puede determinar la posición del barco. Resolver este problema cuando $\alpha=75^{o}$ y $\beta=45^{o}$.

ÁNGULOS. PROBLEMAS PROPUESTOS (2ª parte)

Problema_A6.

Por el punto de tangencia de dos circunferencias se traza una secante

común. Deducid la relación entre los objetos siguientes:

a. Los radios trazados en los extremos de la secante

común. b. Las tangentes trazadas en esos mismos puntos.

c. La relación entre los ángulos centrales determinados en cada circunferencia por
los puntos anteriores y el punto de tangencia común.

Problema_A7.

En una circunferencia de centro O, se trazan dos radios perpendiculares OA y OB.

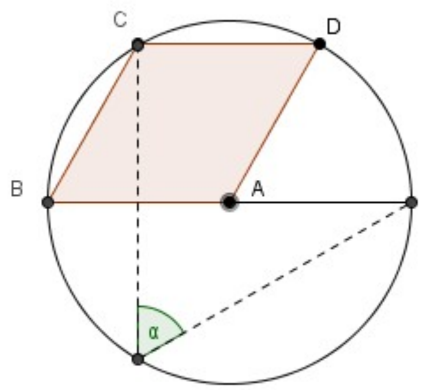
Sea P un punto cualquiera de OB. Traza la recta AP que cortará a la circunferencia en el punto C.

Traza la recta tangente a la circunferencia en el punto C que cortará a la prolongación del radio OB en D.

Intenta determinar qué tipo de triángulo es PCD.

Problema_A8.

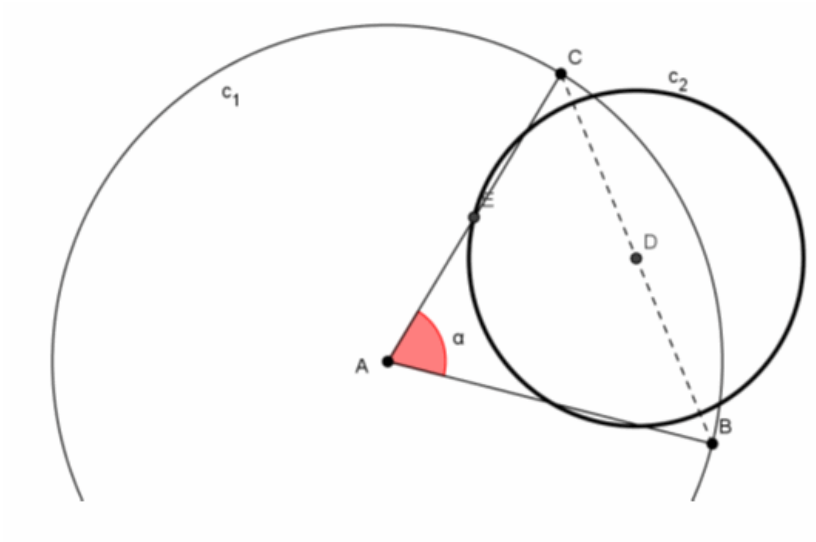
Si dibujamos un paralelogramo ABCD, como en la figura, dentro de una circunferencia,
¿Cuánto mide el ángulo α?



Problema_A9.

Sea una circunferencia c_1 de centro A; sobre ella tomamos dos puntos B y C, y construimos la circunferencia c_2 con centro en el punto D (punto medio de C y B) que pasa por E (punto medio de C y A).

¿Cuál tiene que ser la medida del ángulo α, para que la circunferencia c_2 sea tangente interior a c_1?



Tema 5-
CUADRILÁTEROS

1. INTRODUCCIÓN

En esta unidad te proponemos un viaje lleno de retos por el mundo de los cuadriláteros. Algunos miembros de esta familia ya te resultarán familiares: el cuadrado, el rectángulo, el rombo... Comenzaremos recordando algunas de sus características y, a continuación, de la mano de GeoGebra, te invitaremos a descubrir nuevas relaciones y propiedades de estos polígonos, algunas de ellas verdaderamente sorprendentes.

Al igual que en unidades anteriores ofreceremos actividades y materiales que puedan servir como punto de partida y también actividades de investigación para así poder crear materiales propios y poder compartir con los demás participantes, ese es el objetivo fundamental del club.

Actividades de introducción

¿Qué es un cuadrilátero?

Abre un fichero en blanco de GeoGebra. Selecciona la herramienta ***Polígono*** para construir un cuadrilátero. Haz clic consecutivamente en cuatro puntos cualesquiera de la vista gráfica y cierra el cuadrilátero haciendo nuevamente clic sobre el primer punto que has señalado.

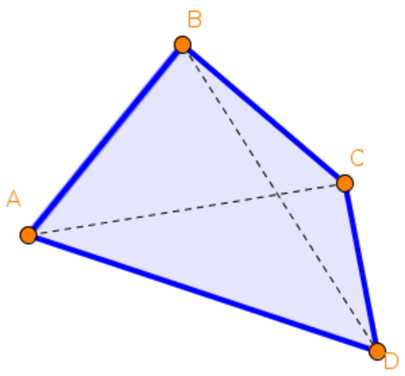
Cambia sus propiedades, utilizando la barra de propiedades: aumenta su grosor y cambia, si te parece oportuno, su color. También puedes cambiar el tamaño y color de los vértices del cuadrilátero.

Selecciona la herramienta ***Segmento entre dos puntos*** y traza las dos diagonales del cuadrilátero que has construido. Cambia sus propiedades: elige un tipo de línea discontinua.

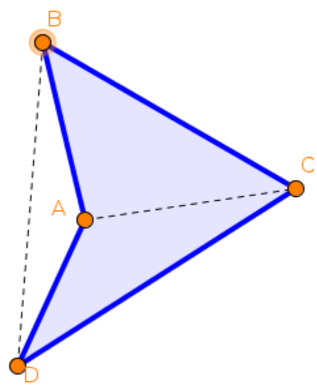
Selecciona ahora la herramienta ***Elige y mueve***. Mueve alguno de los vértices del cuadrilátero, para cambiar así la forma del cuadrilátero que has construido.

En función de la posición de los vértices, puedes obtener cuadriláteros convexos (todos sus ángulos interiores miden menos de 180º) o cóncavos (uno de sus ángulos interiores mide más de 180º), como los representados a continuación:

Cuadrilátero convexo

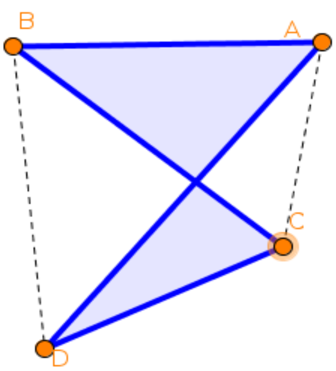


Cuadrilátero cóncavo



Pero, dado que los vértices se pueden mover libremente, también podemos obtener figuras similares a la siguiente, en la que los lados aparecen entrelazados:

Cuadrilátero entrelazado



¿Cómo deberíamos definir un cuadrilátero si esa tercera situación, con los lados entrelazados, también ha de considerarse como cuadrilátero? ¿Y cuál debería ser la definición en caso contrario?

En lo que sigue consideraremos únicamente cuadriláteros cóncavos y convexos, a los que llamaremos cuadriláteros simples.

Clasificación de los cuadriláteros

Las relaciones entre los lados y los ángulos de los cuadriláteros nos sirven para clasificarlos. En esta actividad vamos a tratar de revisar los criterios de clasificación que utilizamos habitualmente para la clasificación de los cuadriláteros.

Carga la actividad “Clasifica cuadriláteros”

(http://www.geogebratube.org/student/m62825)

Mueve los puntos y trata de formar todos los cuadriláteros posibles. Te aparecerá en cada caso el nombre del cuadrilátero construido. Fíjate en las características de cada uno de ellos: activa las casillas correspondientes y observa cómo son sus lados y sus ángulos (si son paralelos o no, si son iguales, si son iguales dos a dos, etc.) y sus diagonales. A continuación contesta a las siguientes preguntas:

- ¿Qué cuadriláteros tienen los 4 lados iguales?
- ¿Qué cuadriláteros tienen los 4 ángulos iguales?
- ¿Hay algún cuadrilátero que tenga los 4 lados y los 4 ángulos iguales?
- ¿Qué cuadriláteros tienen lados paralelos?
- ¿Son iguales los lados opuestos de un trapezoide?
- ¿Son iguales los ángulos opuestos de un romboide?
- ¿Qué cuadriláteros tienen los lados no paralelos?
- ¿Qué cuadriláteros tienen los ángulos opuestos iguales?

2. CUADRILÁTERO DE PUNTOS MEDIOS

Carga la actividad “Cuadrilátero medio”.

http://www.geogebratube.org/student/m62865

Los vértices del cuadrilátero son puntos libres, de modo que puedes moverlos y cambiar la forma del cuadrilátero. Elige la herramienta  ***Punto medio*** y marca los puntos medios de los lados del cuadrilátero. Elige ahora la herramienta ***Polígono*** y construye el cuadrilátero formado por los puntos medios. Vamos a llamar cuadrilátero medio al cuadrilátero así obtenido. ¿Reconoces su forma? ¿Qué tipo de cuadrilátero es? ¿Te atreves a hacer alguna conjetura?

- Mueve los vértices del cuadrilátero inicial y forma otros cuadriláteros convexos. Observa qué ocurre con el cuadrilátero medio, ¿se cumple lo que habías pensado?

- Prueba ahora con cuadriláteros cóncavos, ¿sigue cumpliéndose tu conjetura?

- Vamos a tomar ahora algunas medidas para contrastar lo que observas. Utiliza la herramienta ***Distancia o Longitud*** para medir las longitudes de los lados y la herramienta ***Ángulo*** para medir la amplitud de los ángulos del cuadrilátero medio. Mueve ahora los vértices y observa la variación de las medidas que has tomado. A la vista de tus observaciones, ¿qué tipo de cuadrilátero es?

- Traza ahora las diagonales del cuadrilátero medio y marca su punto de intersección. Utiliza para ello las herramientas ***Segmento entre dos puntos*** e ***Intersección de dos objetos***. Observa atentamente la construcción. ¿Puedes demostrar ahora tu conjetura?

- También hay una relación importante entre las áreas del cuadrilátero inicial y de su cuadrilátero medio. Haz clic en ***reiniciar***. Activa la casilla Áreas y mueve el deslizador que aparece. Observa lo que ha ocurrido. ¿Qué relación hay entre el área del cuadrilátero inicial y el área de su cuadrilátero medio? Mueve ahora los vértices del cuadrilátero inicial. ¿Se verifica siempre esa relación?

Ahora seguramente entenderás por qué al cuadrilátero de puntos medios se le conoce por el nombre de **Paralelogramo de Varignon**. Más adelante estudiaremos algunas cosas más sobre este paralelogramo.

3. CUADRILÁTERO CÍCLICO

Abre un archivo nuevo de GeoGebra. Selecciona la herramienta ***Circunferencia dados su centro y radio*** y construye una circunferencia de centro en un punto cualquiera de la vista gráfica y radio 4 unidades (procura que la circunferencia quede centrada en la vista gráfica). Crea ahora 4 puntos sobre la circunferencia, utilizando la herramienta ***Punto nuevo***. Construye ahora el polígono formado por estos 4 puntos.

Llamamos cuadrilátero cíclico a aquél que se puede inscribir en una circunferencia. El cuadrilátero que has construido es, por tanto, un cuadrilátero cíclico. Pero, ¿son cíclicos todos los cuadriláteros? ¿Qué condición se ha de cumplir para que un cuadrilátero sea cíclico? Vamos a investigarlo.

Selecciona la herramienta ***Ángulo*** y crea los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero. Para ello, una vez seleccionada la herramienta, señala tres vértices consecutivos del cuadrilátero, en el sentido de las agujas del reloj, para construir el ángulo formado en el segundo de los vértices seleccionados.

Calcula la suma de los ángulos opuestos: $\alpha+\gamma$ y también $\beta+\delta$. Para ello, escribe en la barra de entrada, uno tras otro, los siguientes textos:

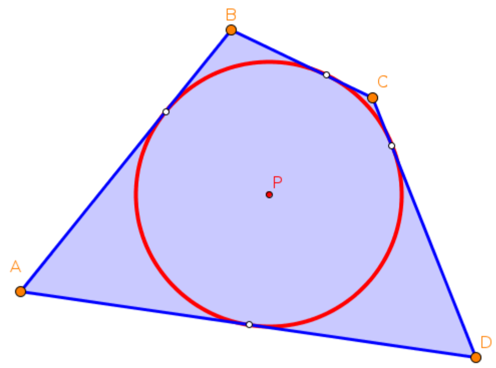
"α+γ="+(α+γ)   "β+δ="+(β+δ)

Mueve los vértices del cuadrilátero, ¿se mantiene constante el valor de esas sumas? ¿Sabrías justificar por qué? Tal vez te venga bien recordar la relación que existe entre el ángulo inscrito en una circunferencia y el ángulo central que abarcan el mismo arco, que has visto en un tema anterior.

Basándote en lo que has descubierto, ¿es posible que un cuadrilátero cóncavo sea cíclico? ¿Por qué?

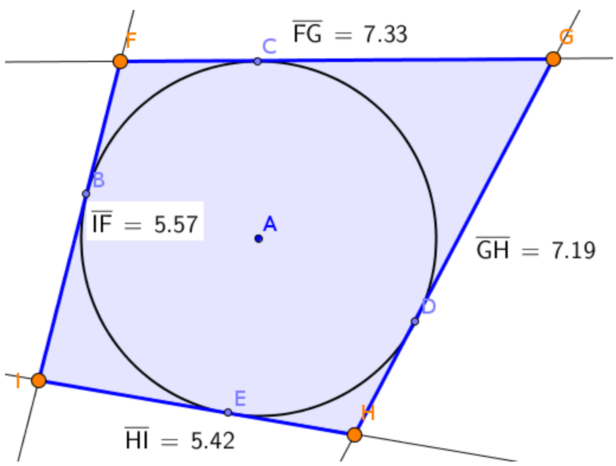
4. CUADRILÁTERO TANGENCIAL

Un cuadrilátero tangencial es aquél en el que se puede inscribir una circunferencia, de modo que todos sus lados sean tangentes a dicha circunferencia. Vamos a tratar de descubrir cuáles son las características de los cuadriláteros tangenciales.

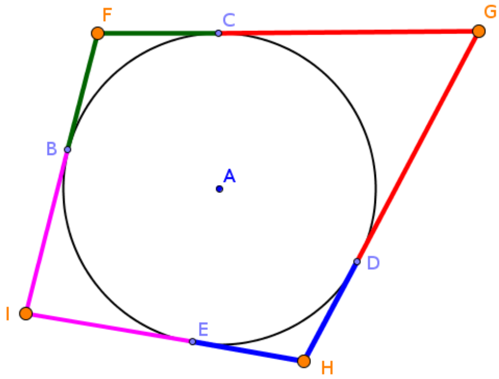


Abre un archivo nuevo de GeoGebra. Selecciona la herramienta ***Circunferencia dados su centro y radio*** y construye una circunferencia de centro en un punto cualquiera de la vista gráfica y radio 3 unidades (procura que la circunferencia quede centrada en la vista gráfica). Crea ahora 4 puntos sobre la circunferencia, utilizando la herramienta ***Punto nuevo***. Selecciona la herramienta ***Tangentes*** para trazar las tangentes a la circunferencia por los cuatro puntos que has creado. Para ello, en cada caso, haz clic sobre el punto y sobre la circunferencia. Crea ahora los puntos de intersección de las rectas tangentes, utilizando la herramienta ***Intersección de dos objetos***. Construye ahora el cuadrilátero formado por los cuatro puntos de intersección, utilizando la herramienta ***Polígono***. Por último, oculta las rectas tangentes.

Utiliza ahora la herramienta ***Distancia o Longitud*** para hallar las longitudes de los lados.



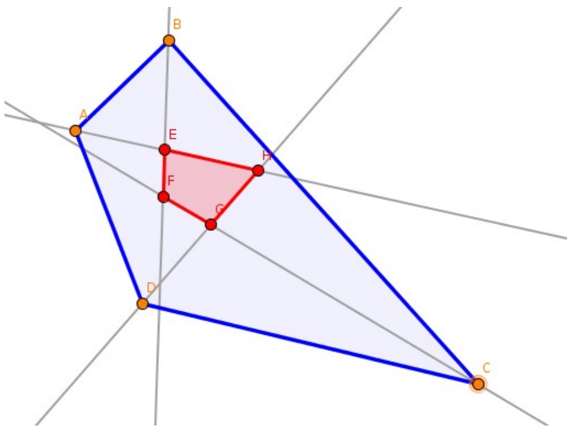
Suma las longitudes de los pares de lados opuestos. ¿Qué observas? Mueve ahora los puntos de tangencia con la circunferencia, para modificar el cuadrilátero. ¿Se mantiene constante dicha suma? ¿Sabrías justificar por qué? La siguiente figura te proporciona alguna pista:



- ¿Qué relación hay entre las longitudes de los segmentos que tienen el mismo color? ¿Por qué? ¿Qué ocurre cuando sumas las longitudes de dos lados opuestos?

5. UNA PROPIEDAD DE LAS BISECTRICES

Utilizando la herramienta  ***Polígono*** construye un cuadrilátero convexo. Selecciona a continuación la herramienta  ***Bisectriz*** y crea las bisectrices interiores de los ángulos del cuadrilátero. Observa que las bisectrices, al intersecar entre sí, forman un cuadrilátero. Utiliza las herramientas  ***Intersección de dos objetos*** y  ***Polígono*** para crear dicho cuadrilátero.



Mueve los vértices del cuadrilátero original y observa qué ocurre con el cuadrilátero formado por sus bisectrices interiores.

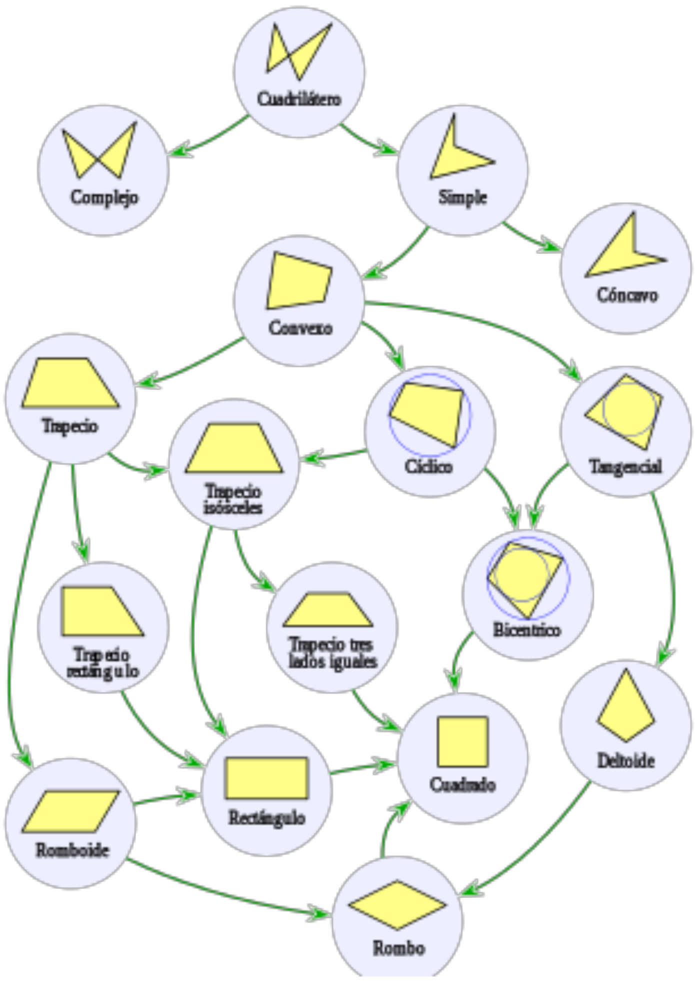
¿Puedes conseguir que las bisectrices sean concurrentes y, por tanto, el cuadrilátero formado por su intersección quede reducido a un punto? ¿Cómo tiene que ser el cuadrilátero inicial para lograrlo?

6. CLASIFICACION CON NUEVOS CRITERIOS

Abre un fichero en blanco de GeoGebra. Selecciona la herramienta ***Polígono*** y construye un cuadrilátero. Cambia sus propiedades, utilizando la barra de propiedades: aumenta su grosor y cambia, si te parece oportuno, su color. También puedes cambiar el tamaño y color de los vértices del cuadrilátero.

El siguiente diagrama representa una nueva forma de clasificar los cuadriláteros utilizando diferentes criterios de clasificación a los empleados en el apartado inicial.

Analiza los criterios de clasificación, sigue las conexiones y construye los diferentes tipos de cuadriláteros. Observa las características de aquellos cuadriláteros, como el cuadrado, que pertenecen a varias categorías.



CUADRILÁTEROS

RETOS PROPUESTOS

Reto 5.1.

- ¿En qué cuadriláteros son siempre iguales las dos diagonales?
- ¿En qué cuadriláteros se cortan siempre en ángulo recto sus diagonales?
- ¿En qué cuadriláteros las diagonales se cortan siempre en su punto medio?

Reto 5.2.

Traza las bisectrices de los ángulos formados por las prolongaciones de los lados de un cuadrilátero cíclico. Marca ahora los puntos de intersección de las bisectrices con los lados del cuadrilátero. A continuación construye el cuadrilátero que determinan los cuatro puntos de intersección que has obtenido. Comprueba que el cuadrilátero que se forma es siempre un rombo. ¿Sabrías demostrar por qué?

¿Cómo ha de ser el cuadrilátero inicial para que el cuadrilátero formado por los puntos de intersección de las bisectrices con sus lados sea un cuadrado?

Reto 5.3.

Se llaman cuadriláteros bicéntricos a aquellos que pueden inscribirse o ser inscritos en una circunferencia y, por tanto, son cíclicos y tangenciales. Uno de ellos es el cuadrado. Investiga otros casos.

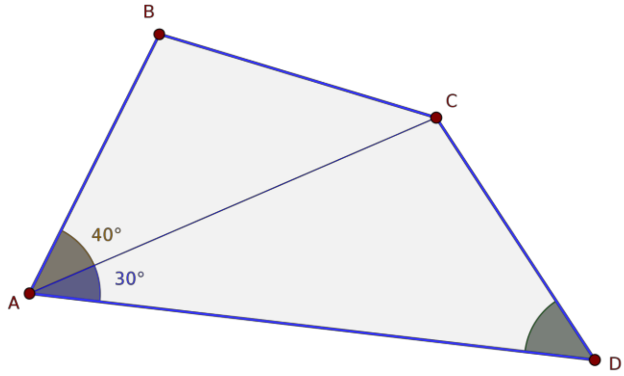
Reto 5.4.

Comprueba que si las bisectrices interiores de un cuadrilátero convexo determinan un cuadrilátero, éste es cíclico. ¿Sabrías demostrarlo?

Comprueba que si las bisectrices interiores de un cuadrilátero convexo son concurrentes, el cuadrilátero es tangencial. ¿Sabrías demostrarlo?

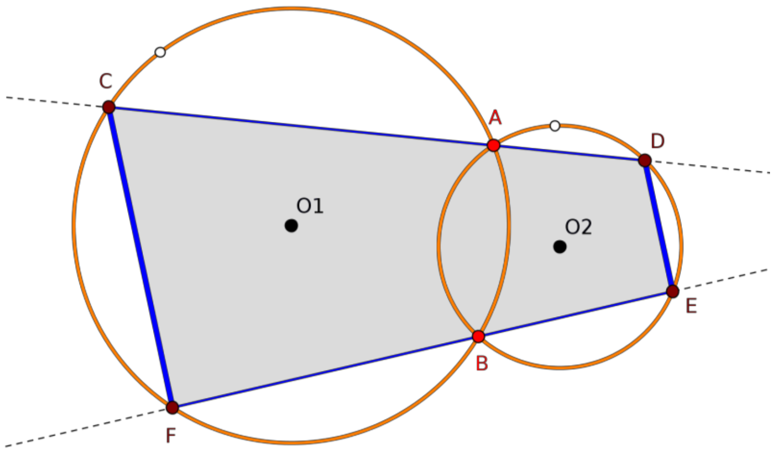
Reto 5.3.

En el cuadrilátero ABCD los lados AB, BC y CD tienen la misma longitud. Además conocemos los ángulos que forma la diagonal AC con los lados AB y AD, que miden 40º y 30º, respectivamente. Calcular la medida del ángulo ADC.



Reto 5.4.

Sean dos circunferencias de centros O1 y O2, secantes en los puntos A y B. Por los puntos A y B trazamos dos rectas, que intersecan a las circunferencias, además de en estos dos puntos, en los puntos C, D, E y F. Demostrar que son paralelos los lados CF y DE del cuadrilátero CDEF.



ESTADÍSTICA

INTRODUCCIÓN

GeoGebra ofrece diferentes comandos y opciones para facilitar hasta extremos insospechados, una vez más, todos los cálculos pesados y repetitivos que supone el trabajar con datos y su análisis. Además se usarán las posibilidades de la **Hoja de cálculo** y sus herramientas para trabajar con datos y presentar resultados de forma gráfica.

También presentaremos los gráficos con otras herramientas directas (y algunas indirectas aprovechando las posibilidades gráficas de GeoGebra).

Ofrecemos una primera parte de Iniciación. En la segunda parte abordaremos el cálculo de parámetros estadísticos y construcción directa de gráficos.

RECUENTO. TABLAS DE FRECUENCIAS

Hemos anotado el número de hermanos y hermanas que tiene el alumnado de dos clases de un Colegio. Queremos construir la tabla de frecuencias.

1 3 1 4 2   1 2 1 3 2

2 1 3 1 0   2 3 2 1 1

3 2 0 4 2   1 0 1 2 3

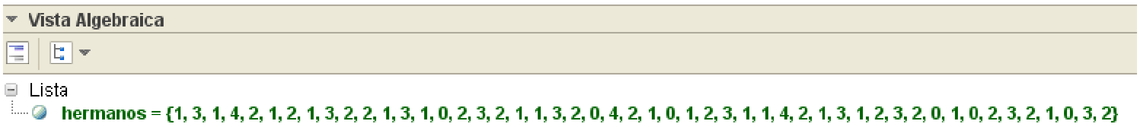
1 1 4 2 1   3 1 2 3 2

0 1 0 2 3   2 1 0 3 2

En GeoGebra accedemos a **Hoja de cálculo** a través del menú disponible en **Vista**. Introducimos los 50 datos anteriores.

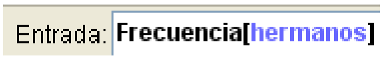
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	3	1	4	2	1	2	1	3	2
2	2	1	3	1	0	2	3	2	1	1
3	3	2	0	4	2	1	0	1	2	3
4	1	1	4	2	1	3	1	2	3	2
5	0	1	0	2	3	2	1	0	3	2

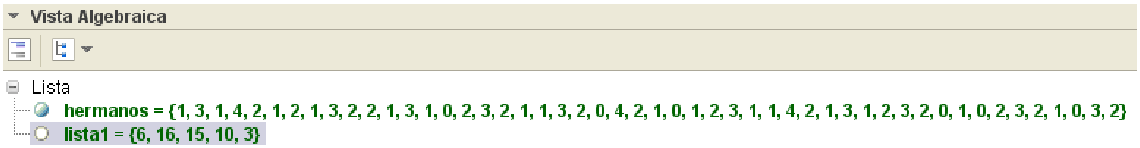
Seleccionamos ahora todas las celdas de la hoja y usamos la herramienta  para crear una lista de datos a la que llamaremos **hermanos**. Debemos tener activa la **Vista Algebraica** para que aparezca dicha lista en ella.



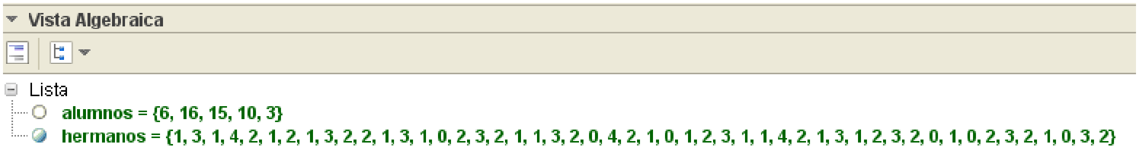
Para obtener los valores de las frecuencias absolutas usamos la barra de entrada en la forma

Escribimos el nombre de nuestra lista



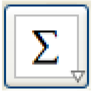


Cambiamos el nombre de la **lista1** con el botón derecho y usando **Renombra.**

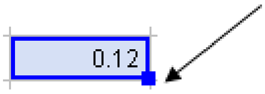


GeoGebra presenta las frecuencias con datos ordenados de la lista *hermanos* de menor a mayor, o sea, hay 6 alumnos con 0 hermanos, 16 con uno, etc.

Ahora vamos a construir una tabla de frecuencias al “estilo clásico” pero ayudándonos con GeoGebra. Para ello podemos abrir una **Nueva Ventana** para tener una nueva **Hoja de cálculo** o seguir trabajando en la ventana actual para tener los datos a la vista. Haremos esto último. A partir de la celda A7 ponemos los datos (número de hermanos) y en la columna de la derecha, a partir de B7, las frecuencias absolutas (número alumnos con ese número de hermanos). En B12 escribimos **="N = " Suma[B7:B11]** para presentar la suma. (Atención a las comillas y a los espacios. Todo lo que va entre comillas es texto, lo demás son fórmulas).

También podríamos haber resaltado todos los datos de la columna y usar la herramienta de la Hoja de cálculo  .

A partir de la columna C7 ponemos las frecuencias relativas escribiendo **=B7 / 50** y arrastrando el botón de control de la celda para rellenar el resto de celdas.



Por último para tener una columna de porcentajes escribimos en la celda D7 la siguiente expresión **= C7 *100 " %"** y volvemos a arrastrar su botón de control.

Nos debe quedar algo como esto:

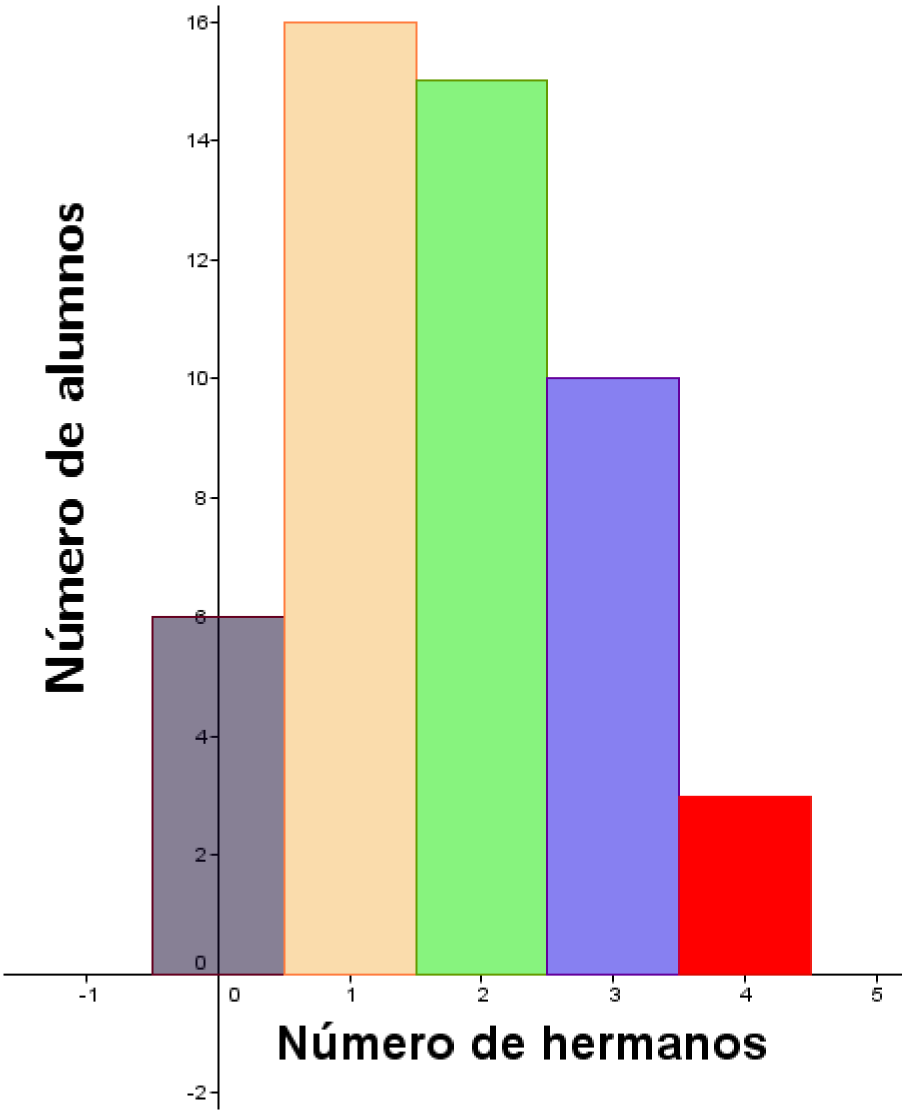
6	Nº hermanos	F. absolutas	F. relativas	Porcentajes
7	0	6	0.12	12 %
8	1	16	0.32	32 %
9	2	15	0.3	30 %
10	3	10	0.2	20 %
11	4	3	0.06	6 %
12		N = 50	Total = 1	

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Ahora vamos a organizar los datos mediante representaciones gráficas. Como es una variable cuantitativa discreta usaremos el **Diagrama de barras**. Necesitamos tener los datos de la variable y sus frecuencias absolutas distribuidas en listas. La segunda lista la tenemos construida ya; es la que habíamos llamado **alumnos**. Para la otra, seleccionamos el rango A7:A11 de la Hoja de cálculo y con el botón derecho en la opción Crear, seleccionamos Lista. Vamos a llamarla **Hermanos**. Tenemos entonces:

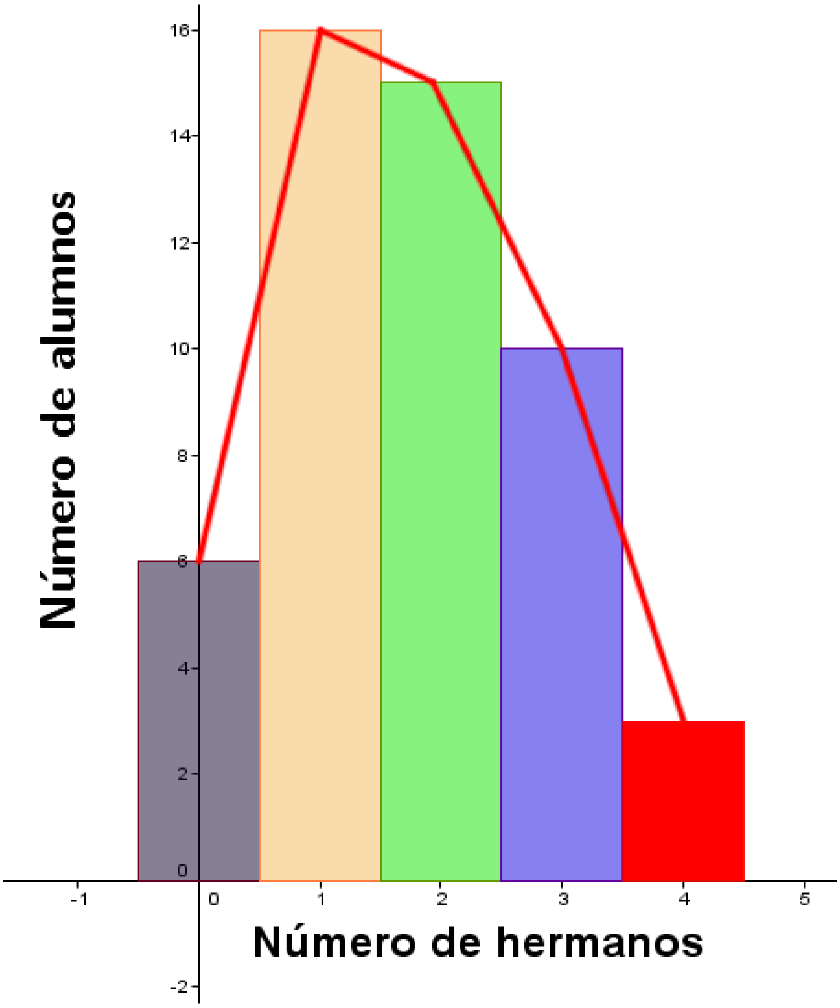
Lista
- **Hermanos = {0, 1, 2, 3, 4}**
- **alumnos = {6, 16, 15, 10, 3}**

Para crear el gráfico activamos la vista gráfica y basta teclear en la barra de entrada **Barras[Hermanos, alumnos].** Aparecerá el diagrama y podemos cambiar su aspecto a través de sus propiedades (botón derecho a doble clic).



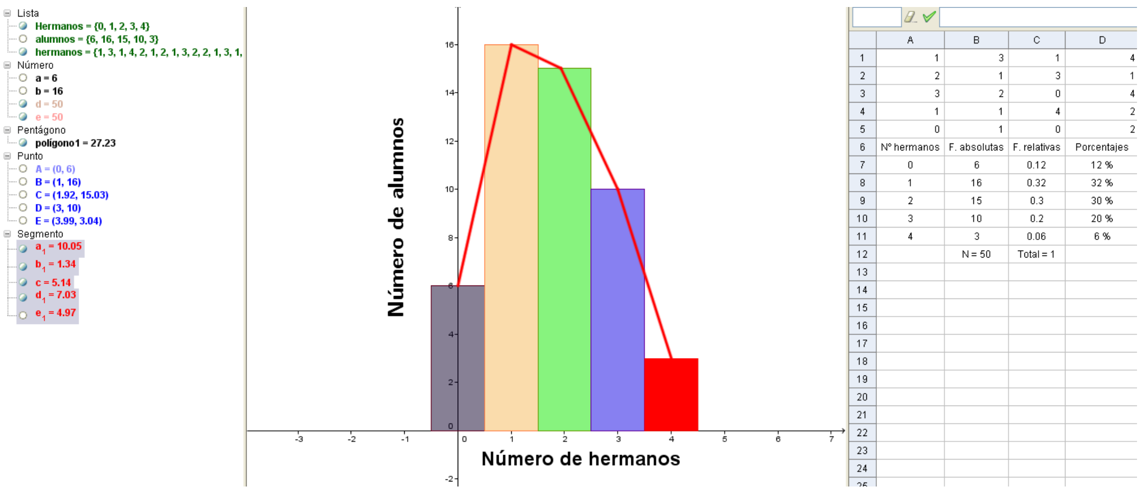
También podemos unir los extremos superiores de las barras mediante líneas, obteniendo una línea poligonal que se llama **polígono de frecuencias**.

Podemos hacerlo con la herramienta **Segmento** o con **Polígono** y ocultando adecuadamente los elementos que no queramos que aparezcan.



En la segunda parte de este tema haremos todo la anterior de manera directa con herramientas propias de GeoGebra.

Así nos ha quedado nuestra ventana de trabajo.



ESTADÍSTICA

2ª Parte

MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

En la primera parte hemos contado, agrupado, organizado y representado los datos del siguiente problema:

Hemos anotado el número de hermanos y hermanas que tiene el alumnado de dos clases de un Colegio.

1 3 1 4 2 1 2 1 3 2

2 1 3 1 0 2 3 2 1 1

3 2 0 4 2 1 0 1 2 3

1 1 4 2 1 3 1 2 3 2

0 1 0 2 3 2 1 0 3 2

Ahora vamos a calcular una serie de valores que nos ayudarán a interpretarlos; son las medidas o parámetros de centralización: **media, moda** y **mediana.**

Recordemos que tenemos los datos en bruto en la lista **hermanos.**

En la barra de entrada tecleamos Entrada: **Media**[hermanos] y obtenemos **media = 1.76**

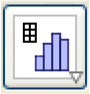
El nombre **media** lo hemos definido nosotros renombrando la expresión obtenida.

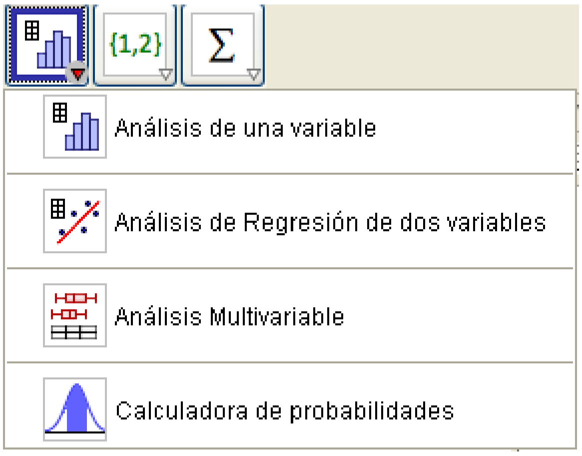
Ahora tecleamos Entrada: **Moda**[hermanos] obteniendo **moda = {1}**

GeoGebra presenta la moda como una lista y no como un número. Esto ocurre porque puede haber más de una moda.

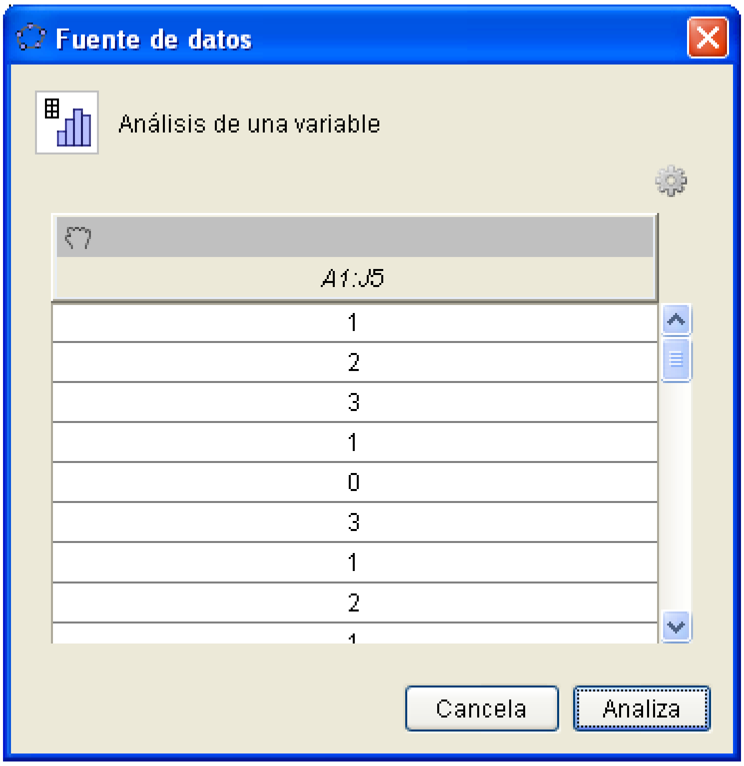
Por último, tecleamos Entrada: **Mediana**[hermanos] cuyo valor es **mediana = 2**

UNA HERRAMIENTA DE GeoGebra PARA TODO

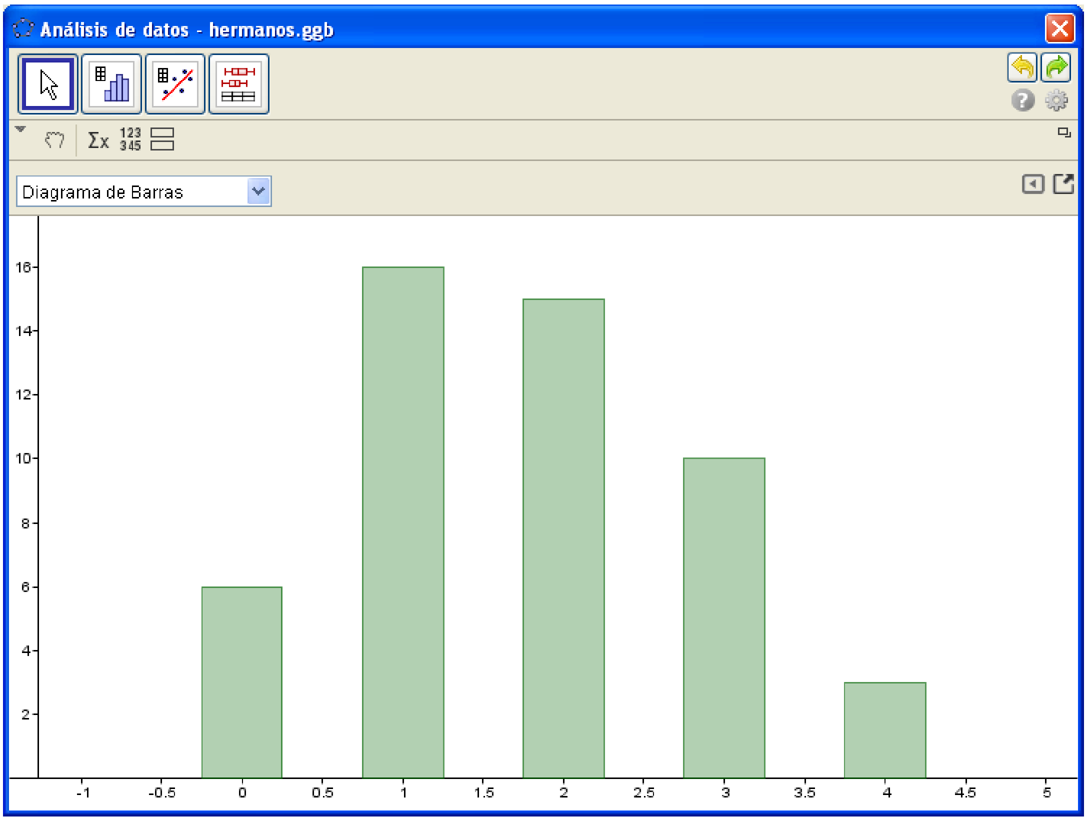
Aprovechando que tenemos todos los datos del ejemplo en la Hoja de cálculo vamos a obtener de forma sencilla el gráfico y los parámetros estadísticos. Para ello seleccionamos el rango A1:J5 (los 50 datos) y pulsamos en la herramienta , y a continuación elegimos **Análisis de una variable.**



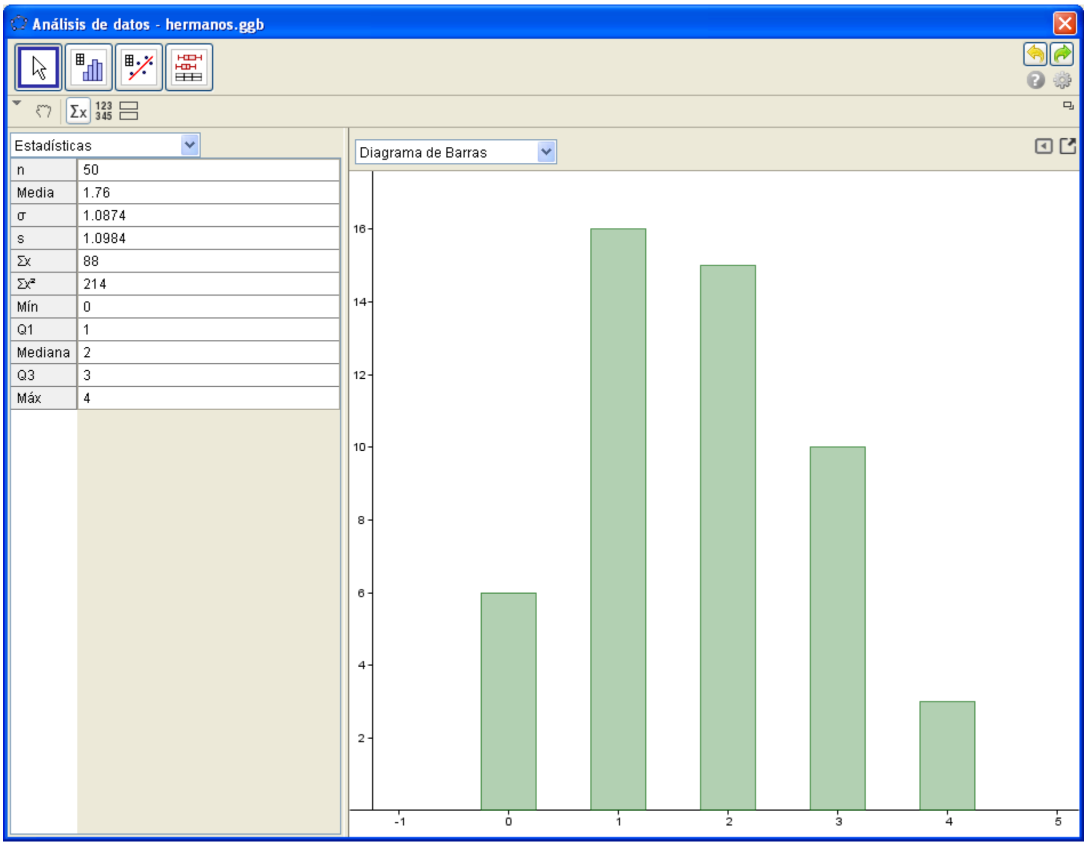
En la ventana que aparece pulsamos en **Analiza:**



Debemos obtener la siguiente ventana. Seleccionamos el gráfico **Diagrama de Barras.**

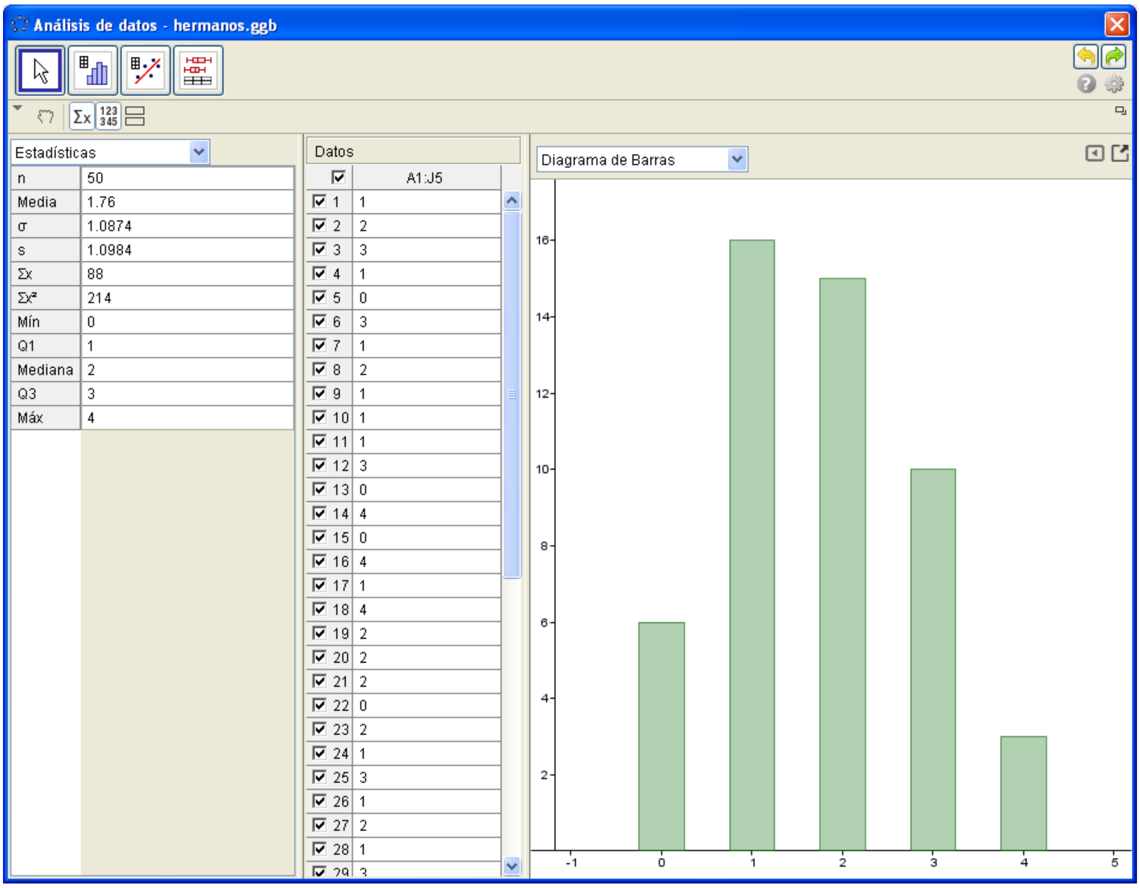


Para obtener diferentes valores de las medidas estadísticas pulsamos Σx (con lo que obtenemos:

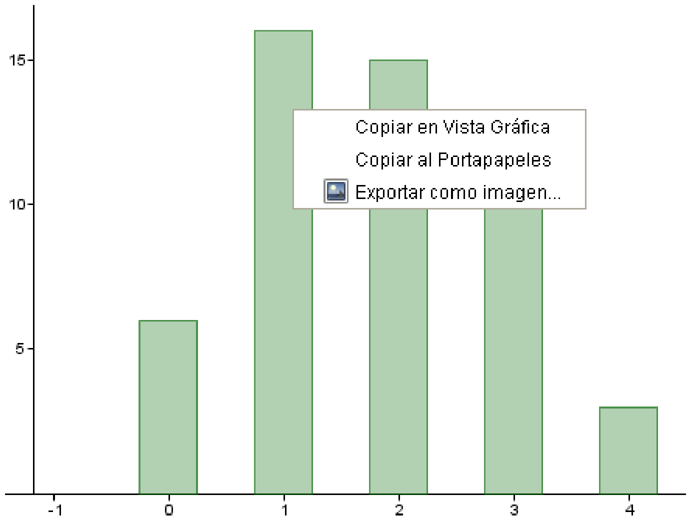


Observamos que aparecen los datos hallados anteriormente y otros más que nos pueden servir para hacer un análisis más exhaustivo.

Si queremos ver los datos en la misma ventana pulsamos en 

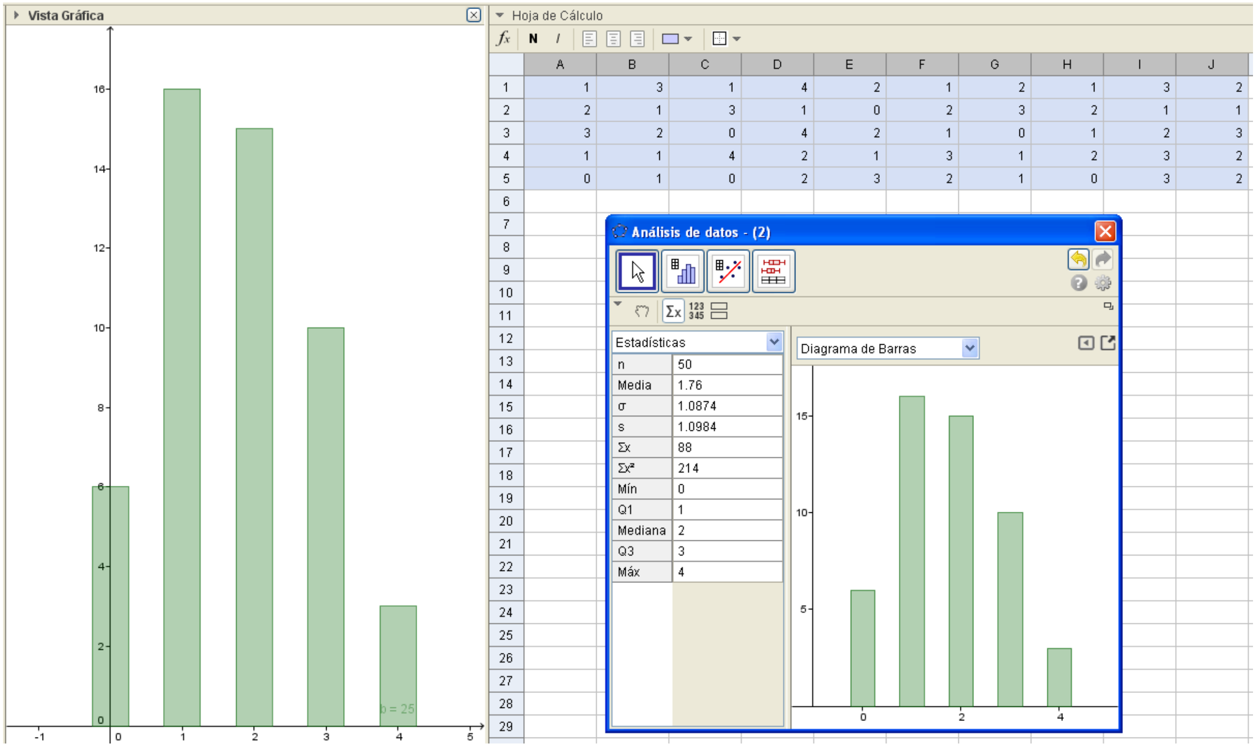


Por último, hay que tener en cuenta que si guardamos el fichero, GeoGebra no guardará la ventana de Análisis de datos. Si queremos que se guarde el gráfico pulsamos con el botón derecho en él:



y elegimos **Copiar en Vista Gráfica.**

Podemos tener toda la información en la ventana de trabajo:



ESTADÍSTICA

APPLETS RECOMENDADAS

Todas las applets que recomendamos a continuación están disponibles en el **Proyecto Gauss** del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España.

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/

Las actividades se pueden utilizar tanto en los niveles de Primaria como en Secundaria.

Recuento

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/primaria/actividades/estadistica_recuento.htm

Estimación

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/primaria/actividades/estadistica_estimacion.htm

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/estadistica_estimacion.htm

Recuento y hoja de cálculo

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/estadistica_y_probabilidad/recuento/hoja_de_calculo/actividad.html

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

APPLETS RECOMENDADAS

2ª Parte

Applets disponibles en el Proyecto Gauss del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España.

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/

Las actividades se pueden utilizar tanto en los niveles de Primaria como en Secundaria.

Media, mediana y moda

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/primaria/actividades/estadistica_medidas.htm

En GeoGebraTube tenemos esta actividad de los parámetros estadísticos que se obtienen al lanzar n veces un dado:

http://www.geogebratube.org/student/m7451

Otra interesante actividad de Manuel Sada: la idea gráfica de la media.

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/e1media.htm

ESTADÍSTICA

RETOS PROPUESTOS

Reto 11.1.

Lanza un dado 40 veces y anota los resultados. Después haz un recuento y organiza los datos en una hoja de cálculo y construye una tabla de frecuencias en la que aparezcan los valores de la variable, la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa y los porcentajes correspondientes.

Reto 11.2.

Realiza un Diagrama de barras correspondiente a la actividad anterior.

Intenta decorar y poner títulos.

ESTADÍSTICA

RETOS PROPUESTOS

2ª parte

Reto 11.3.

Las edades de los padres de 20 alumnos de una clase son:

43 40 44 46 50 51 52 46 47 45

40 43 44 46 44 46 48 49 48 46

Sin usar la herramienta **Análisis de una variable**, calcula la media, la mediana y la moda.

Reto 11.4.

Realiza la actividad anterior usando la herramienta **Análisis de una variable.**

Recuerda que para enviar esta actividad deberás adjuntar en un documento la ventana que aparece y en la que además del gráfico se vean los datos de **Mostrar estadísticas.**

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

DIAGRAMA DE SECTORES

GeoGebra no hace **diagrama de sectores**. Por ello vamos a construirlo "manualmente"

Recuperamos el problema que ha servido de ejemplo en las dos entregas de materiales.

Hemos anotado el número de hermanos y hermanas que tiene el alumnado de dos clases de un Colegio. Queremos construir la tabla de frecuencias.

1 3 1 4 2 1 2 1 3 2

2 1 3 1 0 2 3 2 1 1

3 2 0 4 2 1 0 1 2 3

1 1 4 2 1 3 1 2 3 2

0 1 0 2 3 2 1 0 3 2

Recuperamos también la tabla que de frecuencias que habíamos construido.

6	Nº hermanos	F. absolutas	F. relativas	Porcentajes
7	0	6	0.12	12 %
8	1	16	0.32	32 %
9	2	15	0.3	30 %
10	3	10	0.2	20 %
11	4	3	0.06	6 %
12		N = 50	Total = 1	

Vamos a añadir una nueva columna con la amplitud en grados de cada sector que formarán el gráfico. Para ello multiplicamos las frecuencias relativas por 360. En la celda E7 tecleamos **=C7*360** y después arrastramos la casilla de control.

Nos debe quedar:

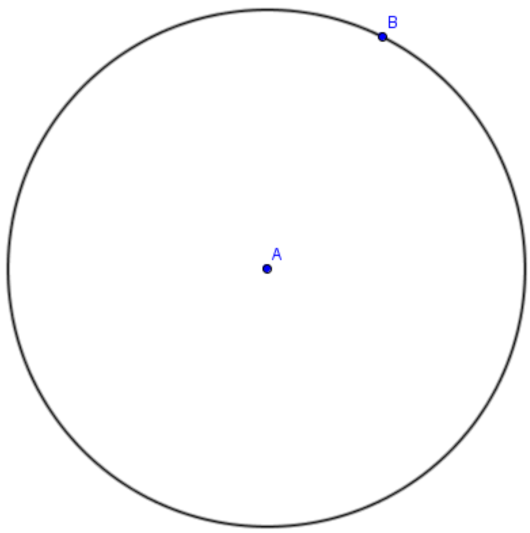
6	Nº hermanos	F. absolutas	F. relativas	Porcentajes	Ángulo (º)
7	0	6	0.12	12 %	43.2
8	1	16	0.32	32 %	115.2
9	2	15	0.3	30 %	108
10	3	10	0.2	20 %	72
11	4	3	0.06	6 %	21.6
12		N = 50	Total = 1		360

Por comodidad y para no tener que borrar el diagrama de barras, vamos a abrir una nueva ventana en GeoGebra en la que tendremos activa **Vista Hoja de Cálculo, Vista Algebraica y Vista gráfica.** Ocultamos los ejes.

Vamos a copiar los datos de amplitud anteriores (columna Ángulo) en el rango B1:B5 de la nueva hoja de cálculo:

	A	B
1		43.2
2		115.2
3		108
4		72
5		21.6

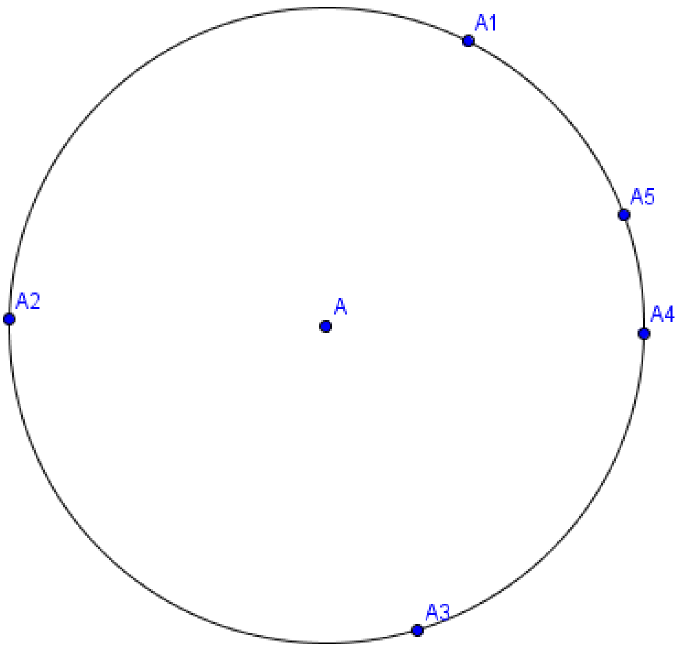
Ahora, en la Vista gráfica dibujamos una circunferencia con la herramienta adecuada dados su centro y uno de sus puntos

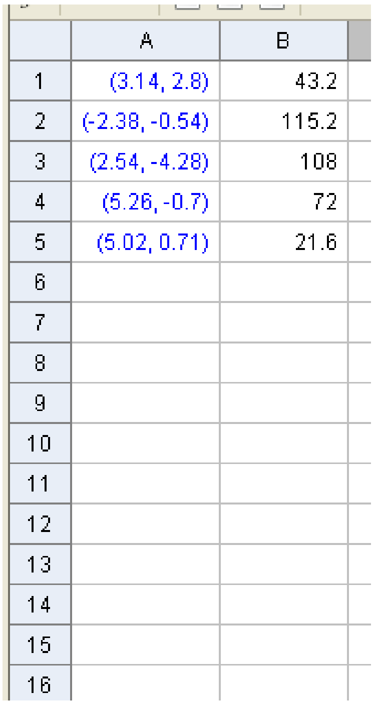


Renombramos el punto B con el botón derecho y le llamamos A1. Obsérvese que salen sus coordenadas en la celda A1.

En la barra de entrada escribimos: A2 = Rota[A1, B2°, A], con lo que obtenemos en la celda A2 el punto que se obtiene al rotar el punto A1, una proporción de circunferencia correspondiente al porcentaje del segundo dato (115.2 grados), con respecto al centro de la circunferencia, el punto A.

Arrastramos la casilla de control de la celda A2 hasta A5 y tendremos todos los puntos.





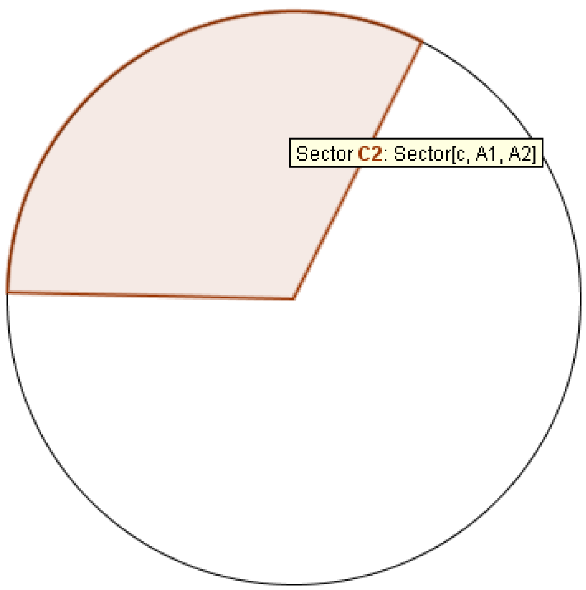
	A	B
1	(3.14, 2.8)	43.2
2	(-2.38, -0.54)	115.2
3	(2.54, -4.28)	108
4	(5.26, -0.7)	72
5	(5.02, 0.71)	21.6
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		

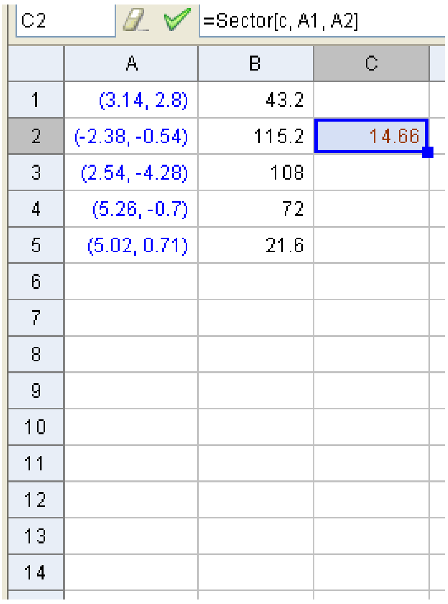
Ocultamos todos los puntos (objeto y etiqueta).

Para dibujar los sectores usamos el comando

Entrada: **Sector[<Cónica>, <Punto (extremo)>, <Punto (extremo en sentido antihorario)>]**

Escribimos **C2 =Sector[c, A1, A2]**, con lo que en la celda C2 aparece un valor (área) y en la circunferencia **c** aparecerá un sector de 115.2 grados de amplitud con primer punto A1, segundo punto A2 y centro el de la circunferencia.

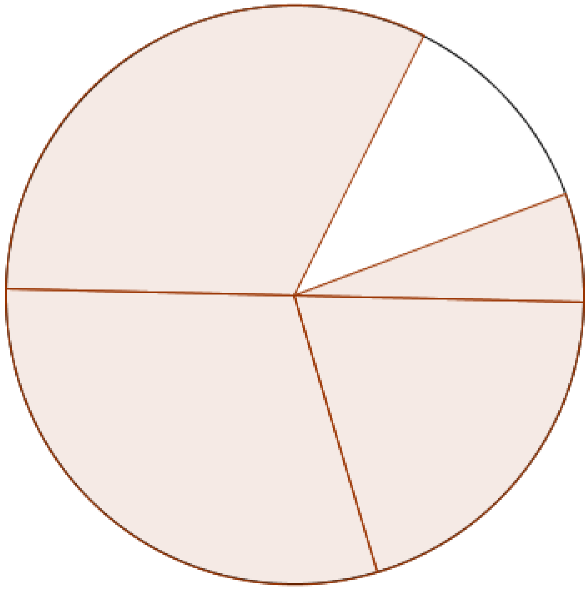




C2 =Sector[c, A1, A2]

	A	B	C
1	(3.14, 2.8)	43.2	
2	(-2.38, -0.54)	115.2	14.66
3	(2.54, -4.28)	108	
4	(5.26, -0.7)	72	
5	(5.02, 0.71)	21.6	
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			

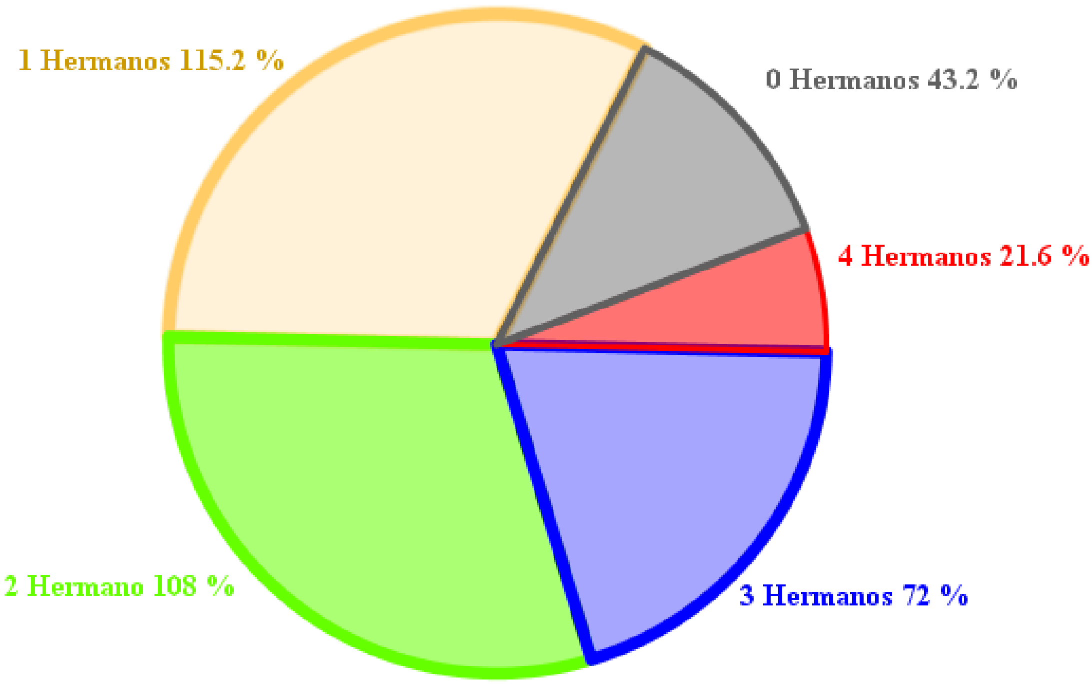
Arrastrando la casilla de control de la celda C2 tendremos los demás sectores. Obsérvese que no es necesario dibujar el primer sector.



G15

	A	B	C
1	(3.14, 2.8)	43.2	
2	(-2.38, -0.54)	115.2	14.66
3	(2.54, -4.28)	108	13.75
4	(5.26, -0.7)	72	9.16
5	(5.02, 0.71)	21.6	2.75
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

Ya sólo queda decorar el diagrama de sectores a nuestro gusto, con las opciones de las que se dispone en Propiedades de los objetos.



Lo que sigue es el Protocolo de Construcción en GeoGebra

nº	Nombre	Definición	Valor	Rótulo
1	Número B1		B1 = 43.2	
2	Número B2		B2 = 115.2	
3	Número B3		B3 = 108	
4	Número B4		B4 = 72	
5	Número B5		B5 = 21.6	
6	Punto A		A = (1.44, -0.62)	
7	Punto A1		A1 = (3.14, 2.8)	
8	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por A1 con centro A	c: (x - 1.44)² + (y + 0.62)² = 14.59	
9	Punto A2	A1 rotado por el ángulo B2°	A2 = (-2.38, -0.54)	
10	Punto A3	A2 rotado por el ángulo B3°	A3 = (2.54, -4.28)	
11	Punto A4	A3 rotado por el ángulo B4°	A4 = (5.26, -0.7)	
12	Punto A5	A4 rotado por el ángulo B5°	A5 = (5.02, 0.71)	
13	Sector C2	Sector[c, A1, A2]	C2 = 14.66	
14	Sector C3	Sector[c, A2, A3]	C3 = 13.75	
15	Sector C4	Sector[c, A3, A4]	C4 = 9.16	
16	Sector C5	Sector[c, A4, A5]	C5 = 2.75	
17	Texto texto1	"1 Hermanos " + B2 + " %"	1 Hermanos 115.2 %	
18	Texto texto2	"2 Hermano " + B3 + " %"	2 Hermano 108 %	
19	Texto texto3	"3 Hermanos " + B4 + " %"	3 Hermanos 72 %	
20	Texto texto4	"4 Hermanos " + B5 + " %"	4 Hermanos 21.6 %	
21	Sector d	SectorCircular[A, A5, A1]	d = 5.5	
22	Texto texto5	"0 Hermanos " + B1 + " %"	0 Hermanos 43.2 %	