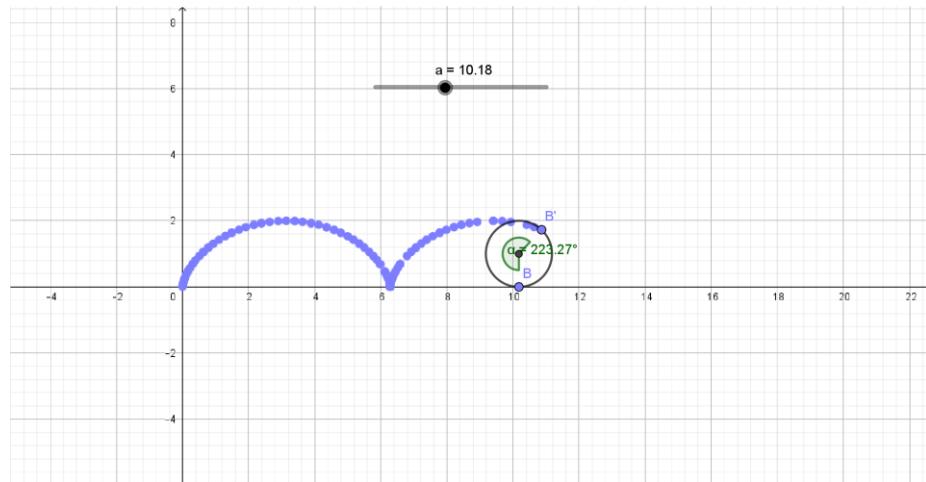




LA CICLOIDE

M^a Ángeles Hernández

CICLOIDE, RULETA O TROCOIDE



Rodadura sin deslizamiento

ANTECEDENTES

- Aristóteles de Estagira (384-322 a. C.) Paradoja: ¿2 puntos sobre el mismo radio de dos circunferencias concéntricas, recorren la misma longitud cuando la corona circular describe una vuelta?
- Tolomeo de Alejandría (II a. C.): consideró la Tierra como centro del Universo y supuso que cada planeta se movía en un círculo llamado epiciclo “sobre un círculo”, con centro de movimiento uniforme alrededor de la Tierra.
- Nicolás Copérnico (1473-1543): Consideró que el centro era el sol, pero mantuvo el movimiento epicicloidal de los planetas.
- Tycho Brahe: demostró la falsedad del movimiento epicicloidal de los planetas

HISTORIA

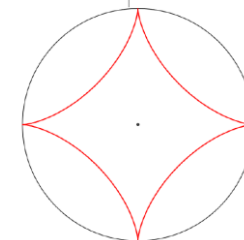
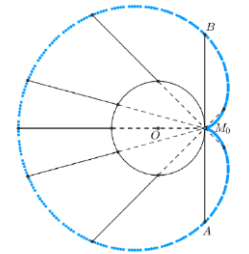
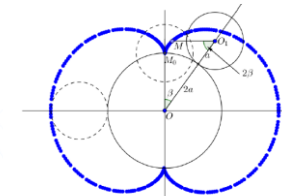
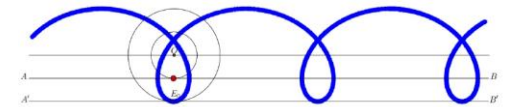
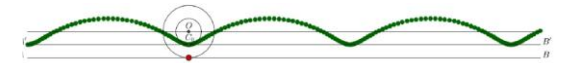
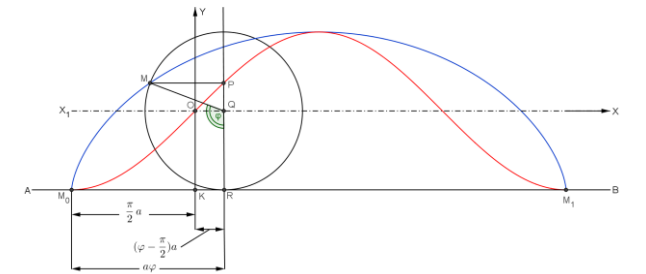
- Galileo-Galilei (1564-1642): Cicloide = “parecido a un círculo”
- Gilles de Roberval (1634): Puso nombre a la cicloide y calculó el área limitada por el arco y la base de la cicloide. $A = 3 * \pi * r^2$ (r = radio de la circunferencia)

PROPIEDADES DE LA CICLOIDE

- I. El ángulo entre la recta tangente a la cicloide (en cualquier punto) y la recta directriz es igual al ángulo complementario (hasta 90°) de la mitad del ángulo de giro del radio del círculo generador.
- II. El ángulo ente la normal a la cicloide (en cualquiera de sus puntos) y la recta directriz es igual a la mitad del “ángulo principal”
- III. 1º propiedad fundamental: Toda normal a la circunferencia pasa por el punto “inferior” del círculo generador.
- IV. 2º propiedad fundamental: La tangente a la cicloide pasa por el punto “superior” del círculo generador.
- V. El seno del ángulo formado por la tangente a la cicloide en el punto M y la vertical, es proporcional a la raíz cuadrada de la “altura” de M .
- VI. Dados una recta AB y un punto M , la única curva que cumple las condiciones del anterior teorema y pasa por el punto M es la cicloide.

CURVAS AFINES A LA CICLOIDE

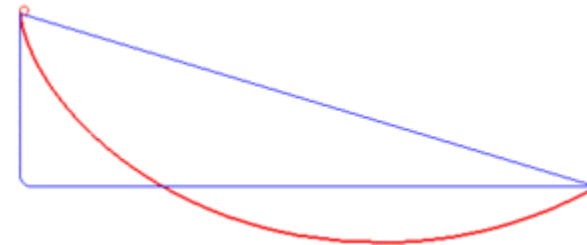
- Compañera de la cicloide: la senoide. Es la curva formada por la intersección entre el diámetro vertical de la circunferencia generatriz y el segmento perpendicular a dicho diámetro que pasa por el punto de la cicloide. (Área = $2 \cdot \pi \cdot r^2$)
- Cicloides acortadas y alargadas: Círculo que gira alrededor de una recta.
- Epicicloide: Círculo que gira exteriormente sobre otra circunferencia.
 - Cardioide: epicicloide donde los radios de las circunferencias son iguales.
 - Concoide de Nicomedes: Dada una curva o recta y un punto O exterior a ella. La concoide es el lugar geométrico de los extremos de los segmentos que parten de O y tales que los puntos de la curva o recta son sus puntos medios.
- Hipocicloide: Círculo que gira internamente sobre otra circunferencia.



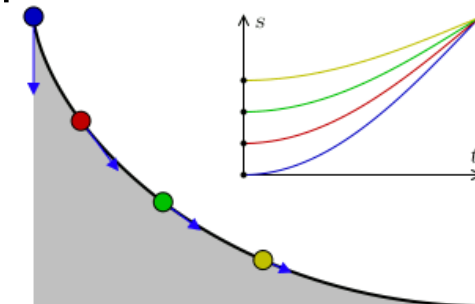
Astroide

APLICACIONES FÍSICAS DE LA CICLOIDE

Braquistócrona: “curva del tiempo más corto” Curva entre los puntos A y B situados a distintas alturas, de forma que la curva lleve de A a B, bajo el efecto de la gravedad, en el menor tiempo posible.



Tautócrona: “curva del mismo tiempo”. Curva por la que se mueve el centro de gravedad de un péndulo para que el periodo de oscilación no dependa de la amplitud.



[Vídeo: Braquistócrona-Tautócrona](#)

OTRAS APLICACIONES

Levas (elemento mecánico que permite la transformación de un movimiento circular a un movimiento rectilíneo mediante el contacto directo a un seguidor)

Engranajes

Péndulos

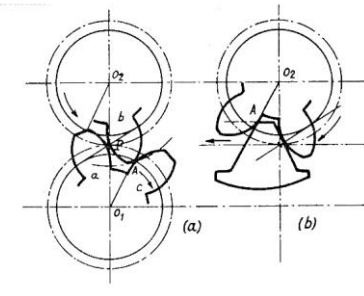
Toboganes: pistas de Skate y toboganes de evacuación en aviones.

Arquitectura: arcos cicloides en el tejado del Museo de Arte Kimbell de Louis Isadore Kahn.

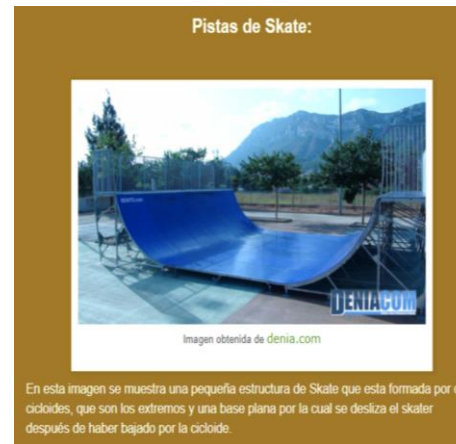
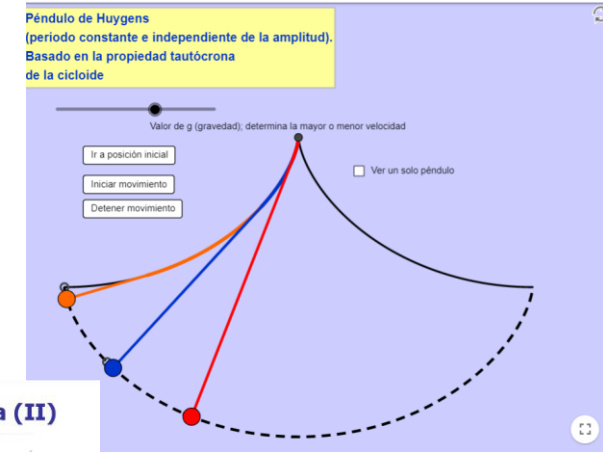
Cálculo Variacional.



Penetración e interferencia (II)



Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Ingeniería Mecánica



En esta imagen se muestra una pequeña estructura de Skate que está formada por dos cicloides, que son los extremos y una base plana por la cual se desliza el skater después de haber bajado por la cicloide.



PRÁCTICA: EPICICLOIDES - HIPOCICLOIDES

E(1,2)

E(5,2)

E(5,3)

E(2,3)

Nefroide: E(12,6)

Cardioide: E(12,12)

H(5,2)

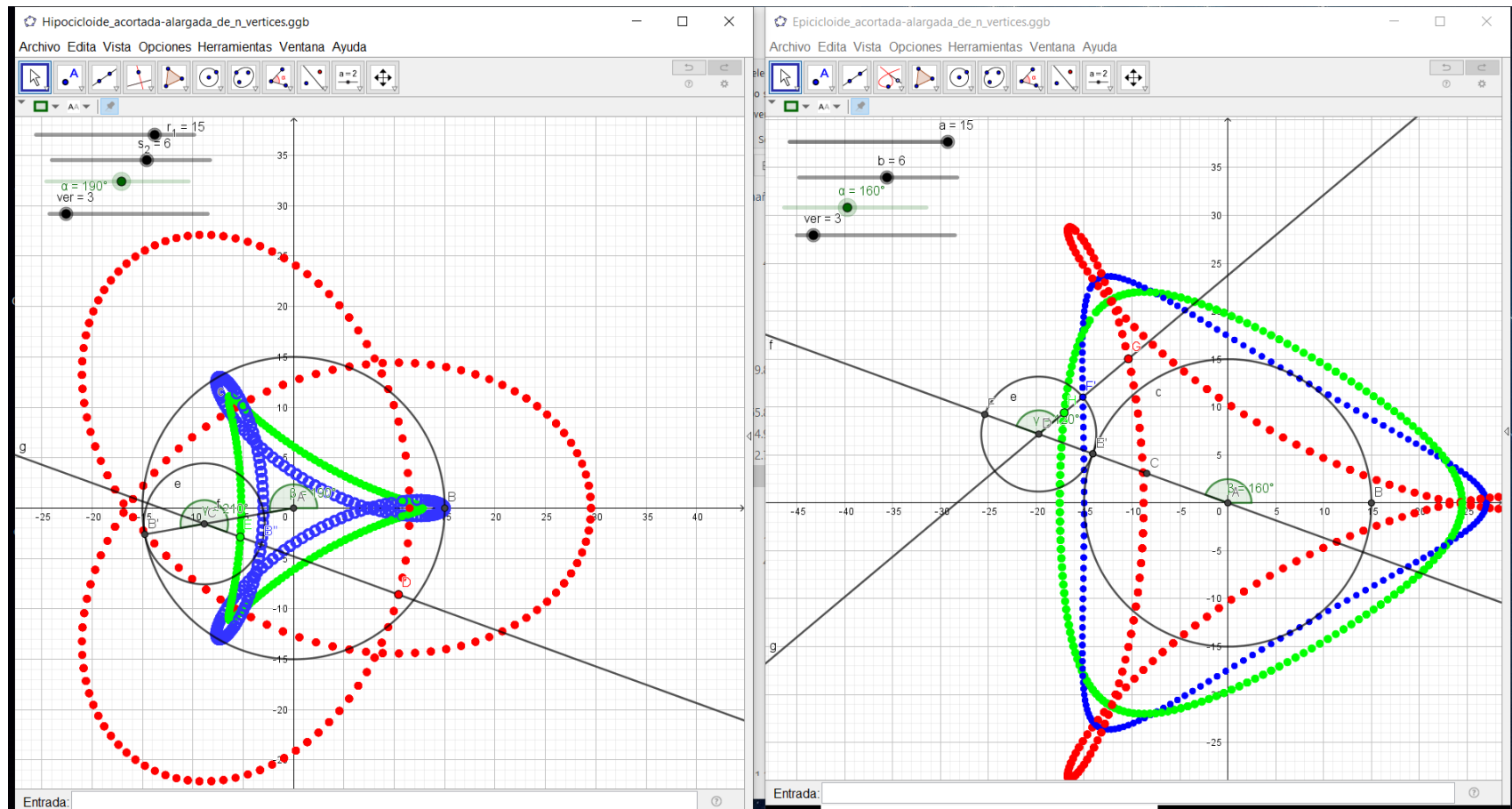
H(9,2)

Propiedades:

$H(a, b) = H(a, c)$ cuando $c = a - b$

$H(a, c) = E(a, b)$ cuando $c = a + b$

HIPOCICLOIDE-EPICICLOIDE (ACORTADA Y ALARGADA)



MEDIDAS DE LA CICLOIDE Y SUS CUERPOS DE REVOLUCIÓN

- Cuerpo de revolución generado por una cicloide que gira alrededor del segmento OX que la define. (Melón)
 - Volumen: $5\pi^2 * r^3$
 - Área: $(64/3)\pi * r^2$ (≈ 21 veces el área del círculo generador)
- Cuerpo de revolución generado por una cicloide que gira alrededor del eje OY exterior a él. (Rosquilla aplastada)
 - Volumen: $12\pi^3 * r^3$
 - Área: $32\pi^2 * r^2$ (≈ 100 veces el área del círculo generador)
- La longitud de un arco de cicloide: $8*r$
- Área bajo un arco de cicloide: $3\pi * r^2$ (3 círculos generadores)

