ELABORACIÓN DE MATERIALES PARA CONOCIMIENTO DE MATEMÁTICAS 3º ESO

Documento elaborado por:

- **Mercedes Rodríguez Prado**
- **José Daniel Benito Martín**
- **José Carlos Ciudad Gómez**
- **Julio Rodríguez Villa**

ÍNDICE:

UNIDAD DIDÁCTICA: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

FICHA 1: Definición de sucesión.

Definición: Una **sucesión** de números reales es una secuencia ordenada de números.

Ejemplos: Las siguientes secuencias de números son sucesiones

1, 2, 3, 4, 5, 6, …

1, 3, 5, 7, 11, 13, 15,

$\mathbf{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 6, \quad \frac{7}{2}, \ldots}$

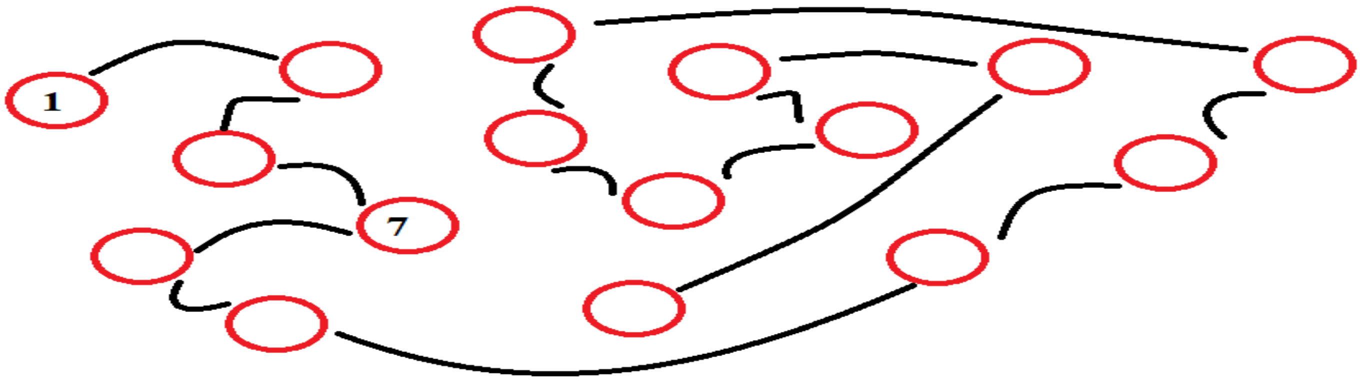
$\mathbf{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}} \ldots$

Definición: Se llama **término** de una sucesión a cada uno de los elementos que constituyen la sucesión. Se suelen indicar con un "**subíndice**", que indica la **posición que ocupa** el término en la sucesión.

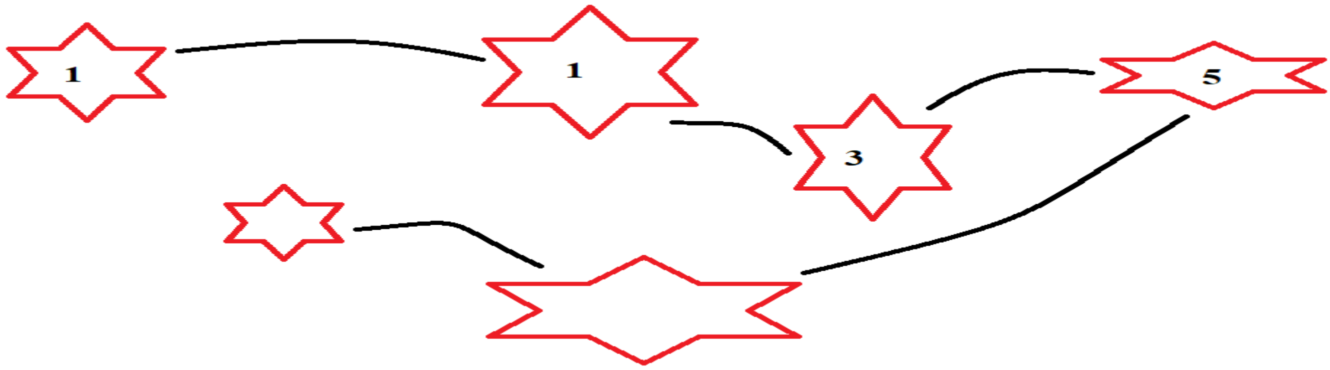
Ejemplos:

En las sucesiones anteriores $a_2 = 2$; $a_5 = 5$; $b_1 = 1$; $b_4 = 7$; $c_3 = \frac{3}{2}$; $c_7 = \frac{7}{2}$; $d_4 = \frac{1}{16}$; $d_8 = \frac{1}{256}$

1) Antes de empezar de forma "seria" con los ejercicios de la unidad, intenta completar los siguientes gráficos que nos recuerdan a los juegos que hacíamos en primaria:
   a) Una muy facilita:



   b) Prueba con ésta:



2) Halla los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) 2, 5, 8, 11, …

b) 3, 6, 8, 9, 9, 8, 6,

c) 1, – 1, 1, – 1…

d) 2, 3, 4, 3, 6, 3, …

e) 108, 54, 27, $\frac{27}{2}$, …

f) 5, 8, 5, 8, 8,

g) 1, – 2, 4, – 8,

3) Encuentra el término ___ en las siguientes sucesiones:

a) 14, ____, 8, 5, 2, … b) 5, ____, 8; 5; 8; … c) 3, 8, ____, 18, …

4) Halla los quince primeros términos de las siguientes famosas sucesiones:

a) Sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5,

b) Sucesión de Padovan: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7

5) ¿Cuál es el siguiente número de la secuencia 0, 5, 4, 2, 9, 8, 6…? Pista: abecedario

6) ¿Cuál es el siguiente número de la secuencia 2, 10, 12, 16, 17, 18, 19…? Pista: d

UNIDAD DIDÁCTICA: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

FICHA 2: Término general de una sucesión.

Definición: Se llama **término general** de una sucesión, y se representa por $\mathbf{a_n}$, a una expresión que nos permite obtener el valor de cualquier término en función de la posición que ocupa.

Ejemplos:

a) La expresión $a_n = 3n + 1$ es el término general de la sucesión 4, 7, 10, 13, ... A partir de la fórmula se puede obtenerse, por ejemplo, $a_{20} = 3 \cdot 20 - 1 = 59$

b) La sucesión de término general $a_n = n^2 + 1$: $a_1 = 12 + 1 = 2$; $a_2 = 22 + 1 = 5$; ...,

Existen varias formas de definir una sucesión:

- Dando una propiedad que cumplan los términos de esa sucesión
- Dando su término general o término n-ésimo
- A partir de un término y alguna ley que permita obtener los siguientes por recurrencia.

1) Calcula los 5 primeros términos y el término a_{12} de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 3n - 2 \longrightarrow$

b) $a_n = n + 2 \longrightarrow$

c) $a_n = -n + 3 \longrightarrow$

2) Calcula los 5 primeros términos y el término a_{15} de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = (n - 3)^2 \longrightarrow$

b) $a_n = (-1)^n \longrightarrow$

c) $a_n = 2 \cdot 3^n$ $\longrightarrow$

d) $a_n = \frac{n+1}{n-2}$ $\longrightarrow$

e) $a_n = \frac{1}{2^n}$ $\longrightarrow$

f) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ $\longrightarrow$

3) Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones que cumplen la siguiente propiedad:

a) Sucesión de los números pares:

b) Sucesión de los números impares:

c) Sucesión de los números primos:

d) Sucesión de los números que terminan en 3:

e) Sucesión de los cuadrados de los números:

f) Sucesión de los números múltiplos de 7:

4) Escribe los 10 primeros términos de las siguientes sucesiones, definidas a partir de una ley de recurrencia. ¿Qué sucede si quieres calcular el término a_{13} de estas sucesiones?:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$
$a_1 = 0$ $a_2 = -2$ $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$
$a_1 = 1$ $a_2 = 4$ $a_3 = 7$ $a_{n+3} = a_n$
$a_n = n^2$ $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$
$a_1 = 1$ $a_n = a_{n-1} + n$
$a_1 = 2$ $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 1$

UNIDAD DIDÁCTICA: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

FICHA 3: Progresiones aritméticas. Definición.

Definición: Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene sumando una cantidad constante, llamada **diferencia (d)**, al término anterior.

Es decir, $a_n - a_{n-1} = d$

Ejemplo:

a) La sucesión de números pares 2, 4, 6, 8, … es una progresión aritmética donde $a_1 = 2$ y $d = 2$

b) La sucesión 1, 4, 7, 10, … es una progresión aritmética con $a_1 = 1$ y $d = 3$

c) La sucesión 4, $\frac{7}{2}$, 3, $\frac{5}{2}$, 2, … es una progresión aritmética con $a_1 = 4$ y $d = -\frac{1}{2}$

d) Si $a_1 = 3$ y $d = 2$, los primeros cinco términos de la progresión aritmética son:

$a_1 = 3$

$a_2 = a_1 + d = 3 + 2 = 5$ $a_3 = a_2 + d = 5 + 2 = 7$ $a_4 = a_3 + d = 7 + 2 = 9$ $a_5 = a_4 + d = 9 + 2 = 11$

1) Calcula los tres primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que el primero es 1 y la diferencia es – 3.

2) Calcula los 5 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que los dos primeros términos de una progresión aritmética son 8 y 13.

3) Si primer término de una progresión aritmética es 4 y la diferencia es 2, ¿cuáles son los siguientes 5 primeros términos? Calcula los términos a_{15} y a_{21}

4) Calcula la diferencia y el primer término de una progresión aritmética sabiendo que $a_4 = 7$ y $a_6 = 10$.

5) Hallar el término a_{10} en una progresión aritmética en la que $a_1 = 5$ y la diferencia es $d = -3$.

6) El término general de una progresión aritmética es $a_n = 3n - 1$. Escribe los siete primeros términos de la progresión y calcula la diferencia.

7) Calcula el primer término de una progresión aritmética que consta de 10 términos, si se sabe que el último es 34 y la $d = 3$.

8) Sabiendo que son términos de progresiones aritméticas, interpola:

a) Cuatro términos entre 7 y 17	b) Cinco términos entre 32 y 14
c) Seis términos entre -18 y 17	e) Siete términos entre -12 y 12

9) Comprueba si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y, en caso afirmativo, calcula la diferencia.

a) 3, 9, 27, 81, …	b) 4, 8, 12, 16, …
c) 1, -1, 1, -1, …	d) 3, 1, -1, …
e) 1, 2, 3, 4, …	f) 2, 5, 16, 65, …
g) 1, 3, 5, 7, …	h) 1. 1, 2, 3, 5, 8, …

UNIDAD DIDÁCTICA: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

FICHA 4: Progresiones aritméticas. Cálculo del término general.

Al igual que ocurre con todas las sucesiones, las progresiones aritméticas quedan definidas por su término general. Calculemos la forma en que se expresa el término general de cualquier progresión aritmética conociendo el término a_1 y la diferencia (d):

Dado a_1, sabemos que:

$\mathbf{a_2 = a_1 + d}$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \Rightarrow \mathbf{a_3 = a_1 + 2d}$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \Rightarrow \mathbf{a_4 = a_1 + 3d}$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d \Rightarrow \mathbf{a_5 = a_1 + 4d}$

…….

De forma general:

$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2) \cdot d + d = a_1 + (n-1) \cdot d$

Por tanto, el **término general de una progresión aritmética** es: $\mathbf{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$

1) El término general de una progresión aritmética sabiendo que $a_1 = 3$ y $d = 4$.

2) Halla el término general de una progresión aritmética cuyo primer término es 6 y su diferencia es 6.

3) Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

$d = 2'5$ y $a_1 = 0$	$d = -2'5$ y $a_1 = 1$

$d = 1/3$ y $a_3 = 5$	$d = 3$ y $a_5 = 1$
De diferencia $d = -3$ y de segundo término 1.	De diferencia $d = -1$ y de tercer término -4.

4) Halla los diez primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que a_5 es 14 y la diferencia es 5.

5) El quinto término de una progresión aritmética es 21 y la diferencia es 4. Calcula a_{20}.

6) En una progresión aritmética el término a_3 vale 0 y la diferencia es 2. calcula el término a_5.

7) El primer término de una progresión aritmética es –7 y la diferencia es 2. Halla los cinco primeros términos de esa progresión.

8) El primer término de una progresión aritmética es 9 y la diferencia es 2. ¿Cuál es el término a_{16}?

9) El primer término de una progresión aritmética es 5 y la diferencia es – 5. ¿Cuál es el término a_{11}?

10) De una progresión aritmética se sabe que $a_2 = 9$ y $d = 3$. Halla los cinco primeros términos de la progresión.

11) El término a_9 de una progresión aritmética es 21 y la diferencia es 5. Halla el término a_2.

12) Halla el primer término de una progresión aritmética sabiendo que $a_{11} = -4$ y $d = 2$.

13) Calcula el término que ocupa el lugar 15 en una progresión aritmética cuyo primer término es 3 yla diferencia es 3.

14) Calcula el primer término de una progresión aritmética con $a_5 = 6$ y $d = -2$.

15) Calcula el primer término de una progresión aritmética con diferencia 2 y $a_{20} = 60$.

16) Calcula el primer término y el término general de una progresión aritmética cuya diferencia es 82 y el a $a_{13} = 924$

17) Sabiendo que los términos $a_7 = 11$ y $a_{12} = 21$ de una progresión aritmética, calcula la diferencia y el término general.

UNIDAD DIDÁCTICA: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

FICHA 5: Progresiones aritméticas. Suma de n términos.

La **suma de n términos** de una progresión aritmética es:

$$Sn = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Y de la misma forma, esa suma será: $Sn = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$

Así pues, tenemos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2 \cdot Sn = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_{n-2} + a_3) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Pero: $a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$

Y, en general, si los subíndices son p, q, r, s, se cumple que si p + q = r + s, entonces:

$$a_p + a_q = a_r + a_s$$

$$\Rightarrow \quad 2S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}$$

La **suma** de los *n* primeros términos de una **progresión aritmética es:** $\boldsymbol{S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}$

Ejemplo: Calcula la suma de los todos los números de 1 a 100:

1, 2, 3, 4, 5, … es una progresión aritmética donde $a_1 = 1$, n = 100 y $a_{100} = 100$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{(1+100)\cdot 100}{2} = \frac{101 \cdot 100}{2} = \frac{10100}{2} = 5050}$$

1) Calcula la suma los 20 primeros términos de la progresión aritmética 17, 13, 9, 5, 1, …

2) Calcula la suma de todos los números pares menores o iguales a 800.

3) Calcula la suma de los 30 primeros múltiplos de 7.

4) Calcula el término general y la suma de los 20 primeros términos de una progresión aritmética donde $a_1 = 3$ y $d = 7$.

5) Halla la suma de los 12 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que $a_2 = 7$ y $a_9 = 21$.

6) En una progresión aritmética $a_8 = 40$ y d = 7. Halla el primer término y la suma de los 15 primeros términos.

7) Halla la suma de los primeros 15 términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y el cuarto término es 40.

8) Calcula la suma de los primeros 20 términos de la progresión aritmética $a_n = 2n + 3$

9) Halla la suma de los 25 primeros términos de la progresión aritmética $a_n = \frac{3n+1}{2}$

10) Dada la progresión aritmética 2, 5, 8, 11, … cuántos términos debemos tomar para que la suma de los n primeros términos sea 104.

11) Dada la progresión aritmética 7, 5, 3, 1, … cuántos términos debemos tomar para que la suma de los n primeros términos sea –105.

12) Calcula la suma de los 25 primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer término es 15 y la diferencia es 3.

13) Calcula la suma de los 30 primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer término es 15 y la diferencia es – 3.

14) Calcula la suma de los 15 primeros términos de la progresión aritmética $a_n = \frac{n+1}{2} + 1$.

15) Calcula la suma de los términos que están entre el puesto 51 y 93 de la progresión aritmética $a_n = n + 3$.

16) Los primeros términos de una progresión aritmética son $a_1 = 4$ y $a_2 = 7$. Calcula $a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21}$

17) Dada la progresión aritmética $a_n = 3n - 5$, calcula $a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{26} + a_{27}$

18) La suma de n números naturales consecutivos tomados a partir de 35 es 1820. Calcular n.

19) ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 es preciso tomar para que su suma sea igual a 1521?.

UNIDAD DIDÁCTICA: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

FICHA 6: Progresiones geométricas. Definición y término general.

Definición: Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando al anterior por un número fijo, r, llamado **razón**.

Es decir, $a_{n+1} = a_n \cdot r$

Ejemplo: La sucesión 1, 2, 4, 8, 16, … es una progresión geométrica con $a_1 = 1$ y $r = 2$.

El **término general de una progresión geométrica** cuyo primer término es a_1 y razón r se obtiene de la siguiente forma:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

………..

$$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Por lo tanto: $\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$

Observaciones:

Si r > 1, y el primer término es positivo, la progresión es creciente, es decir, cada término es mayor que los anteriores.

Si 0 < r < 1, y el primer término es positivo, la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que los anteriores.

Si r < 0, la progresión es alternada, es decir, sus términos van cambiando de signo según el valor de n.

Si r = 0, la progresión está formada por ceros a partir del segundo término.

1) Calcula los tres primeros términos de cada una de las progresiones geométricas siguientes:

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$	$a_n = 2^{n+1}$	$a_n = (-3) \cdot 2^n$

$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$a_n = 2 \cdot \frac{1}{3^n}$

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$a_n = (-1) \cdot 3^{n+2}$

$a_n = (-3)^n$

$a_n = (-1)^n$

$a_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

$a_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$a_n = (-5) \cdot 3^{1-n}$

2) Calcula la razón de las siguientes progresiones geométricas:

a) 1, 2, 4, 8, 16, …

b) 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, …

c) 3, 9, 27, 81, …

d) -3, 3, -3, 3, …

e) 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$,…

f) 5, -5, 5, -5, 5, …

g) $\frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \ldots$

h) $3, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \ldots$

h) $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \ldots$

3) Prueba cuales de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y cuáles no. Y de las que sean calcula su razón.

a) 5, 5/3, 5/9, 5/27,...	b) 3, 12, 60, ...	c) 54, 36, 24, 16, ...

4) Hallar el octavo término de la progresión geométrica 2, 4, 8, … De la misma progresión, calcula el término vigésimo.

5) Determinar los cinco primeros términos de una progresión geométrica si los dos primeros valen 7 y 3, respectivamente.

6) Sabiendo que $a_1 = 4$ y $a_2 = 12$ son dos términos de una progresión geométrica, calcula la razón y el término general. Calcula los términos a_3, a_7 y a_8.

7) Calcula la razón de una progresión geométrica donde el primer término es 5 y el quinto es 405.

8) Conocemos los términos $a_3 = -8$ y $a_{11} = -2.048$ de una progresión geométrica. Calcula su razón y su término general.

9) En una progresión geométrica $a_2 = 5$ y la razón 3. Halla el lugar que ocupa el término que vale 10'935.

10) Hallar el término general de una progresión geométrica cuyo primer término es 5 y su razón es 7.

11) Calcula el término que ocupa el lugar 5 en una progresión geométrica cuyo primer término es 2 y razón 3.

12) Calcula el primer término de una progresión geométrica con $a_3 = 6$ y $r = -2$.

13) Sabemos que, $a_2 = 10$ y $a_{10} = 5120$ son términos de una progresión geométrica. Hallar el término general y a_7.

14) A Luís y Candelas, a las nueve de la mañana, les han contado un secreto. A los quince minutos, cada uno de ellos ha contado el secreto a dos amigos. Quince minutos más tarde, cada uno de ellos se lo ha contado a otros dos amigos que, a su vez, se lo volvieron a contar a otros dos amigos. Pasadas cuatro horas, ¿cuánta gente conocía el secreto?

15) Un coche se compró nuevo por 41.920 € que, al cabo de unos años se vendió a la mitad de precio. Pasados unos años se volvió a vender por la mitad, y así sucesivamente. ¿Cuánto le costó el coche al quinto propietario?

16) Si en un cuadrado 256 m^2 de área se unen los puntos medios de sus lados se obtiene otro cuadrado (girado), dentro del cual se unen los puntos medios de sus lados y así hasta repetir el proceso 7 veces. ¿Qué tipo de progresión es? Calcula el término general.

UNIDAD DIDÁCTICA: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

FICHA 7: Progresiones geométricas. Suma de n términos.

Dada una progresión geométrica con $\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$, calculemos **la suma de los primeros n términos** de la sucesión: $\mathbf{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n}$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por r:

$$\mathbf{r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + \ldots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n}$$

Pero:

$$a_2 = r \cdot a_1$$

$$a_3 = r \cdot a_2$$

$$a_4 = r \cdot a_3$$

$$\ldots.$$

$$a_n = r \cdot a_{n-1}$$

La igualdad anterior queda:

$$\mathbf{r \cdot S_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + r \cdot a_n}$$

Restando $r \cdot S_n - S_n$

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + r \cdot a_n$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$\mathbf{r \cdot S_n - Sn = r \cdot a_n - a_1}$$

$\mathbf{r \cdot S_n - Sn = r \cdot a_n - a_1}$

Sacando factor común en el primer miembro de la igualdad: $\mathbf{(r-1) \cdot Sn = r \cdot a_n - a_1}$

Pero como $\mathbf{a_n = a_1 \cdot r_{n-1}}$

$\mathbf{(r-1) \cdot Sn = r \cdot a_1 \cdot r^{n-1} - a_1 = a_1 \cdot r^n - a_1 = a_1 \cdot (r^n - 1)}$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}}$$

1) Calcula la suma de los 10 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$a_n = 2^{n+1}$
$a_n = (-3) \cdot 2^n$
$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
$a_n = 2 \cdot \frac{1}{3^n}$
$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2) Calcula la suma de los 9 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

a) $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$

b) -3, 3, -3, 3, …
c) $\frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \ldots$
d) $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \ldots$
e) $3, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \ldots$
f) $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$

3) Hallar la suma de los 11 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el primer término es – 2 y la razón – 3.

4) Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica 5, -5, 5, -5, 5, …

5) Calcula la suma de los 11 primeros términos de la progresión geométrica 5, -5, 5, -5, 5, …

6) Hallar la suma de los 7 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el séptimotérmino es 20 480, el primero es 5 y la razón es 4.

7) Suma los quince primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 5$ y r = 0’5.

8) Halla la suma de los cinco primeros términos de la progresión geométrica: 3, 6, 12, 24...

9) Un agricultor en su granja tiene 59 049 litros de agua para dar de beber a los animales. Un día utilizóla mitad del contenido, al siguiente la mitad de lo que le quedaba y así sucesivamente cada día. ¿Cuántos litros de agua utilizó hasta el sexto día?

10) Si en un cuadrado 256 m^2 de área se unen los puntos medios de sus lados se obtiene otro cuadrado (girado), dentro del cual se unen los puntos medios de sus lados y así indefinidamente. ¿Qué tipo de progresión es? Calcula la suma de las áreas de los 7 primeros cuadrados formados.

UNIDAD DIDÁCTICA: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

FICHA 8: Progresiones geométricas. Suma de todos los términos.

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica se obtiene mediante la fórmula estudiada en la ficha anterior: $S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}$.

¿Podríamos calcular la suma de todos los términos de una progresión geométrica?

Tenemos las siguientes situaciones dependiendo del valor de la razón, r:

a) Si $r = 1$, estamos ante la progresión constante formada por el primer término: $\{a1, a1, a1, a1, \ldots\}$ y si $a1$ es positivo la suma de los términos será cada vez mayor (si fuera a1 negativo sería la suma cada vez mayor en valor absoluto, pero negativa). Por tanto, si el número de términos es ilimitado, esta suma será infinita.

b) Si $|r| > 1$, los términos en valor absoluto crecen indefinidamente por lo que sumaríamos números cada vez más grandes y, por tanto, la suma será infinita.

c) Si $|r| < 1$, la suma de sus términos cuando n es grande se aproxima a $\frac{1}{1-r}$ ya que si en $S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}$ elevamos r a una potencia cada vez mayor, siendo $|r| < 1$, el valor de r^n se irá aproximando a 0.

De esta forma, la suma se irá aproximando a: $S_n = \frac{a_1(0-1)}{r-1} = \frac{-a_1}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$

d) Si $r = -1$, los términos consecutivos son opuestos: $\{a1, -a1, a1, -a1, \ldots\}$ y S_n es igual a cero si n es par, e igual a a_1 si n es impar. La suma de la serie oscila entre esos dos valores.

1) Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica cuyo primer término es 3 y r = 1/2.

2) Calcula la suma de todos los términos de la sucesión: 20, 2, 0’2, 0’02, 0’002, ...

3) Calcula la suma de todos los términos de una progresión geométrica tal que $a_3 = 6$ y $r = 0{,}5$

4) En una progresión geométrica la razón es 1/4 y la suma de todos sus términos es 8. ¿Cuánto valeel primer término?

5) Calcula, siempre que puedas, la suma de todos los términos de las siguientes progresiones geométricas:

$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$	e) $3, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \dots$
c) $\frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \dots$	f) $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$
d) $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \dots$	$a_n = 2 \cdot \frac{1}{3^n}$
$a_n = (-1) \cdot 3^{n+2}$	$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

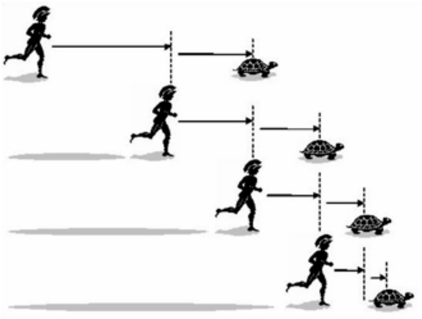
$a_n = (-1)^n$	$a_n = 2 \cdot \frac{1}{3^n}$
$a_n = (-3)^n$	$a_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$
$a_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	$a_n = (-5) \cdot 3^{1-n}$

6) Se forma una sucesión de círculos concéntricos en los que cada radio es la mitad del radio del círculo anterior. Si el primer círculo tiene un diámetro de 4 cm, halla la suma de las áreas de todos los círculos.

7) Una rana da saltos en línea recta hacia delante, y cada vez salta los $\frac{2}{3}$ del salto anterior. Quiere atravesar un río de 5 m de ancho. Su primer salto es de 2 m. ¿Pasará por el centro de la charca? ¿Llegará al otro lado de la charca?

8) Si en un cuadrado 256 m^2 de área se unen los puntos medios de sus lados se obtiene otro cuadrado (girado), dentro del cual se unen los puntos medios de sus lados y así indefinidamente. ¿Qué tipo de progresión es? Calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados formados.

9) Paradoja de Zenón



"En una carrera, el corredor más rápido (Aquiles) nunca puede adelantar a la más lenta (la tortuga), ya que el perseguidor debe alcanzar primero el punto de donde comenzó el perseguido, de modo que el más lento debe llevar siempre una ventaja"

Ejemplo práctico: Supongamos que, en una carrera sin final entre Aquiles y la tortuga, por cada 10 m que avanza Aquiles la tortuga avanza 1 m. Aquiles deja 100 metros de ventaja a la tortuga. Según la Paradoja de Zenón, Aquiles nunca alcanzará a la tortuga. ¿Es esto cierto?