MATEMÁTICAS 1º ESO

LIBRO 1

Junta de
Castilla y León

Matemáticas 1º ESO

Programa experimental para la mejora del razonamiento y la enseñanza de las Matemáticas.

Libro 1.

Junta de Castilla y León

Este documento es una publicación de la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León.

Citar esta publicación así:

Consejería de Educación de Castilla y León. Matemáticas 1º de ESO, 2023. Programa Experimental para la mejora del razonamiento y la enseñanza de las Matemáticas. Libro 1.

Texto finalizado en julio de 2023.

Autores:

ALIENDE CORNEJO, BEATRIZ
ALONSO MESA, PABLO
ALONSO SANTAMARÍA, DIEGO
ARCONADA CUADRADO, LUISA MARÍA
BERGES IBÁÑEZ, LAURA
BLÁZQUEZ MARÍN, MARIA SONSOLES
BOAL FERNÁNDEZ, LAURA
BRAVO DE DIEGO, M. PINAR
BRITA-PAJA HOYOS, MARIA ÁNGELES
CARBAJO OLEA, CÉSAR
CASTRILLO MATEOS, ABEL
CEA MANUEL, RAQUEL
CUBERO DE LA FUENTE, JUAN ANTONIO
DEL RÍO MÉNDEZ, PILAR
DE ÁVILA DE LOS RÍOS, LUIS ÁNGEL
DE LA HERMOSA GARCÍA RAYO, ELISA RUIZ
DE LAS CUEVAS GIL, FERNANDO
DOMÍNGUEZ VICENTE, MARÍA ELENA
FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ, JOSÉ IGNACIO
FERNÁNDEZ FLOREZ, ANA MARÍA
FERRERO ÁLVAREZ, MARÍA JESÚS
GALLO DOMINGO, ISABEL
GARCÍA GONZÁLEZ, Mª CARMEN
GARCÍA LEMA, ANA
GARCÍA MARTÍN, JAVIER
GARCÍA MORAL, BEATRIZ
GARNACHO PASTOR, ANA
GÓMEZ CENDRERO, ISABEL
GÓMEZ PAREDES, JOSÉ MARÍA
GONZÁLEZ BUSTO, ANA MARÍA
GONZÁLEZ DE LEÓN, MANUEL
GONZÁLEZ LÓPEZ, RAQUEL
HERNÁDEZ FRAILE, MERCEDES
HERRERO PÉREZ, JUAN LUIS
HERRERO SÁNCHEZ, DANIEL
IGLESIAS GONZÁLEZ, DOLORES
IGLESIAS RODRÍGUEZ, MARÍA JOSÉ
JIMÉNEZ JIMÉNEZ, RUBÉN
LORENZO CARTÓN, MARTA
MARTÍN JUNCO, PABLO
MEDINA PORTALES, M. VICTORIA
MEILÁN RODRIGUEZ, Mª VICTORIA
MONTERRUBIO PÉREZ, Mª CONSUELO
MORALEJO GUTIÉRREZ, MARÍA DE LA VEGA
ORZÁEZ HERNÁNDEZ, JOSÉ DANIEL
PEÑA PÁRAMO, MARTA
PILA COBO, MARTA
PONTÓN OCA, ANA MARÍA
RAMOS ALONSO, PEDRO
ROBLES SAHAGÚN, JAIRO
RODRÍGUEZ GARCÍA, VERÓNICA
RODRÍGUEZ HERNÁNDEZ, MERCEDES
RODRÍGUEZ PÉREZ, MANUEL
ROLDÁN ARTEAGA, ANA CARMEN
SAGRADO FERNÁNDEZ, JAVIER
SÁNCHEZ BELZA, JULIO
SANTA OLALLA TOVAR; JOSÉ MARÍA
SANTAMARÍA GALLEGO, AMAYA
SANTANDER GARCÍA, DAVID
SANZ SANZ, JOSÉ LUIS
SERNA DEL POZO, MANUEL
SOTO DE ROA, RUBÉN
TOVAR HERNANDO, LUCIANA C.
VEGA FERRERAS, ALICIA
VIADAS ALIENDE, MARTA
ZAMARRO SANZ, M. ARÁNZAZU
ZAPATERO MARTÍN, MARÍA

Asesoramiento:

UNIVERSIDAD DE BURGOS:
DE LAS HERAS GONZÁLEZ, Mª PILAR
HERNANDO ARNÁIZ, ENRIQUE

UNIVERSIDAD DE LEÓN:
CARRIEGOS VIEIRA, MIGUEL
DE CASTRO GARCÍA, NOEMÍ
MUÑOZ CASTAÑEDA, ÁNGEL LUIS
SUÁREZ CORONA, ADRIANA
TROBAJO DE LAS MATAS, MARÍA TERESA

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA:
CÁCERES GARCÍA, MARÍA JOSÉ
CHAMOSO SÁNCHEZ, JOSÉ MARÍA
GONZÁLEZ ASTUDILLO, MARÍA TERESA
MOLINA GONZÁLEZ, MARTA
RODRÍGUEZ SÁNCHEZ, MERCEDES
SÁNCHEZ BARBERO, BEATRIZ

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID:
ARCE SÁNCHEZ, MATÍAS
CONEJO GARROTE, LAURA
CUIDA GÓMEZ, MARÍA ASTRID
MARBÁN PRIETO, JOSÉ MARÍA
MAROTO SÁEZ, ANA ISABEL
PALOP DEL RÍO, BELÉN

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ DE HENARES:
RAMOS ALONSO, PEDRO

Revisión de la maquetación:

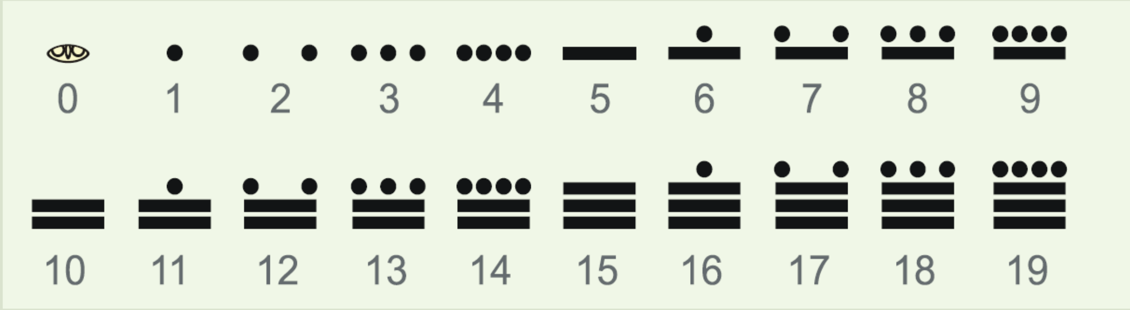
LOBO DE LUCAS, JUAN LUIS
SERRANO CABALLERO, MANUEL ERNESTO
MANJARRÉS GOBERNADO, LAURA
GARCÍA DAVÍA, MARÍA ANTONIA
VALERO TEJEDOR, ISABEL
MERINO DONCEL, MARÍA
ALONSO SANZ, ERNESTO
RUIZ NÚÑEZ, ROSA MARÍA
SANTA OLALLA TOVAR, JOSÉ MARÍA

Fecha de publicación: diciembre de 2023

ISBN TOMO I: 978-84-9718-727-5

ISBN OBRA COMPLETA: 978-84-9718-726-8

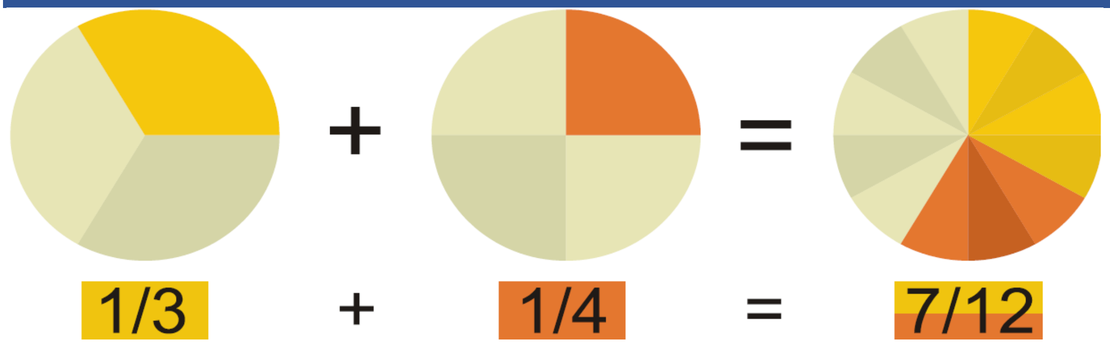
Índice



Calendario

Cuadro de botones de un ascensor

FRACCIONES Y DECIMALES — PÁGINA 100



Suma de Fracciones.

RAZONES Y PORCENTAJES — PÁGINA 142

ARROZ CALDOSO:

- 1 parte de arroz.

- 4 partes de agua.

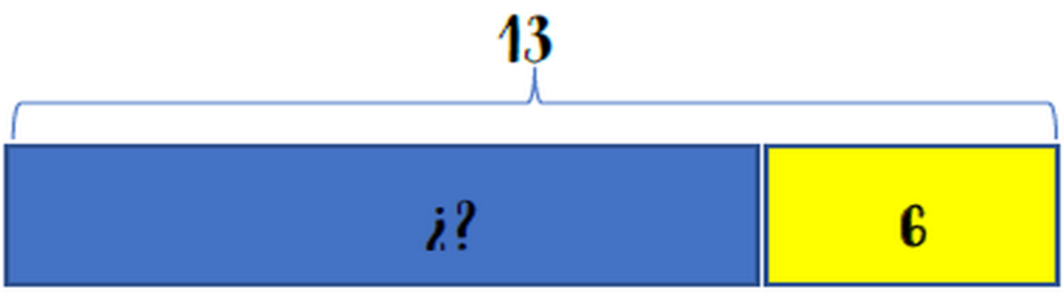
Proporción de agua y arroz en la receta para arroz caldoso

ÁLGEBRA — PÁGINA 168

Amalie Emmy Noether

Emmy Noether, fue fundamental en el desarrollo del Álgebra en el siglo XX.

ECUACIONES — PÁGINA 190



Podemos dibujar y manipular para entender cómo resolver ecuaciones.

Símbolos utilizados en las herramientas matemáticas

RETOS Problemas iniciales que sirven como introducción de los contenidos del apartado.

APRENDE Y APLICA Explicación de los contenidos del apartado

Idea principal. Explicación y ejemplos de un concepto matemático.

Procedimiento. Explicación y ejemplos de un procedimiento matemático.

PRACTICA Ejercicios y problemas para practicar lo aprendido en el apartado.

NÚMEROS NATURALES

ÍNDICE

PROBLEMAS QUE VAMOS A RESOLVER

1.- ***Los nombres más comunes:***

A continuación, se muestran los 5 nombres de mujer y de hombre más comunes en España:

Mujeres		Hombres	
Ana María	272 433	Antonio	666 584
Carmen	383 575	Daniel	298 813
Isabel	262 845	David	366 782
Josefa	269 508	Francisco	488 901
Laura	257 015	Javier	307 329

a) Ordena los nombres de mujer y de hombre (por separado) de mayor a menor (pon el orden junto al nombre).

b) Ordena los nombres de mujer y de hombre (mezclados) de mayor a menor (pon el orden junto al nombre con otro color).

c) ¿Cuántas personas en total de esa lista tienen nombre que contengan una O?

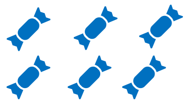
d) ¿Hay más Carmen o David? ¿Cuál es la diferencia?

e) Estima, sin hacer el cálculo, si entre Carmen y Josefa habrá más o menos que entre David y Daniel, y después calcula la diferencia.

2.- Calcula mentalmente y explica cómo lo haces:

a) 82 + 29 b) 47 - 28 c) 29 · 5 d) 500: 10

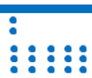
¿QUÉ SABES DE ...?

 VI $3 \cdot 2$ 6 110 

VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

$$16 \cdot 5 = 16 \cdot 10 : 2 = 160 : 2 = 80$$

VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

 $(2 + 3) \cdot 5$  $2 + 3 \cdot 5$

VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

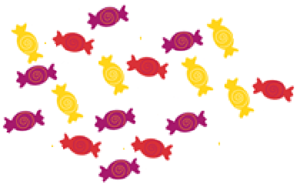
$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 5 \cdot 2$ $\quad$ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ ¿?

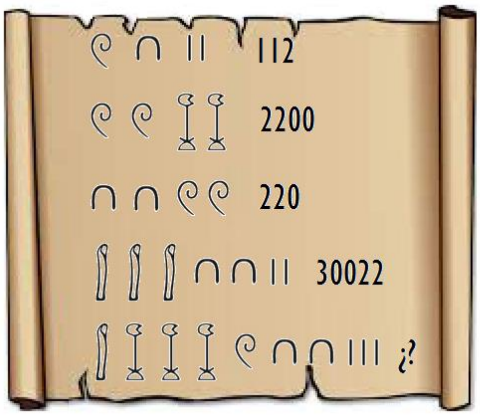
VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

1. ¡QUÉ NÚMEROS TAN NATURALES!

RETOS

A) Los protagonistas de Los Simpson tienen únicamente cuatro dedos en cada mano. Inventa un símbolo para cada uno de sus ocho dedos y explica cómo representarías la cantidad de caramelos que hay en el dibujo.





B) He descubierto un extraño documento que relaciona símbolos con números, ¿podrías ayudarme a descifrar el último número?

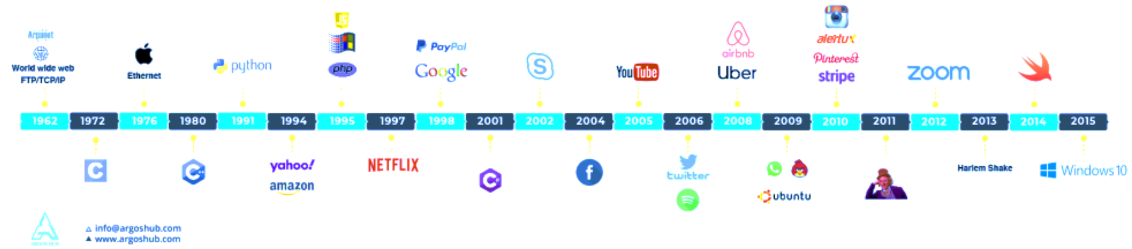
APRENDE Y APLICA

Los números naturales sirven para contar, ordenar e identificar. Los números naturales forman un conjunto representado por la letra ℕ. Son los primeros que utilizó el ser humano para representar cantidades, usándolos para contar objetos, personas, los animales que cazaban, etc, y también para establecer un orden (el orden en una representación religiosa, por ejemplo). Al principio la representación era muy simple: una unión de marcas servía para representar los distintos números. Pero cuando las cantidades crecían, esa forma de representación dejó de ser útil y hubo que utilizar otras, de ahí que se crearan distintos ***sistemas de numeración***. Los sistemas de numeración permiten escribir cualquier número natural mediante una unión de símbolos. Esa representación se utiliza muchas veces para identificar o distinguir objetos o personas, por ejemplo, esa es la función del número del carné de identidad o del número de una camiseta de un deportista.

Un sistema de numeración está formado por símbolos y reglas para unir los símbolos. Uno de los sistemas de numeración que aún se utiliza para nombrar los siglos, los capítulos de un libro, etc, es el ***sistema de numeración romano*** que has estudiado en primaria. Pero ese sistema de numeración no era útil para hacer cálculos, así que históricamente se fue extendiendo un sistema mucho más eficiente para ello, el ***sistema de numeración decimal***, que es el que utilizamos casi siempre. Como sabes, consta de nueve símbolos, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 y se basa en agrupar las cantidades de diez en diez (seguramente tenga que ver con el hecho de tener 10 dedos en las manos, recuerda el reto de los Simpson), por lo que se dice que 10 es la base de la numeración. Otro famoso sistema de numeración, el ***sistema binario*** que utilizan los ordenadores, sigue las mismas reglas que el decimal pero que tiene como base 2, es decir, tiene sólo dos símbolos, 0 y 1, y las cantidades se agrupan de dos en dos. Con esos dos símbolos se puede escribir cualquier dato y supone dos estados distintos de los componentes de un ordenador (carga magnética positiva/negativa, carga eléctrica de alto/bajo voltaje, picos y depresiones en la superficie de un disco). También son fáciles de transmitir. Piensa en que desde un alto podrías enviar a un amigo un mensaje de ceros y unos con una linterna tapándola y destapándola. Otro sistema de numeración utilizado en informática es el ***hexadecimal,*** que utiliza 16 símbolos, 0-9, A-F. Se usa por ejemplo para codificar los distintos colores que se usan en el ordenador (formado por 6 dígitos, cada pareja muestra la intensidad de los colores rojo, verde y azul, que mezclados proporcionan el color final).

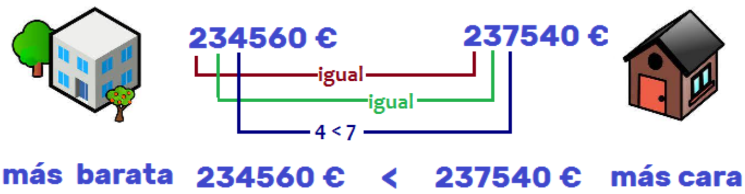
Color	Hexadecimal	Color	Hexadecimal
black	#000000	silver	#c0c0c0
gray	#808080	white	#ffffff
maroon	#800000	red	#ff0000
purple	#800080	fuchsia	#ff00ff
green	#008000	lime	#00ff00
olive	#808000	yellow	#ffff00
navy	#000080	blue	#0000ff
teal	#008080	aqua	#00ffff

Los números naturales se pueden representar sobre una recta. Esta es una representación gráfica, como lo son los puntos de un dado. Para la representación en la recta se marca el origen con un, 0, y se divide en segmentos iguales, cuyo extremo se marca con un número natural de forma consecutiva hacia la derecha. Así los números más grandes están a la derecha en la representación. Esta representación de los números naturales ayuda a poner de manifiesto el orden, como en las líneas del tiempo que se usan en historia.



Puedes ver esa misma representación en instrumentos de medida como reglas y metros. En este caso se cuenta cuántas veces cabe una unidad en un objeto en el que se mide una determinada magnitud, así que ***los números naturales también se utilizan para medir.*** Lo cierto es que pocas veces en lo que se mide caben un número justo de unidades y es necesario dividir la unidad, pero eso lo verás más adelante en el tema de fracciones y decimales. En este aspecto los naturales no sirven siempre y es necesario utilizar otro tipo de números.

Para ordenar números naturales expresados en el sistema decimal se comienza por la cifra que representa el orden más grande, si un número tiene esa cifra mayor que otro ya es más grande, si es igual se pasa a la siguiente y se procede de la misma forma. Por ejemplo, puedes razonar que 3658 es mayor que 658 porque el primero tiene 3 unidades de millar, pero en el segundo la de mayor valor es la centena. Se escribe 3658 > 658. También puedes decir que 658 es menor que 3658 y se escribe 658 < 3658. El número 3658 es mayor que 3558 porque, aunque ambos tienen las mismas unidades de millar (3), el primero tiene un 6 en las centenas y el segundo un 5, y el 6 es mayor. El número 3658 es mayor que 3656 porque tienen las mismas unidades de millar (3), centenas (6) y decenas (5) pero el primero tiene 8 unidades y el segundo 6.



PRACTICA

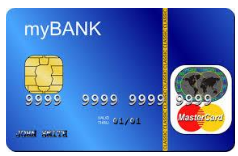
1.1.- Investiga y escribe los siguientes números utilizando otros sistemas de numeración:

a) 15 b) 109 c) 2057

1.2.- Observa las siguientes imágenes y clasifica según la utilidad de los números que aparecen:

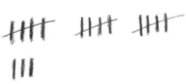
A. 

B. 

C. 

D. 7 8 8 4 9 2 8 0 8 2 7 4

E. 

F. 

G. 

H. 

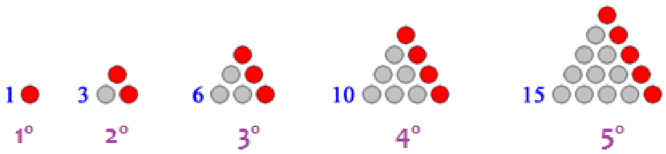
Contar: Ordenar: Identificar:

1.3.– Representa en la recta de forma aproximada las siguientes fechas:

- 1202: Fibonacci publica el Liber abaci ('Libro de los ábacos' o 'Libro de los cálculos') difundiendo en Europa la numeración arábiga.
- 550: Matemáticos hindúes dan al cero una representación numérica en el sistema de numeración indio.
- 1924: Se instaura la Medalla Fields con el fin de premiar a matemáticos destacados.
- 1882: Felix Klein inventa la botella de Klein.
- 1100: Los «números indios» han sido modificados por los matemáticos árabes para formar el moderno sistema de números arábigos.
- 1557: Robert Recorde en su obra The Whetstone of Witte inventa el signo = y populariza en Inglaterra los símbolos + y –.

1.4.– Números triangulares.

Los números triangulares son aquellos que se pueden representar mediante puntos formando un triángulo como en la imagen:



¿Cuál es el siguiente número triangular? Dibújalo

¿Cuál es el número que está en décimo lugar?

¿Hay alguna relación entre la posición que ocupa en la lista (primero, segundo, tercero, …) y el número de puntos?

2. CALCULAR Y ESTIMAR

RETOS

A) ¿Cuáles son los números que faltan en esta suma? Explica lo que haces para encontrarlos.

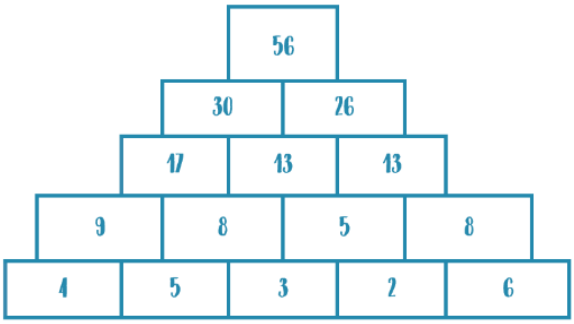
		2	1	
+	5		5	2
	9	1		8

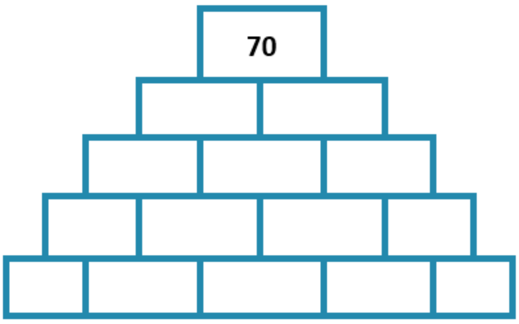
¿Cuáles faltan en la multiplicación? Explica lo que haces para encontrarlos.

				8
x				
		2	7	6

B) Observa cómo se han obtenido los números la pirámide de la derecha, partiendo de los de abajo.

¿Cómo tienes que escribir los números 3, 2, 5, 7 y 1 en la pirámide siguiente para que se obtenga el número de arriba, completando la pirámide de la misma forma?





C) Haz un dibujo que te permita resolver el siguiente problema:

Una caja y su tapa cuestan 13 euros. Si la caja cuesta un euro más que la tapa ¿cuánto cuesta cada uno?

APRENDE Y APLICA

Las operaciones básicas con números naturales, suma y resta, multiplicación (o producto) y división (o cociente) sirven para resolver multitud de problemas cotidianos. Habrás observado que las dos primeras se relacionan pues, como has visto en el primer reto, para encontrar un sumando que falta basta con usar la resta. Igual ocurre con la multiplicación y la división, son operaciones inversas. Cuando los números son pequeños es posible utilizar ***cálculo mental***, utilizando para ello diversas estrategias. Cuando las cantidades son más grandes se pueden usar los ***algoritmos*** que aprendiste en primaria. Un algoritmo es una sucesión de pasos que debes seguir para hallar la solución de las operaciones. No son únicos, hay muchos algoritmos para operar, aunque todos se basan en las propiedades del sistema de numeración que utilizamos. Cuando los números son muy grandes conviene utilizar la ***calculadora,*** en cuyo caso es importante también aprender a ***estimar*** los resultados. Estimar es hallar una solución aproximada y se hace mentalmente. Por ejemplo, al multiplicar 4327 por 619 podemos pensar que la solución estará cercana al producto de 4000 por 600, que es fácil de hacer mentalmente ya que basta con multiplicar 4 por 6 y añadir todos los ceros. La solución estará cercana a 2 400 000 y si, por ejemplo, obtuviéramos algo como 256 700 sabríamos que nos hemos equivocado al teclear.

Para ***resolver problemas*** debes tener claro que sumar tiene que ver con unir o añadir cosas, restar con quitar o buscar sumandos desconocidos, multiplicar con hacer sumas repetidas, con disposiciones rectangulares o distintas combinaciones y dividir con repartos, con la búsqueda de factores desconocidos o con contar cuántas veces cabe una cantidad en otra.

No siempre se obtiene una cantidad exacta al dividir. Puede quedar un resto. Si la división es exacta el dividendo es igual al divisor por el cociente. En cambio, si la división no es exacta, ***el dividendo será igual al divisor por el cociente más el resto***. Tenlo en cuenta cuando resuelvas problemas con divisiones.

DIVIDENDO 504 | 10 DIVISOR
4   50 COCIENTE
RESTO

DIVIDENDO = DIVISOR · COCIENTE + RESTO

Por ejemplo: 180 : 5 = 36 es exacta → 180 = 36 ·5

180 : 7 = 25 tiene resto 5 → 180 = 25 · 7 + 5

Estrategias de cálculo mental. Para hacer cálculos mentales hay multitud de estrategias. Vamos a explicar algunas de ellas:

- ***Descomponer y recomponer en sumas:*** Se pueden escribir los números como suma de otros dos (descomponer) para operar de forma más sencilla, agrupando los sumandos de otra manera, gracias a la ***propiedad asociativa y a la propiedad conmutativa de la suma.*** Por ejemplo:

$$38 + 9 = (7 + 31) + 9 = 7 + (31 + 9) = 7 + 40 = 47$$

$$46 + 52 = 40 + 6 + 50 + 2 = 40 + 50 + 6 + 2 = 90 + 8 = 98$$

- ***Descomponer y recomponer en multiplicaciones:*** Como en la anterior, se pueden escribir los números como producto de otros dos (descomponer), agrupando los factores de otra manera, gracias a la ***propiedad asociativa y a la propiedad conmutativa del producto.*** Por ejemplo:

$$16 \cdot 15 = (8 \cdot 2) \cdot 15 = 8 \cdot (2 \cdot 15) = 8 \cdot 30 = 240$$

- ***Sumar y restar la misma cantidad en una suma:*** Para facilitar el cálculo de una suma con dos sumandos nos podemos fijar en que la suma no cambia si a un sumando se le suma una cantidad y al otro se le resta la misma cantidad. Por ejemplo:

$$29 + 57 == 29 + 1 + 57 - 1 = (29 + 1) + (57 - 1) = 30 + 56 = 86$$

- ***Sumar o restar la misma cantidad en una resta:*** Para facilitar el cálculo en una resta de dos números nos podemos fijar en que la resta no cambia si a ambos le sumamos o restamos la misma cantidad. Por ejemplo:

$$57 - 29 = (57 + 1) - (29 + 1) = 58 - 30 = 28$$

$$32 - 29 = (32 - 2) - (29 - 2) = 30 - 27 = 3$$

- ***Multiplicar por 10, 100, 1000, ….:*** Para multiplicar por 10 se añade un 0 al número, por 100 se añaden dos ceros, por 1000 tres ceros, etc. Por ejemplo:

$$45 \cdot 1000 = 45000$$

- ***Multiplicar por 5:*** Para multiplicar por 5 se multiplica por 10 (lo que equivale a añadir un 0 al número) y divide por 2 (observa que 10:2 es igual a 5). Esta técnica se llama ***cero y mitad***:

$$120 \cdot 5 = 120 \cdot 10 : 2 = 1200 : 2 = 600$$

- ***Multiplicar por 11:*** Para multiplicar por 11 se descompone el 11 en 10 más 1 y se utiliza la ***propiedad distributiva del producto respecto a la suma***, así que basta multiplicar el número por 10 (añadir un 0) y sumar el mismo número. Por ejemplo:

$$62 \cdot 11 = 62 \cdot (10 + 1) = 62 \cdot 10 + 62 \cdot 1 = 620 + 62 = 682$$

  También puedes observar que las unidades del resultado son las del número, las decenas son la suma de las unidades y decenas del número y las centenas son las decenas del número. Esto tiene que ver con el algoritmo de la multiplicación. Así, se puede calcular directamente una multiplicación por 11 sumando cada pareja de cifras consecutivas:

6275 · 11 = 69025 *tiene como unidad 5, como decena 5+7=12 (2 decenas y 1 centena), como centena 2+7 más una del cálculo anterior, 10 (0 centenas y 1 unidad de millar), como unidad de millar 6 + 2 más una del cálculo anterior, 9, y como decena de millar 6.*

- ***Multiplicar por 9:*** Para multiplicar por 9 se descompone el 9 en 10 menos 1 y se utiliza de nuevo la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, así que basta multiplicar el número por 10 (añadir un 0) y restar el mismo número. Por ejemplo:

$$56 \cdot 9 = 56 \cdot (10-1) = 56 \cdot 10 - 56 \cdot 1 = 560 - 56 = 504$$

- ***Multiplicar por 15:*** Para multiplicar por 15 se descompone el 15 en 10 más 5 y como antes basta multiplicar el número por 10 (añadir un 0) y sumar la mitad de ese producto (la multiplicación por 5 es la mitad de la de 10). Por ejemplo:

$$62 \cdot 15 = 62 \cdot (10 + 5) = 62 \cdot 10 + 62 \cdot 5 = 620 + 310 = 930$$

- ***Dividir entre 2, 4 y 8:*** Para dividir por números potencias de 2 hay que calcular la mitad (si es entre 2), la mitad de la mitad (si es entre 4) y la mitad de la mitad de la mitad (si es entre 8). Por ejemplo:

$$360 : 8 = (360 : 2) : 4 = (180 : 2) :2 = 90 : 2 = 45$$

- ***Tus estrategias:*** Añade otras estrategias que utilices en el cálculo mental y compártelas con el resto de la clase.

PRACTICA

2.1.– En la sociedad actual convivimos con una gran variedad de códigos numéricos. Los vemos en el DNI, en las tarjetas de crédito, en los códigos de barras, …

En todos ellos hay una letra o un dígito de control para detectar errores al escribirlos. En el DNI, para encontrar la letra asociada, tienes que dividir el número entre 23 y considerar el resto. Cuando tengas el resto sólo tienes que mirar en la tabla siguiente para saber qué letra corresponde al número del DNI.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E

a) Explica cómo hallarías el resto de la división entre 23 con una calculadora. Prueba con distintos números de DNI (puedes inventarte el número o comprobar alguno de los de tu familia)

b) Diseña un algoritmo o programa que de cómo resultado la letra al introducir el número de DNI.

2.2.– Aquí tienes un número de cuenta bancaria

Entidad	Oficina	D.C.	N.º Cuenta
4321	5678	46	1234567890

Para calcular el primer dígito de control se usan las cifras de la entidad bancaria como se explica a continuación. Comprueba que el dígito del número anterior es correcto siguiendo los pasos.

- La primera cifra de la entidad se multiplica por 4
- La segunda cifra de la entidad se multiplica por 8
- La tercera cifra de la entidad se multiplica por 5
- La cuarta cifra de la entidad se multiplica por 10
- La primera cifra de la oficina se multiplica por 9
- La segunda cifra de la oficina se multiplica por 7
- La tercera cifra de la oficina se multiplica por 3
- La cuarta cifra de la oficina se multiplica por 6
- Se suman todos los resultados obtenidos.
- Se divide entre 11 y nos quedamos con el resto de la división.
- A 11 le quitamos el resto anterior, y ese es el primer dígito de control, con la salvedad de que, si nos da 10, el dígito es 1, y si nos da 11, el dígito es 0.

2.3.– Utiliza estrategias de cálculo mental y reta a tu compañero/a. Contrarreloj:

57 + 13	89 + 22	78 + 24	17 + 36	43 + 26
91 + 37	34 + 76	89 - 19	67 + 15	45 + 39
23 · 11	24 · 9	56 · 11	19 · 9	43 · 11
15 · 9	27 · 11	35 · 9	62 · 11	15 · 9
100 : 4	280 : 8	200 : 8	800 : 16	420 : 4
328 : 8	34 · 5	23 · 5	56 · 5	35 · 5
42 · 5	32 · 5	420 · 10	31 · 15	31 - 15

Explica alguna de las estrategias utilizadas

2.4.– Hemos multiplicado 127 589 por 28 172 y hemos obtenido 359 418 213 ¿es posible este resultado?

2.5.- *EL EMPIRE STATE BUILDING:*

El Empire State Building fue el primer edificio de más de 100 pisos. Lo inauguraron en 1931. Su altura es de 381 m y tiene 102 pisos. En 1953 se instalaron la torre de emisión y la antena que le dio una altura total de 443 m. En el piso 86, a 320 m de altura, se encuentra un observatorio de la ciudad.

El edificio cuenta con 73 ascensores, de los cuales, 8 son de alta velocidad, que oscila entre 183 y 427 m/min. Tiene 1860 escalones, 6500 ventanas y aloja alrededor de 1000 empresas. Hay una carrera muy famosa por sus escaleras, hasta el piso 86. Los corredores más rápidos suben 1576 escalones en unos 10 minutos.

a) ¿Cuántos años pasaron desde que se inauguró hasta que se instalaron la torre de emisión y la antena?

b) ¿Cuánto miden entre la torre de emisión y la antena?

c) ¿Cuánto mide aproximadamente (sin sacar decimales, es decir, entre tantos y tantos metros) cada piso?

d) ¿Cuánto se tarda en subir al piso 86 en un ascensor de alta velocidad, si va a 183 m/min? ¿Y si va a la velocidad máxima?

e) ¿Cuántos escalones suben aproximadamente los corredores más rápidos en un minuto? ¿Y en un segundo?

f) ¿Cuántos escalones hay desde el piso 86 al 102? Uno de los corredores siguió desde el piso 86 hasta arriba y el trayecto le duró 2 minutos, ¿cuántos escalones subió por minuto? ¿Fue más rápido o más despacio que al subir hasta el piso 86?

2.6.- *DESTINOS Y PRECIOS:*

Juan y María celebran sus bodas de plata y han decidido cruzar el charco. Quieren visitar Estados Unidos, aunque todavía no han elegido la ciudad. Les cuesta decidirse, así que han consultado varias opciones y han organizado la información en la siguiente tabla:

Ciudad	Hotel (por noche)	Vuelo (Ida y Vuelta)	Hotel + vuelo (7 noches)
Nueva York	123 €	1073 €	1382 €
Chicago	52 €	1644 €	2677 €
Los Ángeles	122 €	1701 €	3136 €
San Francisco	193 €	1332 €	1794 €

a) ¿Cuál es la ciudad más cara para alojarse? ¿Y la más barata? Calcula el precio del alojamiento en cada una de las ciudades para las siete noches.

b) ¿A qué ciudad resulta más caro llegar? Ordena las ciudades por el precio del vuelo de menor a mayor.

c) Calcula el precio total entre el vuelo y el hotel (7 noches) para cada una de las ciudades y compara con el precio del lote hotel + vuelo de cada ciudad, ¿resulta este último rentable en todos los casos?

d) ¿Qué resulta más caro, el alojamiento (7 noches) o el desplazamiento (ida y vuelta), en cada una de las ciudades?

e) ¿Cuánto dinero les cuesta, como mínimo, el viaje a cada una de las ciudades?

3. ELEVANDO LOS NÚMEROS

RETOS

A) En la frutería se realiza un pedido de Kiwis.

Los kiwis vienen en paquetes de 2 filas con 2 kiwis en cada una. Los paquetes se agrupan en cajas de 2 filas con 2 paquetes en cada una. Han llegado 4 cajas a la frutería. Averigua:

- Número de kiwis por paquete:
- Número de kiwis por caja:
- Número de kiwis en total:

B) Se quieren colocar 64 canicas formando un cuadrado, de forma que el número de canicas en cada lado sea idéntico. ¿Cuántas canicas tendrá cada lado del cuadrado?

¿Se podrían colocar 68 canicas formando un cuadrado?

APRENDE Y APLICA

Las potencias nos permiten expresar de forma abreviada un producto donde los factores son todos iguales, al igual que la multiplicación es una forma de resumir una suma de sumandos iguales. Una ***potencia*** es pues una multiplicación de un número por sí mismo un número determinado de veces, y se representa escribiendo el factor junto con un superíndice (un número más pequeño a su derecha arriba) que indica el número de repeticiones. Por ejemplo:

- $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{4,}$ en este producto el factor es 5 y se repite 4 veces.
- $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$, en este producto el factor es 3 y se repite 5 veces.

En una potencia llamamos ***base*** al factor o número que se repite y ***exponente*** al número de veces que se repite:

- $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$, potencia de base 5 y exponente 4.
- $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$, potencia de base 3 y exponente 5.

Generalizando, si *a* y *n* son ***números naturales****, se define la potencia* ***a^n*** *como el resultado de* multiplicar a por sí mismo n *veces:*

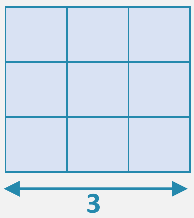
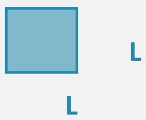
$$\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{4\ veces} = 7^4 \qquad \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\ veces} = a^n$$

Para leer correctamente una potencia se lee la base *"al o a la"* o "elevado a" y el exponente.

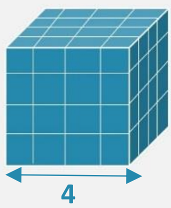
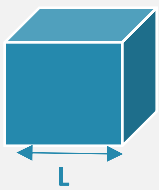
Existen algunos exponentes que tienen lecturas específicas que justificaremos más adelante. El exponente 1 en potencias no se escribe y no suele leerse. Podemos ver ejemplos en la siguiente tabla.

DESARROLLO	POTENCIA	RESULTADO	LECTURA
2	2	2	*Dos*
2 · 2	2^2	4	*Dos al cuadrado*
2 · 2 · 2	2^3	8	*Dos al cubo*
2 · 2 · 2 · 2	2^4	16	*Dos a la cuarta*
2 · 2 · 2 · 2 · 2	2^5	32	*Dos a la quinta*
2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2	2^6	64	*Dos a la sexta*

Cuadrados y cubos. Fíjate en los exponentes 2 y 3, el exponente 2 se lee *"al cuadrado"* y el exponente 3 se lee *"al cubo".* Esas denominaciones son debidas a las siguientes relaciones con la geometría:

ÁREA DEL CUADRADO	REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	POTENCIA
$A = 3 \cdot 3 = 3^2$		*Tres al cuadrado*
$A = L \cdot L = L^2$		*Lado al cuadrado*

Es decir, 3^2 es el área de un cuadrado, de lado igual a 3 unidades. Fíjate en las unidades de medida, en las áreas aparecen siempre elevadas al cuadrado; m^2, cm^2, etc.

VOLUMEN DEL CUBO	REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	POTENCIA
$V = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$		*Cuatro al cubo*
$V = L \cdot L \cdot L = L^3$		*Lado al cubo*

Es decir, 4^3 es el volumen de un cubo cuyo lado mide 4 unidades. Fíjate en las unidades de medida, en los volúmenes aparecen siempre elevadas al cubo; m^3, cm^3, etc.

Raíces. Al igual que la resta puede definirse como la operación inversa de la suma, la división como la inversa de la multiplicación, ***las raíces son las operaciones inversas de las potencias***. Las raíces son operaciones matemáticas muy antiguas aparecen referencias en el Papiro de Ahmes (1650 a.C), concretamente aparece la raíz cuadrada, lo que demuestra que esta operación era conocida y usada por la civilización egipcia. Nosotros estudiaremos las raíces cuadradas y cubicas.

Elementos de las raíces:

índice $\sqrt[3]{125}$ **radical**

radicando

Raíces cuadradas: una raíz cuadrada de un número (radicando) es otro número que elevado al cuadrado es igual al radicando. Todos los cuadrados perfectos (1, 4, 9, …) tienen raíces cuadradas que son números naturales (raíces exactas). La mayoría de las raíces, sin embargo, no son números naturales como se verá más adelante.

Potencia	Cuadrado perfecto	Raíz cuadrada
1^2	1	$\sqrt{1} = 1$
2^2	4	$\sqrt{4} = 2$
3^2	9	$\sqrt{9} = 3$
4^2	16	$\sqrt{16} = 4$
5^2	25	$\sqrt{25} = 5$
6^2	36	$\sqrt{36} = 6$
7^2	49	$\sqrt{49} = 7$

Generalizando, la definición de raíz cuadrada;

$$\sqrt{a} = b \Longrightarrow b^2 = a$$

Las raíces cuadradas están relacionadas con el área de un cuadrado, $\boldsymbol{A = L^2}$. Si tenemos el área de un cuadrado y queremos conocer su lado, necesitamos calcular una raíz cuadrada. Ejemplo:

81 cm^2

El lado del cuadrado:

$$L = \sqrt{81\ cm^2} = 9cm$$

Para ***calcular raíces cuadradas*** existe un algoritmo, pero la mayoría las resolverás con ayuda de la calculadora, que tiene una tecla para hacer dicho cálculo. Conociendo los cuadrados perfectos podemos calcular raíces exactas y estimar el valor de otras raíces que no lo son, buscando cuadrados perfectos mayores y menores que el radicando. Por ejemplo:

$\sqrt{59}$	$\sqrt{130}$	La raíz de 59 es un número comprendido entre 7 y 8.
$7^2 < 59 < 8^2$	$11^2 < 130 < 12^2$	
$\sqrt{49} < \sqrt{59} < \sqrt{64}$	$\sqrt{121} < \sqrt{130} < \sqrt{144}$	La raíz de 130 está comprendida entre 11 y 12.
$7 < \sqrt{59} < 8$	$11 < \sqrt{130} < 12$	

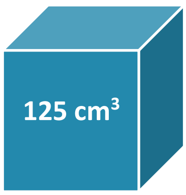
Raíces cúbicas: una raíz cúbica de un número (radicando) es otro número que elevado al cubo es igual al radicando. Todos los cubos perfectos (1, 8, 27, …) tienen raíces cúbicas que son números naturales.

Potencia	Cubo perfecto	Raíz cúbica
1^3	1	$\sqrt[3]{1} = 1$
2^3	8	$\sqrt[3]{8} = 2$
3^3	27	$\sqrt[3]{27} = 3$
4^3	64	$\sqrt[3]{64} = 4$
5^3	125	$\sqrt[3]{125} = 5$
6^3	216	$\sqrt[3]{216} = 6$
7^3	343	$\sqrt[3]{343} = 7$

Generalizando, la definición de raíz cúbica;

$$\sqrt[3]{a} = b \Longrightarrow b^3 = a$$

Las raíces cúbicas están relacionadas con el volumen de un cubo, ***V = L · L· L = L³***. Si tenemos el volumen de un cubo y queremos conocer su lado, necesitamos calcular una raíz cúbica. Ejemplo:



El lado del cubo:

$$L = \sqrt[3]{125\ cm^3} = 5cm$$

Para ***calcular raíces cúbicas*** hay que tener presentes los números que son cubos perfectos. También la calculadora posee una tecla para hacer dicho cálculo. Conociendo los cubos perfectos, además, podemos estimar el valor de otras raíces, buscando cubos perfectos mayores y menores que el radicando. Por ejemplo:

$\sqrt[3]{20}$	$\sqrt[3]{200}$	La raíz cúbica de 20 es un número comprendido entre 2 y 3.
$2^3 < 20 < 3^3$	$5^3 < 200 < 6^3$	
$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{27}$	$\sqrt[3]{125} < \sqrt[3]{200} < \sqrt[3]{216}$	La raíz cúbica de 200 está comprendida entre 5 y 6.
$2 < \sqrt[3]{20} < 3$	$5 < \sqrt[3]{200} < 6$	

PRACTICA

3.1.– *Problemas:*

A) En un juego, el número de puntos obtenidos al superar un nivel es el doble de los puntos obtenidos al superar el nivel anterior. Sabemos que en el primer nivel ganas dos puntos.

¿Cuántos puntos tendrá Pablo si ha conseguido pasar el nivel 9?

B) Un virus se triplica cada minuto que pasa. Si inicialmente *(minuto 0)* tenemos un virus, ¿Cuántos virus habrá a los 1, 2, 3, 4 y 10 minutos? ¿Y a los 20 minutos? Completa la tabla:

Tiempo (minutos)	0	1					
Nº de virus (potencia)							
Nº de virus (cifras)	1						

C) En un puerto seco se almacenan varios contenedores de barco, en 20 filas de 8 contenedores. Por motivos de logística se decide colocarlos formando un cuadrado perfecto, ¿Es posible? ¿Cuántos contenedores sobrarían? ¿Cuántos faltarían para hacer el siguiente cuadrado perfecto?

D) Un contenedor tiene forma cúbica y su arista mide 200 cm. En su interior se almacenan cajas con forma cúbica de 5 cm de arista.

- ¿Cuántas cajas pequeñas necesitamos apilar para que alcancen la misma altura que el contenedor?
- ¿Cuántas cajas pequeñas caben en total en el contenedor?

E) Se quieren plantar 84 almendros en una finca formando un cuadrado.

¿Cuántos almendros habrá en cada lado? ¿Sobra alguno? ¿Cuántos más habrá que comprar para plantarlos todos en forma de cuadrado?

3.2.– ***Investigación:*** Las potencias de base 10 se pueden utilizar para expresar números grandes acortando su escritura. Veamos ahora la masa de algunos planetas del sistema solar y una forma más corta de escribirla:

- Masa de la Tierra *5 975 000 000 000 000 000 000 000 kg*, lógicamente no es una cantidad muy sencilla de escribir, pero sabemos que podemos expresar todos esos ceros utilizando potencias en base 10. Así la Tierra podremos decir que pesa: $5\,975 \cdot 10^{21}$ *kg*.
- Escribe las masas de los siguientes planetas utilizando las potencias en base 10:

  Masa de la Luna: *73 600 000 000 000 000 000 000 kg = 736 · 10*—

  Masa de Plutón: *13 600 000 000 000 000 000 000 kg=*

  Masa de Mercurio: *330 000 000 000 000 000 000 000 Kg =*
- Busca otros números grandes y escríbelos utilizando potencias en base 10.

3.3.- *EL CONCIERTO DE PIANO.*

Sara y Alfonso van a dar un concierto de piano. Para ello, han decidido alquilar una sala y todas las que encuentran son cuadradas. Así que primero van a hacer cálculos para ver cuál deben reservar. El precio de las salas depende del número de plazas y es de 2 € por plaza.

a) Como las sillas deben formar un cuadrado, ¿cómo tiene ser el número de filas y columnas?

b) ¿Pueden colocar cualquier número de sillas sin que falte ni sobre ninguna?

c) Supongamos que colocan 4 filas y 4 columnas de sillas. ¿Cuántas personas pueden asistir? ¿Y si colocan 5 filas y 5 columnas?

d) Han visto 5 salas y, según sus cálculos, en la primera caben 64 personas; en la segunda, 80; en la tercera, 100; en la cuarta, 144; y en la quinta, 400. ¿Son correctos todos sus cálculos? Justifica la respuesta.

e) Calcula el coste de cada sala del apartado anterior, corrigiendo los cálculos erróneos, si los había.

f) Por ahora llevan vendidas 82 entradas. ¿Cuántos asientos tiene la sala que deben alquilar para que entren todos los asistentes? ¿Cuántas entradas más deben vender para que el aforo esté completo? Indica el número de filas y columnas de la sala.

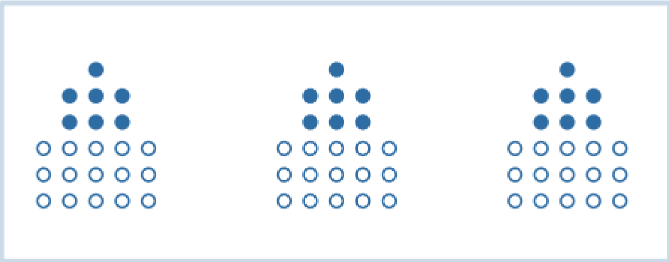
g) Si cobran la entrada a 5 €, calcula el beneficio total en el caso de que consigan completar el aforo. ¿Cuál es el beneficio por cada entrada?

h) Imagina que no consiguen completar el aforo y al final solo venden 90 entradas. ¿Cuál sería el beneficio en este caso?

4. COMBINANDO OPERACIONES

RETOS

A) Escribe una expresión para contar los puntos de la imagen, usando solo números de una cifra, paréntesis y los signos de las cuatro operaciones básicas.



B) Siguiendo la idea del apartado anterior, dibuja conjuntos de puntos que correspondan a estas operaciones:

a) $2 \cdot (4^2 - 1)$ b) $2 \cdot 4^2 - 1$ c) $2 \cdot (3 \cdot 4 + 2)$

APRENDE Y APLICA

Para realizar operaciones combinadas con números naturales es necesario seguir un orden a la hora de realizar las distintas operaciones que pueden aparecer (suma, resta, multiplicación, división, potencias, raíces, paréntesis, …). Esto es lo que se conoce habitualmente como ***jerarquía de operaciones***. Utilizamos el paréntesis cuando queremos romper ese orden o jerarquía. Las operaciones que van entre paréntesis se hacen primero.

El ***orden*** para realizar operaciones es:

1º Operaciones entre paréntesis
2º Potencias y Raíces
3º Multiplicaciones y divisiones
4º Sumas y restas

Por ejemplo, vamos a resolver: : $2^4 - (5 \cdot 3 - 6) + 28 : \sqrt{4} \cdot 3$

4. COMBINANDO OPERACIONES

1º *Operaciones entre paréntesis.* Dentro de los paréntesis aplicamos el orden: potencias y raíces primero, multiplicaciones y divisiones a continuación, sumas y restas después:

$$2^4 - (5 \cdot 3 - 6) + 28 : \sqrt{4} \cdot 3 =$$

$$2^4 - (15 - 6) + 28 : \sqrt{4} \cdot 3 =$$

$$2^4 - 9 + 28 : \sqrt{4} \cdot 3 =$$

2º *Potencias y Raíces.* Resolvemos potencias y raíces:

$$2^4 - 9 + 28 : \sqrt{4} \cdot 3 =$$

$$16 - 9 + 28 : 2 \cdot 3$$

3º *Multiplicaciones y divisiones.* Resolvemos multiplicaciones y divisiones en orden, de izquierda a derecha si aparecen varias multiplicaciones y divisiones seguidas:

$$16 - 9 + 28 : 2 \cdot 3 =$$

$$16 - 9 + 14 \cdot 3 =$$

$$16 - 9 + 42 =$$

4º *Sumas y restas.* Por último, resolvemos sumas y restas en orden, de izquierda a derecha.

$$16 - 9 + 42 = 49$$

PRACTICA

4.1.– Lee y relaciona (con flechas) cada texto con la expresión correspondiente y despues calcúlalo.

En una caja hay 3 bolsas con 4 caramelos rojos y 6 caramelos verdes en cada una. **¿Cuántos caramelos hay en la caja?**	$3 \cdot 4 + 6$	42
En una caja hay 3 bolsas con 4 caramelos rojos en cada una y 6 caramelos verdes sueltos. **¿Cuántos caramelos hay en la caja?**	$(3 + 4) \cdot 6$	30
En una caja hay 3 caramelos rojos y 4 bolsas con 6 caramelos verdes en cada una. **¿Cuántos caramelos hay en la caja?**	$3 \cdot (4 + 6)$	27
En una caja hay bolsas con 3 caramelos rojos y 4 caramelos verdes en cada una. Hay 6 bolsas. **¿Cuántos caramelos hay en la caja?**	$3 + 4 \cdot 6$	18

4.2.– Resuelve las siguientes operaciones combinadas. Escribe cada paso en una línea y marca las operaciones que vas a resolver en cada paso:

a) $17 - 3 \cdot (5 - 4)$ b) $(7 + 8) \cdot 4 - 13$ c) $17 - 3 \cdot 2 + 5$

d) $4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 6 \cdot 3 =$ e) $2 \cdot (3 + 4) - 3 \cdot (7 - 4)$ f) $24 : 6 - 2 \cdot 10$

g) $42 - 4 \cdot 3 - 5 \cdot 7$ h) $5 \cdot 4 - (16 - 12) \cdot 2$ i) $9 \cdot (7 - 3) - 2 \cdot (7 + 5)$

4.3.– Coloca los parentesis necesarios para que las expresiones sean ciertas:

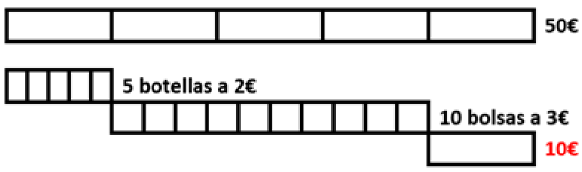
$7 - 4 \cdot 3 = 9$ $2 \cdot 7 - 6 = 2$ $4 + 6 : 2 = 5$ $8 - 2 + 5 = 1$

4.4.– Utiliza todos los números y construye una operación combinada que dé como resultado "**11**". A continuación inventa un problema que encaje con tu operación combinada.

75 12 3 24 6

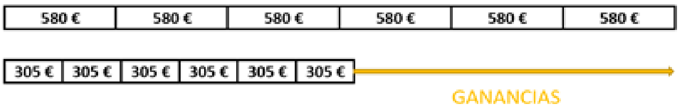
4.5.– Observa cómo se resuelve el siguiente problema:

María ha comprado para su cumpleaños 5 botellas de refresco a 2€ cada una y 10 bolsas de bocadillos, que cuestan 3€ cada una. Si pagó con un billete de 50€, ¿cuánto dinero le sobró?

<table>
<tr><td>DATOS
5 botellas a 2€
10 bolsas de bocadillos a 3€</td><td>PREGUNTA
¿Cuánto dinero le sobró?</td></tr>
<tr><td>REPRESENTA O DIBUJA EL PROBLEMA

</td><td>Cálculos:
Refrescos: 5 botellas · 2€ = 10€
Bocadillos: 10 bolsas · 3€ = 30€
Total de la compra: 10 + 30 = 40€
Le sobra: 50 – 40 = 10€
Operación combinada:
50 – (5 · 2 + 10 · 3) = 10€</td></tr>
<tr><td colspan="2">SOLUCIÓN Le sobraron 10€</td></tr>
</table>

Ahora resuelve tú los siguientes problemas siguiendo el mismo esquema:

A) *En una agencia de viajes organizaron una excursión a la playa que costaba 580€ por persona. Si la agencia invirtió 305€ por persona y viajaron 6 personas, ¿Cuánto dinero ganó la agencia?*

DATOS Excursión = 580€ por persona Agencia = 305€ por persona 6 personas	PREGUNTA ¿Cuánto dinero ganó la agencia por esta excursión?
REPRESENTA O DIBUJA EL PROBLEMA 	Cálculos:
SOLUCIÓN	

B) *En una granja, entre vacas, caballos y ovejas, hay 847 cabezas. Sabiendo que hay 31 caballos y que el número de vacas supera al de caballos en 108 unidades, ¿cuál es el número de ovejas?*

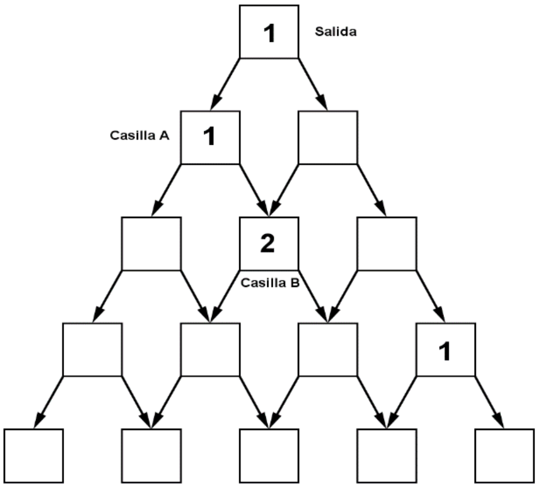
C) *Marta quiere comprarle a su madre un regalo de 80 €, pero sólo tiene ahorrado la paga mensual de 4 meses y 15 € que le ha dejado su hermana. ¿cuánto dinero le falta para poder comprar el regalo si la paga mensual es de 12€?*

D) *Un apicultor tiene 187 colmenas con una producción de dos cosechas al año, a razón de 9 kilos de miel por colmena en cada cosecha. La miel se envasa en tarros de un kilo y se comercializa en cajas de 6 tarros que se venden a 42€ la caja. ¿Qué beneficio anual produce?*

E) *El pirata Barba Plata ha encontrado un tesoro que tenía en total 3000 monedas de oro repartidas por igual en 3 cofres. Además, en cada cofre había también 200 monedas de plata y el doble de monedas de bronce que de plata. ¿Cuántas monedas había en total en cada cofre?*

F) *David compra 17 paquetes de cromos y en cada uno hay 7 cromos. Separa los que no tiene que son 39 y el resto los reparte, a partes iguales, entre sus 4 primos. ¿Cuántos cromos recibe cada uno?*

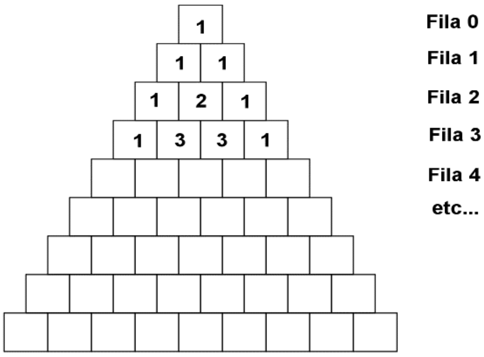
RUTAS



Primer paso: Individual. Sigue las casillas a partir de la salida hacia abajo, puedes ir hacia la derecha o hacia la izquierda, pero nunca hacia arriba. Observa que hay un camino para llegar desde la salida hasta la casilla A y por eso se escribe un 1 en la casilla. Hay dos caminos desde la salida hasta la casilla B (el que pasa por la casilla A y el que pasa por la casilla a la derecha de A) y por eso se escribe 2 en la casilla. Rellena todas las casillas y responde a las siguientes cuestiones.

1. ¿Ves alguna regla en los números que has anotado? ¿Eres capaz de averiguar los números sin contar las rutas?
2. Si añadieras otra fila más a la base del triángulo, ¿cuántas casillas tendrías que ponerle? ¿Qué números irían en cada una de esas casillas?

Segundo paso: Formemos ahora grupos de 3 o 4 personas. Lo primero que vamos a hacer en este paso es la puesta en común en el pequeño grupo de los resultados obtenidos individualmente por cada uno de los miembros del grupo en el paso anterior. Si esos resultados coinciden, lo más probable es que estén bien; en caso contrario, corregirlos entre todos los miembros del grupo.



Hemos llegado en el paso anterior al llamado Triángulo de Pascal, como el matemático que lo investigó por primera vez. Completad las 9 primeras filas (se puede seguir ampliando). Contestad las siguientes preguntas razonando cómo se llega al resultado (puede ser que tengáis que explicarlo al resto de grupos):

1. ¿Cuál es el segundo número de la fila 73? ¿Y el penúltimo número de la fila 105?
2. ¿Hay en la fila 39 algún número que no se repita? ¿Y en la fila 10? ¿Cuál es?
3. Expresa con una potencia la suma de todos los números de la fila 16.
4. Encuentra una línea que contenga la sucesión de números naturales (1, 2, 3, …) y utilizando una línea paralela a ella y sumas adecuadas, encuentra la sucesión de cuadrados perfectos (1, 4, 9, …).

5. Calculad las primeras potencias de 11: 11^0, 11^1, 11^2 y 11^3. ¿Veis alguna relación de los resultados con los números del triángulo? ¿Podríais deducir el valor de 11^4?
6. Siguiendo con la pregunta anterior: ¿se puede deducir a simple vista el resultado de 11^5? Intentad calcularlo utilizando los números de la tabla que aparecen en la fila 5, para ello, utilizad potencias de 10. Recordad la expresión de un número utilizando potencias de 10:

$$5137 = 7 + 3\cdot 10 + 1\cdot 100 + 5\cdot 1000 = 7\cdot 10^0 + 3\cdot 10^1 + 1\cdot 10^2 + 5\cdot 10^3$$

Tercer paso: Puesta en común en el gran grupo. Ahora cada grupo elegirá a un portavoz que explique al resto de grupos de forma clara, razonada y con la utilización del lenguaje matemático apropiado el resultado de una de las preguntas anteriores y cómo se llega a dicho resultado.

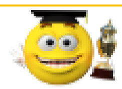
DE UN VISTAZO

DIBUJA LAS IDEAS PRINCIPALES DEL TEMA:

- ✓ Los números naturales se usan para contar, medir, ordenar o como códigos para expresar otras informaciones.
- ✓ Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos y reglas que nos permiten construir todos los números válidos en dicho sistema.
- ✓ Los números naturales se pueden representar gráficamente. La representación en la recta es una de esas representaciones gráficas.
- ✓ Las operaciones básicas son suma y su inversa la resta, multiplicación y su inversa la división.
- ✓ Se puede hacer cálculo mental con distintas estrategias, cálculo con algoritmos y cálculo con calculadora, donde es importante saber estimar el resultado.
- ✓ Una potencia es un producto de factores iguales.
- ✓ La raíz cuadrada de un número es la operación inversa de elevarlo al cuadrado; y la raíz cúbica, la inversa de elevarlo al cubo. Ambas pueden ser exactas o enteras.
- ✓ Para realizar operaciones combinadas hay que respetar la Jerarquía de operaciones.

EVALÚA Y AFIANZA

Llegados al final del tema reflexiona sobre lo que has aprendido. Marca en la siguiente tabla lo que corresponde a cada frase, haz la autoevaluación y revisa de nuevo la tabla.

¿CÓMO LO HAGO?	 Me cuesta hacerlo	 Estoy aprendiendo	 Lo hago bien	 Soy un experto
Utilizar los números naturales para contar, ordenar, representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa				
Reconocer los distintos sistemas de numeración				
Conocer los diferentes significados vinculados a cada operación y relacionar unas operaciones con otras				
Realizar cálculos con números naturales utilizando diferentes procedimientos				
Usar y elaborar estrategias de cálculo mental con números naturales				
Comprender y aplicar el significado de las potencias y sus propiedades básicas				
Calcular potencias con números naturales y raíces cuadradas y cúbicas sencillas				
Entender la relación inversa entre los cuadrados y las raíces cuadradas y los cubos y las raíces cúbicas				
Escribir y resolver correctamente operaciones combinadas con números naturales				
Identificar en un problemas los datos conocidos y los datos que hay que hallar				
Realizar representaciones gráficas de los problemas que me ayuden a entender la estructura de la situación y la relación entre datos conocidos y desconocidos				
Determinar qué conceptos o procedimientos matemáticos necesito para resolver un problemas				
Comprobar e interpretar la solución de los problemas aritméticos				
Crear problemas en los que se usen números naturales y sus operaciones				
Explicar de forma ordenada y clara los pasos que sigo para resolver una actividad o problema matemático				
Expresar las dificultades que tengo a la hora de resolver un problema matemático, en caso de tenerlas				
Aprender de mis errores				
Motivarme para enfrentarme a los problemas matemáticos con ganas				
Razonar o argumentar las decisiones que tomo al resolver una actividad o un problema				
Trabajar en equipo para resolver problemas				

AUTOEVALUACIÓN

A1. Completa los huecos en cada apartado y calcula el resultado pedido en cada caso:

A) 53 + 17 + 109 = (53 + ____) + ____

Es la propiedad ______________________ de la suma.

Calcula mentalmente el resultado de la operación: ____________________________

B) 82 · 15 = 82 · (10 + 5) = 82 · 10 + ______ · ______

Se usa aquí la propiedad ____

Calcula mentalmente el valor de 82 · 15: ___________________

C) Dividendo = ____________________ · ____________________ + _____________

En una división exacta, el divisor vale 310 y el cociente 4200, ¿cuánto vale el dividendo? ___________

A2. Resuelve las operaciones combinadas, respetando la jerarquía de las operaciones:

A) $1 + 2 \cdot (3 + 4) - (7 + 3) : 5$

B) $8 \cdot (6 \cdot 2 - 4) - 3 \cdot (10 - 2 \cdot 3)$

C) $5^2 \cdot 3 - 2^3 \cdot 3^2 + 18 : 6 \cdot 1^5$

D) $(10-3)^2 + \sqrt{3^2+4^2} - \left(\sqrt{100} - \sqrt{36}\right)$

A3. En el siguiente problema, resuelve cada apartado utilizando la operación adecuada:

Juan tiene un terreno de 326 m^2 de superficie en el que quiere sembrar un huerto.

A) Si quiere repartir la superficie en 8 partes iguales.

¿Cuántos m^2 debe medir cada trozo?

¿Le sobra algo de superficie?

B) En el terreno que le sobra de la repartición anterior, ¿puede construir una caseta cuadrada de 3 m de lado para guardar los aperos?

Si la respuesta es negativa, aporta alguna sugerencia para la caseta.

C) En una de esas particiones pondrá tomates, para ello dividirá el terreno en 4 partes iguales y en cada una de ellas pondrá 4 plantas de tomate.

Suponiendo que recoge 4 tomates de cada planta, ¿cuántos tomates recogió?

D) En otra de las particiones quiere sembrar 85 lechugas formando un cuadrado.

¿Cuántas habrá en cada lado del cuadrado? ¿Sobra alguna?

¿Cuántas lechugas más tiene que comprar para formar un cuadrado?

A4. Lee el enunciado del problema y contesta a las preguntas:

Un carpintero dispone en su almacén de 35 tablas, 30 listones y 130 tornillos. Por las tablas ha pagado 210 €; y por los listones, 90 €; además, cada tornillo cuesta 50 céntimos de euro. Cada estantería se monta con 5 tablas, 4 listones y 20 tornillos.

A) ¿Cuánto le costó cada tabla? ¿Y cada listón?

B) ¿Cuánto ha pagado (en €) por los 130 tornillos?

C) ¿Cuántas estanterías puede construir?

D) Si quiere ganar 30 € por estantería, ¿a cuánto debe venderlas?

E) ¿Cuál será la ganancia total?

F) La tienda se cierra por vacaciones y no quiere que sobre material. ¿Cuánto más debe comprar de cada elemento para poder construir más estanterías? ¿Cuánto se gastará?

SOLUCIÓN A1:

A) 53 + 17 + 109 = (53 + 17) + 109

Es la propiedad asociativa de la suma.

Calcula mentalmente el resultado de la operación: 179 (70 + 109)

B) 82 · 15 = 82 · (10 + 5) = 82 · 10 + 82 · 5

Se usa aquí la propiedad distributiva

Calcula mentalmente el valor de 82 · 15: 1230 (820 + 410)

C) Dividendo = divisor · cociente + resto

En una división exacta, el divisor vale 310 y el cociente 4200, ¿cuánto vale el dividendo? 1302000 (310 · 4200).

SOLUCIÓN A2:

A) $1 + 2 \cdot \underline{(3 + 4)} - \underline{(7 + 3)} : 5$

$= 1 + \underline{2 \cdot 7} - \underline{10 : 5}$

$= 1 + 14 - 2$

$= 13$

B) $8 \cdot (\underline{6 \cdot 2} - 4) - 3 \cdot (10 - \underline{2 \cdot 3})$

$= 8 \cdot (\underline{12 - 4}) - 3 \cdot (\underline{10 - 6})$

$= \underline{8 \cdot 8} - \underline{3 \cdot 4}$

$= 64 - 12 = 52$

C) $\underline{5^2} \cdot 3 - \underline{2^3} \cdot \underline{3^2} + 18 : 6 \cdot \underline{1^5}$

$= \underline{25 \cdot 3} - \underline{8 \cdot 9} + \underline{18 : 6 \cdot 1}$

$= 75 - 72 + 3$

$= 6$

D) $(10 - 3)^2 + \sqrt{3^2 + 4^2} - \left(\sqrt{100} - \sqrt{36}\right)$

$= 7^2 + \sqrt{9 + 16} - (10 - 6)$

$= 49 + \sqrt{25} - 4$

$= 49 + 5 - 4 = 50$

SOLUCIÓN A3:

A) Cada trozo debe medir 40 m^2 y sobran 6 m^2 (hay que dividir 326 : 8).

B) No se puede, la caseta puede ser cuadrada de 2 m de lado, o rectangular de 3 m x 2 m. (hay que calcular 3^2 = 9 m^2 mediría la caseta y sólo tenía 6 m^2)

C) 64 tomates (la operación es: $4^3 = 64$).

D) Debe poner 9 lechugas en cada lado del cuadrado y sobran 4 lechugas.

Para formar otro cuadrado (de 10 lechugas de lado), tiene que comprar 15 lechugas (hay que calcular $\sqrt{85}$ = 9, resto 4 y para la última pregunta tener en cuenta que faltan 15 para llegar a $10^2 = 100$).

SOLUCIÓN A4

A) Cada tabla le ha costado 6 € y cada listón, 3 € (operaciones: 210:35 y 90:30)

B) Pagó 65 € por los tornillos (operación: 50·130 y se pasa de céntimos a €).

C) Puede fabricar 6 estanterías (se divide 35:5, 30:4 y 130:20 y nos quedamos con el menor resultado).

D) Debe vender cada estantería a 82 €

(operaciones: 5·6 = 30 € las tablas, 4·3 = 12 € los listones, 20:50 = 1000 céntimos = 10 € los tornillos, total 30 + 12 + 10 = 52 € le cuesta cada estantería y quiere ganar 30 €, luego debe venderlas a 52 + 30 = 82 €).

E) La ganancia total será de 127 € (operación: 6·82 – (210 + 90 + 65)).

F) Tiene que comprar 5 tablas, 2 listones y 30 tornillos, que le costarán 51 €

(para que no le sobre nada tiene que hacer 8 estanterías, y hay varias formas de llegar al resultado).

AUTOEVALUACIÓN

DIVISIBILIDAD

ÍNDICE

PROBLEMAS QUE VAMOS A RESOLVER

1.- Un profesor tiene 24 alumnos con los que quiere trabajar de forma colaborativa.

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

a) ¿De cuántas maneras diferentes puede dividir la clase si quiere que los grupos tengan el mismo número de alumnos sin que sobre ninguno?

b) Un alumno se ha cambiado de clase, así que ahora el profesor debe hacer la agrupación con 23 alumnos, ¿puede hacer la agrupación si se mantiene la condición de que los grupos sean iguales?

c) Si tiene 32 alumnos en una clase y 24 alumnos en otra, ¿puede formar grupos con el mismo número de alumnos en ambas clases?, ¿de cuántas formas? Si se quiere que sean lo más grande posible, ¿de qué tamaño serán?

2.- Escribe el número 8 y el número 25 como productos de números más pequeños y explica cómo se puede calcular fácilmente $8 \cdot 25$.

¿QUÉ SABES DE ...?

$15 = 3 \cdot 5 \quad \rightleftarrows \quad 15 : 5 = 3 \quad \rightleftarrows \quad 15 : 3 = 5$

VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \hline 1 & 5 \end{array} \qquad 16 = 3 \cdot 5 + 1$$

VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

$20 = 2 \cdot 10 \qquad 20 = 4 \cdot 5$ FACTORES

VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

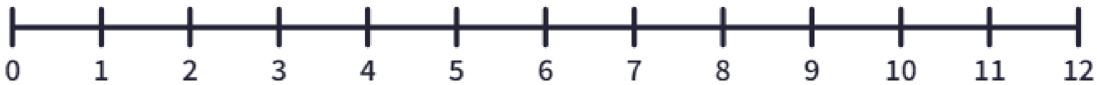
VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

1. EXPRESAMOS LOS NÚMEROS COMO PRODUCTO

RETOS

A) Dibujar todos los rectángulos que se pueden formar uniendo 12 cuadrados iguales, como el de la imagen.

B) ¿De cuántas formas se puede llegar de 0 a 12 dando saltos de la misma longitud de un número a otro?



C) ¿De cuántas maneras podemos obtener 12 sumando números iguales?

APRENDE Y APLICA

Todos los números naturales se pueden expresar como multiplicación de otros números, llamados factores. Esa expresión no siempre es única, se puede hacer de muchas maneras. Por ejemplo, hemos visto que $12 = 3 \cdot 4$ pero también $12 = 2 \cdot 6$ y podríamos escribir igualmente $12 = 12 \cdot 1$ o $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, que es igual que escribir $12 = 2^2 \cdot 3$ (recuerda que una potencia es una forma de resumir una multiplicación en la que el factor es siempre el mismo).

1. EXPRESAMOS LOS NÚMEROS COMO PRODUCTO

Descomponer un número en factores es lo contrario a multiplicar. Si multiplico 2 · 3 · 5 obtengo 30 y una de las factorizaciones de 30 es 2 · 3 · 5. Pero no es la única, pues 10 · 3 también es igual a 30, lo cual supone un problema a veces. Estaría bien tener una descomposición factorial especial de cada número, que sea sólo para ese número, para ninguno más (como el DNI lo es para nosotros). Para eso necesitaremos unos números especiales, que veremos más adelante, y que serán como los ladrillos en esta descomposición, los números primos.

Expresión de un número como producto como estrategia de cálculo mental. Cuando se multiplican números éstos se pueden descomponer en dos o más factores y reorganizar el producto utilizando las propiedades de la multiplicación (conmutativa y asociativa) para facilitar el cálculo mental. Ejemplos:

6 · 35=	15 · 24 =	8 · 15 =
6 · 7 · 5=	3 · 5 · 2 · 12 =	2 · 2 · 2 · 15 =
6 · 5 · 7=	3 · 12 · 5 · 2 =	2 · 2 · 30 =
30 · 7=	36 · 10 =	2 · 60 =
210	360	120

Expresión como producto para calcular raíces. En este caso se trata de escribir el número como producto de otros dos números, como 4, 9, 16, … que sean cuadrados de otro número (cuadrados perfectos) como en los ejemplos:

$\sqrt{900} =$	$\sqrt{2500} =$	$\sqrt{144} =$
$\sqrt{9 \cdot 100} =$	$\sqrt{25 \cdot 100} =$	$\sqrt{9 \cdot 16} =$
$\sqrt{9} \cdot \sqrt{100} =$	$\sqrt{25} \cdot \sqrt{100} =$	$\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} =$
$3 \cdot 10 =$	$5 \cdot 10 =$	$3 \cdot 4 =$
30	50	12

PRACTICA

1.1.-

Completa el cuadro siguiente sabiendo que los números de las casillas son producto de los números que hay en la cabecera de su fila y su columna. Explica cómo lo haces.

	42	30
	147	

1.2.– Explica cómo calcular mentalmente:

a) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ b) $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$ c) $2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

d) $24 \cdot 75$ e) $45 \cdot 18$ f) $75 \cdot 36$

g) $\sqrt{1600}$ h) $\sqrt{225}$ i) $\sqrt{4900}$

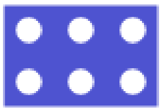
1.3.– Problema: Se dispone de un número ilimitado de palillos de 1 cm de longitud, de 2 cm, de 3 cm, hasta 18 centímetros. ¿De cuántas maneras se puede cubrir una línea de 12 cm de longitud con palillos iguales?, ¿qué ocurriría si la línea midiera 18 cm?, ¿cuántos palillos se requieren en cada caso?

1.4.– Sabiendo que $882 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$, ¿cuál es el menor número por el que hay que multiplicar 882 para obtener un número cuya raíz cuadrada sea exacta?

2. BUSCAMOS MÚLTIPLOS

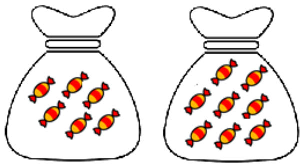
RETO

A) Julia ha construido un cuadrado usando rectángulos de papel de tamaño 30 cm por 20 cm y colocándolos en la misma posición.



¿Cuánto mide el lado del cuadrado? ¿Cuántas piezas rectangulares fueron necesarias para construir el cuadrado? ¿Puede formar cuadrados distintos? ¿Cuál es el más pequeño que puede formar?

B) Alicia y Benito se han repartido por igual los bombones que tenían y los han metido en bolsas. Alicia ha hecho bolsas con 6 bombones y Benito bolsas con 8 bombones.



¿Podemos saber qué cantidad de bombones tenía cada uno? ¿Cuál es la cantidad posible más pequeña? ¿Qué relación esa cantidad con el número de bombones de Alicia y de Benito?

APRENDE Y APLICA

Un múltiplo de un número natural es otro número que se obtiene multiplicando el primer número por cualquier otro que no sea 0. Por ejemplo, los múltiplos de 6 son 6, 12, 18, 24, 30, 36, etc., que se obtienen multiplicando el 6 por 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. De la misma manera se obtienen los de 8, que son 8, 16, 24, 32, 40, … También se obtienen sumando el número de forma reiterada pues la multiplicación es lo mismo que una suma de sumandos iguales. Por ejemplo $2 \cdot 3$ es dos veces 3, lo que significa que hay que sumar 3 y 3. Otro ejemplo:

$$7 \xrightarrow{+7} 14 \xrightarrow{+7} 21 \xrightarrow{+7} 28 \dots$$

Hay infinitos múltiplos de un número, puesto que el proceso no tiene fin, se puede seguir sumando el mismo número indefinidamente.

Escribe al menos 10 múltiplos de cada uno de los siguientes números: 2, 3, 5, 6, 10 y 11. ¿Qué tienen en común todos los ***múltiplos de 2***?, ¿y los ***múltiplos de 5***?, ¿y los ***múltiplos de 10***? Escribe múltiplos de 6 y de 8, encuentra cuatro múltiplos comunes de 6 y 8. ¿Cuál es el que encuentras más rápidamente?, ¿qué relación ves entre ellos?, ¿cuál es el más pequeño posible?

A veces interesa considerar ***múltiplos comunes*** a dos o más números. Uno de ellos es el producto de los dos números, y podemos obtener más multiplicando cualquier múltiplo común. Es de especial interés el más pequeño de esos múltiplos comunes, que recibe el nombre de ***mínimo común múltiplo***, y se escribe de forma abreviada m.c.m. En el ejemplo de los bombones se ve que 24 es el menor múltiplo común de 6 y 8, por lo que escribimos:

m.c.m. (6,8) = 24

Comprobar si un número a es múltiplo de otro número b: se divide a entre b y se comprueba que el resto de la división es 0, pues de esa manera *a* será igual a *b* multiplicado por otro número, el cociente de la división. En ese caso se dice que ***a es divisible entre b***. Por ejemplo, 15 es un múltiplo de 3 porque 15 = 3 · 5, lo que significa que 15 : 3 = 5, y la división es exacta, o lo que es lo mismo, que 15 es divisible entre 3. Si queremos saber si 100 es múltiplo de 35 tendríamos que averiguar si hay un número que multiplicado por 35 es igual a 100, número que se obtiene con la división 100 : 35. Como esta división no es exacta, 100 no es múltiplo de 35.

Cálculo del mínimo común múltiplo hallando de forma ordenada los múltiplos de todos los números y seleccionando el primero de ellos que sea común. Por ejemplo, para calcular el mínimo común múltiplo de 4, 6, y 8 se calculan múltiplos de los tres números:

Los múltiplos de 4 son: 4, 8, 12, 16, 20, **24**, 28, 32, 36, ...

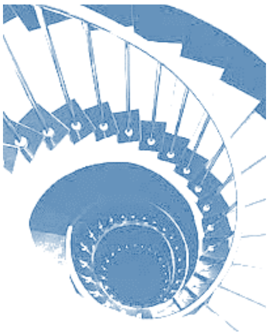
Los múltiplos de 6 son: 6, 12, 18, **24**, 30, 36, ...

Los múltiplos de 8 son: 8, 16, **24**, 32, 40, ...

Por lo que 24 es el mínimo común múltiplo y se escribe m.c.m. (4,6,8) = 24.

También se podría empezar por los múltiplos del mayor, en este caso el 8, e ir comprobando si son también múltiplos de los otros números. El 8 no lo es, aunque sea de 4 no lo es de 6, el 16 tampoco pero sí el 24, con lo que este número es el m.c.m.

PRACTICA



2.1.- *La escalera del castillo*

Para subir al viejo castillo, hay que subir una escalera larga, larga....

Tres amigos quieren llegar al castillo.

Pedro sube los escalones, despacio y de 1 en 1. María de 2 en 2.

Pablo, veloz, salta los escalones de 3 en 3.

Pedro empieza a subir en el escalón 1, María en el segundo escalón y Pablo en el tercero. ¿Cuáles son los escalones que sólo pisan dos personas?

2.2.- *La escalera de la casa de Pilar*

Anabel va a visitar a su amiga Pilar.

Al llegar a su casa sube las escaleras saltando los escalones de uno en uno o de dos en dos, según le da. Pilar baja a su encuentro, bajando los escalones de tres en tres.

Las dos amigas se encuentran en el octavo escalón contando desde abajo, después de haber hecho cada una el mismo número de saltos.

Para que se cumplan todas estas condiciones, ¿cuántos escalones puede tener la escalera de entrada a la casa de Pilar?

2.3.- *Números consecutivos*

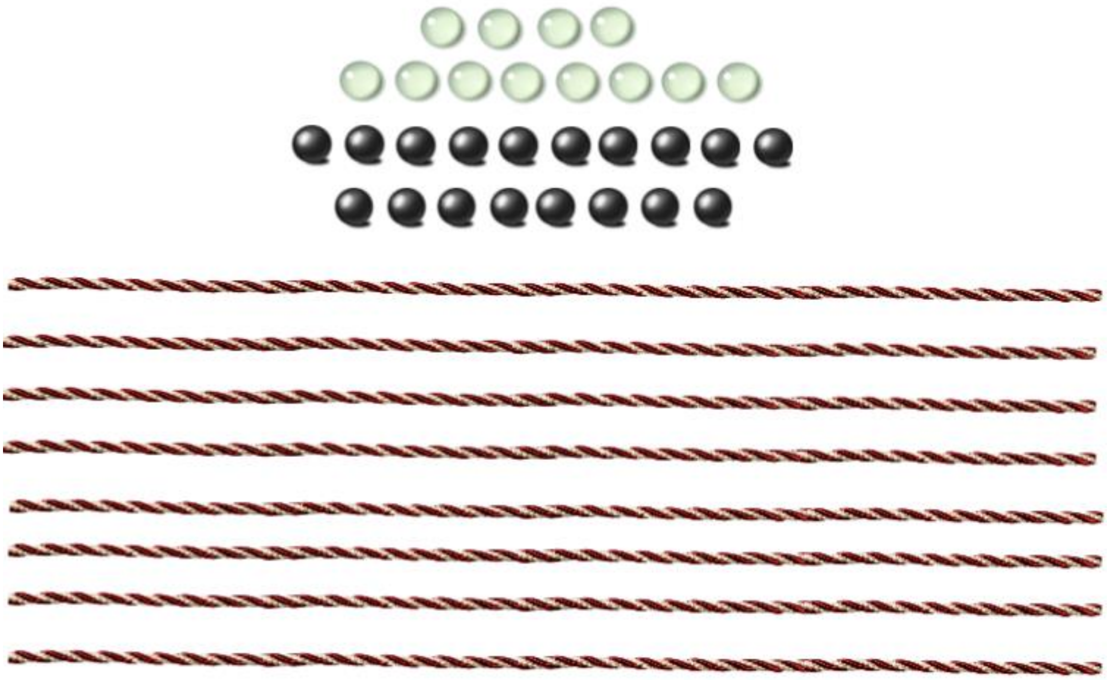
Encontrar tres números consecutivos tales que el primero es múltiplo de 2, el segundo es múltiplo de 3 y el tercero es múltiplo de 4, ¿puedes encontrar más?, ¿qué observas?

3. BUSCAMOS DIVISORES

RETO

A) Para decorar una fiesta tenemos almacenado en bolsas un total de 414 globos. Cada bolsa contiene el mismo número de globos. ¿Puede haber 4 bolsas?, ¿y 10?,¿y 3?

B) Tengo 12 cuentas blancas y 18 cuentas negras para hacer pulseras iguales sin importar el orden de las cuentas y sin que sobre ninguna. ¿Cuántas pulseras puedo formar?, ¿cuántas cuentas de cada color hay en una de esas pulseras?



APRENDE Y APLICA

Un ***divisor*** de un número natural *a* es otro número *b*, menor o igual que *a*, que lo divide de forma exacta (la división tiene resto 0). Se dice también que ***a es divisible por b.*** Por ejemplo, 6 es un divisor de 60 y se dice que 60 es divisible entre 6. El número 3 es un divisor de 21 y 21 es divisible por 3. Los divisores se utilizan para repartir o agrupar en cantidades iguales como los de los grupos del profesor del inicio, las bolsas de globos o las cuentas de las pulseras.

Un divisor es un factor del número pues si la división es exacta el dividendo es igual al divisor por el cociente. Por ejemplo, 7 es un divisor de 28 porque 28 : 7 = 4, así que 28 = 7 · 4, y tanto el 7 como el 4 son factores de 28. Por tanto, los divisores de un número se pueden colocar por parejas. Por ejemplo, como se puede dividir 60 entre 10 de forma exacta entonces 10 es un divisor, pero también lo es 6 que sería el cociente de esa división. Observa que cuando se escribe un número como producto, cada factor es un divisor.

Un divisor es un número más pequeño o igual que el número (se tiene que poder dividir de forma exacta) por lo que ***hay un número limitado de divisores***. Siempre hay al menos dos divisores, el 1 y el propio número, excepto para el número 1, que sólo tiene un divisor.

A veces nos interesa buscar ***divisores comunes*** a dos o más números, como en el reto de las pulseras. Siempre hay un divisor común, el 1, porque el 1 es divisor de todos los números, pero puede haber otros más grandes. El mayor de todos se llama ***máximo común divisor.*** Por ejemplo, el máximo común divisor de 12 y 18 es 6, pues los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12, mientras que los de 18 son 1, 2, 3, 6, 9 y 18, así que tienen 1, 2, 3 y 6 en común, por lo que 6 es el máximo común divisor y se escribe

m.c.d. (12, 18) = 6.

En el ejemplo de las pulseras ese número representa el número más grande de pulseras que se pueden hacer. Las pulseras tendrían 12 : 6 = 2 cuentas blancas y 18 : 6 = 3 cuentas negras.

Búsqueda de divisores por parejas. Para buscar divisores se divide el número entre 1, 2, 3, … y como por cada divisor aparece otro, se tiene una pareja. Se termina el proceso cuando se alcanza uno de los divisores que han aparecido como pareja. Por ejemplo, para buscar divisores de 42, se ha dividido entre 1, 2, 3, 4, 5 y 6 y se para porque aparece el 7 que sería el siguiente divisor.

42 = 1 · 42

= 2 · 21

= 3 · 14

= 6 · 7

Por lo tanto, los factores de 42 son 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 y 42. En el caso del 20:

20 =

1 · 20 =

2 · 10 =

4 · 5

Por lo tanto, los divisores de 20 son 1, 2, 4, 5, 10 y 20.

En la búsqueda de divisores ayuda saber cómo son los múltiplos de algunos números como 2, 5 o 10. Así, ***2 será un divisor*** si el número acaba en cifra par, ***5 será un divisor s***i el número acaba en 0 o en 5 y ***10 será un divisor*** si el número acaba en 0.

El problema de ***encontrar todos los divisores***. Cuando los números son muy grandes este procedimiento no es sencillo, pues hay que hacer demasiadas divisiones. Buscaremos más adelante otro método cuando podamos descomponer un número de forma única.

Cálculo del máximo común divisor. Para calcular el máximo común divisor de varios números se pueden buscar todos los divisores, señalar los comunes y escoger el mayor de todos, como se ha hecho con 12 y 18 al explicar el concepto de máximo común divisor. Otra forma de encontrar el máximo común divisor es buscar un divisor común, dividir todos los números por ese divisor, buscar otro divisor común de los cocientes y así sucesivamente. De esta manera se van encontrando divisores comunes a todos ellos. El producto de los divisores comunes encontrados será el máximo común divisor. Por ejemplo, para calcular el máximo común divisor de 40, 60 y 100:

	40	60	100	: 10 =
40 : 10 = 4 60 : 10 = 6 100 : 10 = 10	4	6	10	: 2 =
4 : 2 = 2 6 : 2 = 3 10 : 2 = 5	2	3	5	No tienen otro divisor común

mcd (40, 60, 100) = 10 · 2

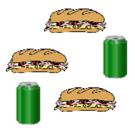
Se ha dividido primero entre 10, el cociente entre 2 y como ya no tienen más divisores comunes, el máximo común divisor es 10 · 2 = 20.

Cualquier divisor común de dos números es divisor del máximo común divisor de dichos números, por lo que éste sirve para encontrar todos los divisores comunes. Por ejemplo, los divisores de 20, que son 1, 2, 4, 5, 10 y 20, son todos los divisores comunes de 40, 60 y 100. ¿Sabrías explicar por qué esto es así?

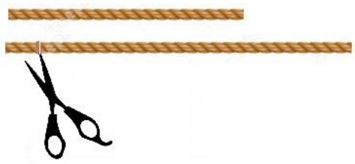
PRACTICA

3.1.– *Problemas:*

a) Tengo 50 latas de refresco y 30 bocadillos. Si quiero hacer paquetes iguales con latas y bocadillos, sin que sobre o falte ninguno ¿De cuantas formas distintas se pueden hacer los paquetes (cuántos refrescos y bocadillos hay en cada paquete y cuántos paquetes hay)?



b) Queremos dividir dos cuerdas de longitudes 180 cm y 168 cm en partes iguales de manera que no sobre nada. ¿Cuánto debe medir cada uno de los trozos? Y si queremos que sean lo más grandes posible, ¿cuánto debe medir cada trozo?



c) ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras hay en el segmento de extremos (0,0) y (21,14)?

3.2.– ***Investigación*** ¿La cantidad de divisores de un número depende de su tamaño? ¿Qué números tienen exactamente 2 divisores? ¿Cuáles son esos divisores? ¿Y 3 divisores?

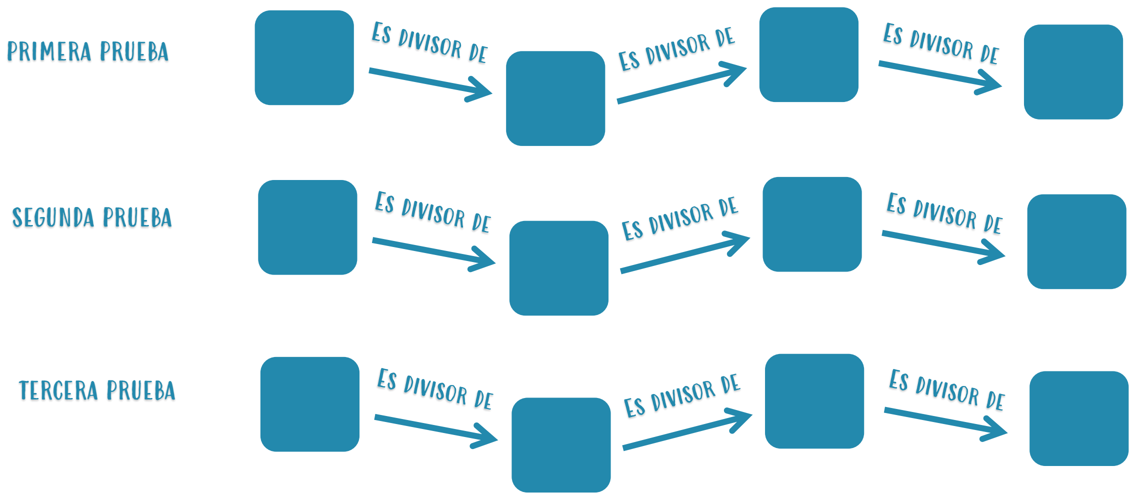
Completa una tabla con los divisores y el número de divisores de los 30 primeros números y extrae conclusiones. A modo de ejemplo, se muestran los divisores de los 4 primeros números naturales.

Número	Divisores	Número de divisores
1	1	1
2	1, 2	2
3	1,3	2
4	1,2,4	3
5	…	…

4. LA RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD

RETO

A) Completa las celdas de la imagen con números <u>diferentes</u> elegidos entre 2 y 100, ambos incluidos.



OTRAS PRUEBAS □ - □ - □ - □

¿Cuál es el mayor número que puede ir en la primera celda?

¿Cuál es el menor número que puede ir en la tercera?

¿Cuántas soluciones tienen un 8 en la primera celda?

B) Juego *Retirando múltiplos y divisores*:

Es un juego de competición entre dos jugadores en el que cada jugador retira por turno un número sacándolo de la escena. El número que se retira debe ser múltiplo o divisor del retirado anteriormente y que se ve en el recuadro central (el primero es siempre 2). Pierde el jugador que retire un número indebido o el que ya no pueda retirar más números (los números retirados no se reponen). Escribe algunas jugadas.

C) Completa la siguiente tabla y encuentra relaciones entre las columnas.

a	b	m.c.d. (a,b)	m.c.m. (a,b)
4	6		
7	8		
16	20		
13	130		
11	11		
1	56		

APRENDE Y APLICA

Si un número *a* es múltiplo de *b* entonces *b* es un divisor o factor de *a*. Esa relación entre ambos números es una ***relación de divisibilidad.***

60 entre 20 es igual a 3

60 es divisible entre 20

60 es multiplo de 20

20 es divisor de 60

20 es un factor de 60

En una ***descomposición en factores*** de un número ***cualquier factor o combinación de ellos es un divisor*** y ***cualquier producto que contenga todos los factores es un múltiplo***. Por ejemplo, el número 2 · 3 · 7 tiene como divisores 2, 3, 7, 6 y 21, además del 1 y el mismo número (42) y un múltiplo puede ser 2 · 3 · 7 · 10, o bien 2· 2 · 3 · 7 (recuerda que los factores se pueden escribir en cualquier orden pues la multiplicación es conmutativa)

Encontrar a la vez el m.c.d. y el m.c.m. de varios números. Para encontrar el m.c.d. se buscan divisores comunes a los dos, dividiendo hasta que ya no se pueden encontrar más divisores comunes. El producto de esos factores comunes es el m.c.d. Para calcular el m.c.m., se multiplica ese m.c.d. por el resto de los factores que han aparecido al dividir todos ellos. Observa que así se consigue un múltiplo de ambos números y es el más pequeño pues no podemos eliminar ninguno de sus factores. Por ejemplo, los números 60 y 200 se dividen a la vez por 10 y 2, el m.c.d. es 20, pero si además se multiplica 20 por los factores que quedan (que ya no tienen divisores comunes), el 3 y el 10, se obtiene el m.c.m.

	60	200	: 10 =
60 = 10 · 6 200 = 10 · 20	6	20	: 2 =
60 = $\boxed{10 \cdot 2} \cdot \boxed{3}$ 200 = $\boxed{10 \cdot 2} \cdot \boxed{10}$	3	10	No tienen otro divisor común

mcd (60, 200) = 10 · 2 = 20

mcm (60,200)= 10 · 2 · 3 · 10

Observa que si se multiplica el máximo común divisor por el mínimo común múltiplo el resultado es el mismo que si se multiplican los números.

PRACTICA

4.1.– Completa el espacio con la expresión adecuada:

Es un múltiplo de, es un divisor de, es un múltiplo y un divisor de o *no tiene relación de divisibilidad con*.

4	____________________	36	36	____________________	4
45	____________________	7	7	____________________	45
20	____________________	5	5	____________________	20
6	____________________	6	1	____________________	12
12	____________________	1	24	____________________	30
30	____________________	24	11	____________________	33
33	____________________	11	8	____________________	8
9	____________________	90	90	____________________	9

4.2.– Observa la siguiente lista de números: 5 – 10 – 1 – 30 – 3 – 15 – 20 – 75 – 6

a) ¿Cuáles de ellos son múltiplos de 15?

b) ¿Cuáles de ellos son divisores de 15?

c) ¿Cuáles de ellos son factores de 15?

d) ¿Cuáles no tienen relación de divisibilidad con 15?

4.3.– a) ¿Es el número $3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ divisible entre 7? ¿Y entre 5? ¿Y entre 2?

b) ¿Es el número $33 \cdot 53 \cdot 7$ un múltiplo del anterior?

c) Busca múltiplos y divisores del número $2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$

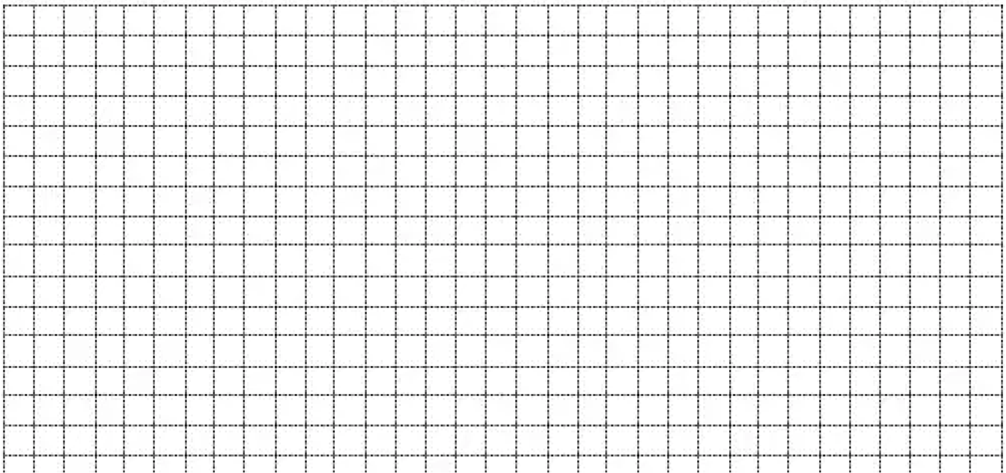
4.4.– Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los siguientes números. Puedes utilizar la calculadora:

a) 2250 y 2520 b) 1350 y 252

5. USANDO LOS NÚMEROS PRIMOS

RETO

A) Dibuja todos los posibles rectángulos que ocupan 23 cuadrados.



Agrupa 23 puntos en grupos iguales de todas las formas posibles.

B) En la página 21 tienes todos los divisores de los 30 primeros números.

Señala los números que tienen exactamente dos divisores, ¿qué tienen de común esos divisores? ¿Está entre esos números con dos divisores el número 23?

C) Con las piezas/tarjetas en las que están representado a los números 2,3,5,7,11,13, selecciona aquellas que multiplicadas dan 24, 26, 35, 99 y 100. Puedes seleccionar varias piezas iguales.

¿Puedes encontrar combinaciones diferentes para el mismo número?

24 26 35 99 100

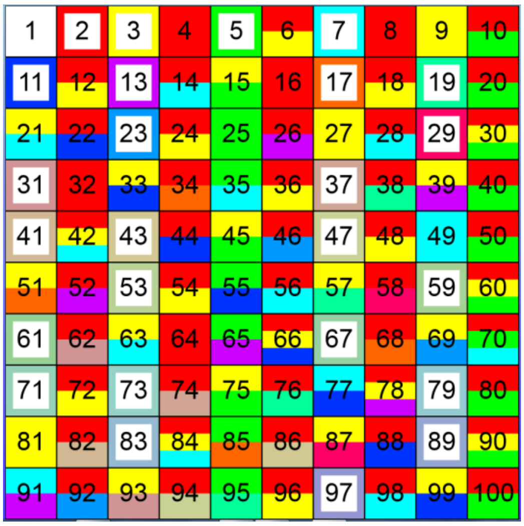
APRENDE Y APLICA

Los ***números primos*** son los que tienen exactamente dos divisores, el 1 y el mismo número. Los que tienen más de dos divisores se llaman ***números compuestos***. El 1 no es primo ni compuesto, sólo tiene un divisor.

Los números compuestos se pueden escribir de manera única como producto de números primos. Así, los números primos funcionan como los bloques básicos (ladrillos) de todos los números.

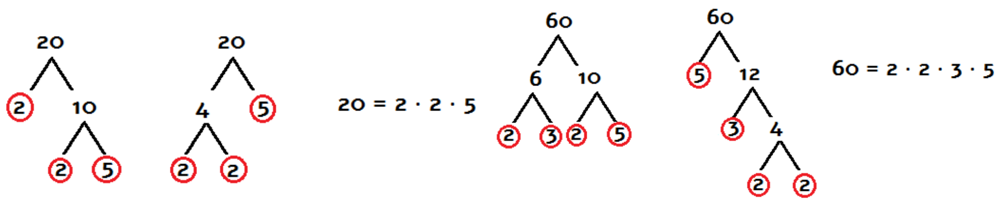
Hay infinitos números primos. Buscar números primos muy grandes es importante para cuestiones de seguridad informática pues el método que se utiliza para encriptar en la red se basa en la dificultad de encontrar la expresión como producto de primos si estos son muy grandes. Si p y q son números primos muy grandes, con un ordenador podemos calcular fácilmente su producto n = p · q. Pero ni el ordenador más potente es capaz de darle la vuelta a este proceso: conocido solo ese número n, encontrar sus factores.

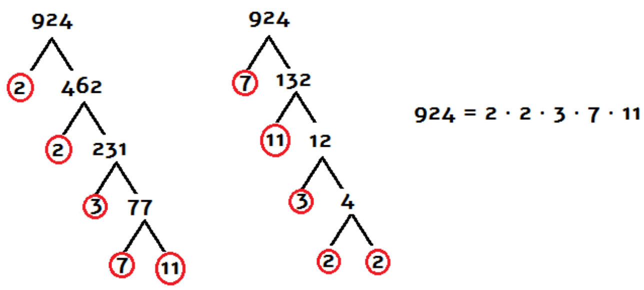
Criba de Eratóstenes para encontrar los números primos. Para encontrar los números primos el matemático griego Eratóstenes (siglo II a. C.) ideó un curioso método, que consistía en marcar un número, empezando por el 2 y tachar todos sus múltiplos, seleccionar el siguiente número no tachado, marcarlo y tachar todos sus múltiplos, y así sucesivamente hasta que no quedasen más números (se supone que buscaba los números primos hasta un número concreto). En la web https://www.visnos.com/demos/sieve-of-eratosthenes se simula el proceso con números del 1 hasta el 900.



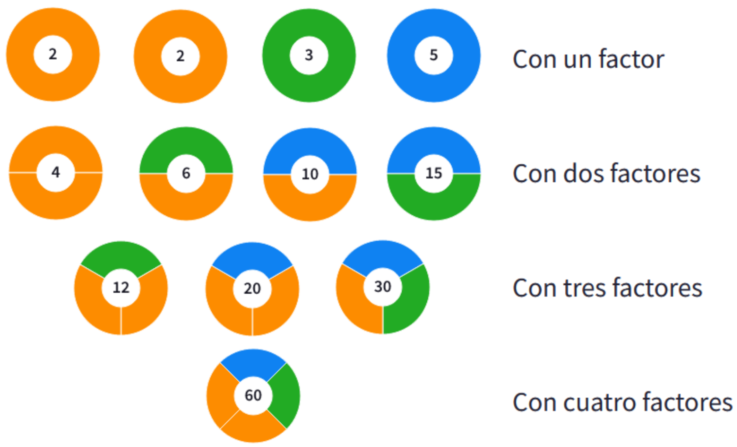
Expresión en producto de primos utilizando diagrama de árbol: El método se basa en escribir el número como producto de otros dos, que forman dos ramas del árbol, si alguno es primo se rodea con un círculo, si no lo es se sigue descomponiendo en producto de dos, hasta llegar a que todos sean números primos. Los primos marcados son los factores buscados. Como se ve en los siguientes ejemplos se pueden hacer distintos árboles, pero el resultado final es siempre el mismo:

5. USANDO LOS NÚMEROS PRIMOS





Cálculo de divisores: Para encontrar todos los divisores de un número se puede utilizar la descomposición factorial en factores primos. Los divisores se obtienen multiplicando los factores de todas las formas posibles. Así que se puede empezar tomando un factor, luego combinando 2, luego tres y así sucesivamente. Por ejemplo, los divisores de 60 = 2 · 2 · 3 · 5 son 2, 2, 3, 5, 4, 6, 10, 15, 12, 20, 30, 60:



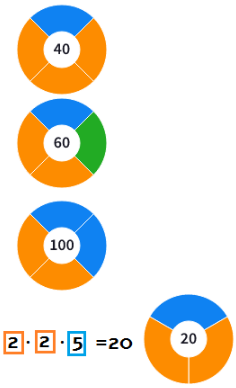
Cálculo del máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más números utilizando la factorización: como el m.c.d. es el mayor de los divisores comunes de ambos, y los divisores se encuentran multiplicando los factores primos, para encontrar el m.c.d. se escribe la expresión como producto de primos de cada número y se seleccionan aquellos que son comunes a todos los números, su producto es el m.c.d. Por ejemplo:

$40 = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 2 \cdot \boxed{5}$

$60 = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 3 \cdot \boxed{5}$

$100 = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 5 \cdot \boxed{5}$

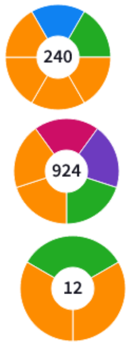
m.c.d $(40, 60, 100) = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{5} = 20$



$240 = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \boxed{3} \cdot 5$

$924 = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{3} \cdot 7 \cdot 11$

m.c.d $(240, 924) = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{3} = 12$



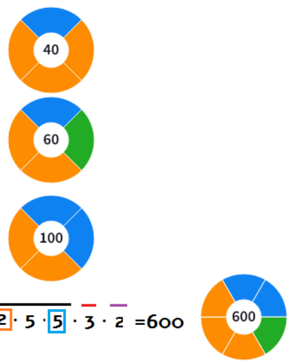
Cálculo del mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números utilizando la factorización: el mínimo común múltiplo de dos o más números tiene que ser un múltiplo de cada uno de ellos, por lo que debe contener todos los factores primos de la expresión como producto. Podríamos multiplicar los dos números y obtendríamos un múltiplo de cada uno de ellos, pero no sería forzosamente el más pequeño. Para que sea el menor posible no se deben repetir los factores que sean comunes. Se puede empezar escribiendo la factorización del más grande y añadiendo los factores que faltan para que sea múltiplo de los otros números. Por ejemplo:

$40 = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \underline{2} \cdot \boxed{5}$

$60 = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \underline{3} \cdot \boxed{5}$

$100 = \underline{\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 5 \cdot \boxed{5}}$

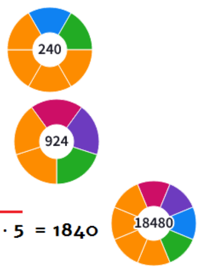
m.c.m $(40, 60, 100) = \overline{\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 5 \cdot \boxed{5}} \cdot \overline{3} \cdot \overline{2} = 600$



$240 = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \underline{2 \cdot 2} \cdot \boxed{3} \cdot \underline{5}$

$924 = \underline{\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{3} \cdot 7 \cdot 11}$

m.c.m $(240, 924) = \overline{\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{3} \cdot 7 \cdot 11} \cdot \overline{2 \cdot 2 \cdot 5} = 1840$



PRACTICA

5.1.– ***Actividad sobre Sophie Germain y las mujeres matemáticas:***

- Visualizar el vídeo https://www.youtube.com/watch?v=SbE8H45sCrE
- Buscar números primos de Germain (tienen que ser n y 2n+1 primos)
- Leer el artículo sobre mujeres matemáticas de ayer y hoy y señalar cuáles son las mujeres que aparecen, de qué época son y qué han aportado a la matemática
  https://elpais.com/elpais/2017/03/08/el_aleph/1488970880_865812.html

5.2.- *Juego de las afirmaciones:* Se necesita un conjunto de cartas como las siguientes.

Se barajan las cartas y se colocan boca abajo en la mesa. Se da vuelta a dos cartas para que todos los jugadores las vean (2- 4 jugadores). El objetivo del juego es encontrar un número que satisfaga las afirmaciones que aparecen en ambas cartas.

Se da un tiempo de 10 segundos, cada jugador dice un número que cumple las dos condiciones y la siguiente ronda empieza dando la vuelta a otras dos cartas. Por cada número encontrado se gana un punto. Por ejemplo:

CARTA 9 y CARTA 10 algunas soluciones: 6, 10, 28 (3 puntos)

Algunas veces, podría ser imposible encontrar un número que cumpla las dos afirmaciones, entonces son ***Pareja imposible***. Cuando esto ocurra, se puede reemplazar una de las cartas por otra. Por ejemplo:

CARTA 7 y CARTA 8 algunas soluciones: PAREJA IMPOSIBLE

1 UN PRODUCTO DE DOS PRIMOS	2 UN FACTOR DE 24
3 UN NÚMERO PRIMO	4 UN CUADRADO PERFECTO
5 UN MÚLTIPLO DE 7	6 UN NÚMERO IMPAR
7 UN DIVISOR DE 60	8 UN NÚMERO CUYA SUMA DE CIFRAS ES 9
9 UN NÚMERO PAR QUE NO ES MÚLTIPLO DE 4	10 UN NÚMERO TRIANGULAR
11 DOS MENOS QUE UN MÚLTIPLO DE 10	12 UNO MENOS QUE UN MÚLTIPLO DE 5
13 UN MÚLTIPLO DE 3 QUE NO ES MÚLTIPLO DE 9	14 UNO MENOS QUE UN CUADRADO PERFECTO
15 UN MÚLTIPLO DE 6	16 UN FACTOR DE 15
17 UN NÚMERO QUE ACABE EN 0	18 UN MÚLTIPLO DE 20

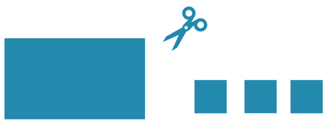
- Escribe parejas y soluciones. ¿Qué puntuación has obtenido?
- ¿Cuántas parejas de cartas imposibles puedes encontrar?
- ¿Puedes encontrar un número que cumpla 3 cartas? ¿Y un número que cumpla 4 cartas?

5.3.- *Problemas*

En los siguientes problemas marca los datos conocidos y los desconocidos. Relaciona todos ellos utilizando los conceptos que han surgido a lo largo del tema. Después, calcula los datos que se piden por el método más rápido teniendo en cuenta el tamaño de los datos. No olvides responder todas las cuestiones del problema.

a) *Un grupo de soldados puede formar en filas de 6, de 9 y de 10 sin que sobre ni falte ninguno. Sabemos que el número de soldados es un número comprendido entre 150 y 200. ¿Cuántos soldados son?*

b) *Una tabla rectangular de madera mide 45 cm de ancho por 63 cm de largo. Se quiere cortar en cuadrados todos iguales. Calcula el máximo lado que puede tener cada cuadrado. ¿Cuántos cuadrados se obtienen?*



c) *Sara tiene dos trozos de tela. Uno mide 36 cm de largo y el otro 45 cm de largo. Quiere cortar los dos trozos en tiras de la misma longitud, pero lo más grande posible. ¿De qué longitud tiene que cortar las tiras?*

d) *En el gimnasio Patricia va a nadar cada 6 días, Luis corre en la cinta cada 4 días y Marta monta en bici cada 16 días. ¿Si hoy han estado los tres entrenando, dentro de cuántos días volverán a entrenar a la vez?*



5.3.- *Inventa un problema*

Ahora te toca a ti inventar un problema en el que se usen múltiplos y/o divisores. Escribe el enunciado, pásaselo a un compañero para que lo resuelva y modifica si es necesario el enunciado para que se entienda mejor. Después resuélvelo.

TRABAJA EN GRUPO

DOS FAMILIAS

- Forma un equipo de 3 o 4 personas.
- El profesor/a os repartirá 10 cartas. Cada miembro del equipo se responsabiliza de sus cartas, no puede intercambiarlas, pero sí explicar o leer la información que contiene.
- El objetivo del juego se encuentra en el propio juego.
- Se puede usar la calculadora.
- Hay que explicar los pasos seguidos en el grupo para resolver la actividad.

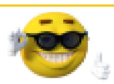
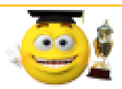
DE UN VISTAZO

DIBUJA LAS IDEAS PRINCIPALES DEL TEMA:

- ✓ Los números naturales se pueden escribir como producto.
- ✓ Dos números naturales se pueden relacionar a través de la divisibilidad. En la relación uno es el múltiplo y otro el divisor.
- ✓ Los divisores son aquellos que dividen al número de forma exacta y son un número finito. Los divisores son también factores en la expresión como producto.
- ✓ El máximo común divisor es el mayor de los divisores comunes de varios números.
- ✓ Hay infinitos múltiplos que se consiguen multiplicando el número por 1, 2, 3, ...
- ✓ El mínimo común múltiplo es el menor de los múltiplos comunes de varios números.
- ✓ Los números primos son los que sólo tienen dos divisores.
- ✓ Los números primos son como ladrillos: todo número se puede escribir de forma única como producto de números primos.
- ✓ La descomposición factorial es útil para encontrar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

EVALÚA Y AFIANZA

Llegados al final del tema reflexiona sobre lo que has aprendido. Marca en la siguiente tabla lo que corresponde a cada frase, haz la autoevaluación y revisa de nuevo la tabla.

¿CÓMO LO HAGO?	 Me cuesta hacerlo	 Estoy aprendiendo	 Lo hago bien	 Soy un experto
Escribir números como producto de otros n^os^				
Usar la expresión de producto en cálculo mental				
Reconocer múltiplos de un número				
Reconocer divisores de un número				
Relacionar múltiplos y divisores				
Hallar múltiplos de un número				
Calcular el mínimo común múltiplo de varios n^os^				
Hallar divisores de un número				
Calcular el máximo común divisor de varios n^os^				
Distinguir números primos y compuestos				
Escribir números como producto de primos				
Utilizar la descomposición en factores primos para calcular m.c.m., m.c.d. y divisores				
Identificar en un problema los datos conocidos y los datos que hay que hallar				
Reconocer las relaciones de divisibilidad en los datos de un problema				
Distinguir en el problema qué herramienta matemática se necesita				
Utilizar procedimientos adecuados a los datos del problema				
Inventar problemas en los que se usen múltiplos y divisores				
Explicar la solución de los ejercicios y problemas				
Comprobar la solución del problema				
Trabajar en grupo para resolver problemas				
Aprender de mis errores				
Enfrentar un reto o tarea con ganas y motivación				
Esforzarme para hacer bien las tareas				

AUTOEVALUACIÓN

A1. Lee el siguiente problema y une las preguntas con las respuestas:

"Para meter en cajas 125 latas de salsa de tomate y 175 latas de pimientos de manera que todas las cajas tengan el mismo número de latas y no se mezclen latas de tomate con latas de pimiento, ¿cuál es el número mínimo de cajas necesarias y cuántas latas habrá en cada caja?"

PREGUNTAS

1. ¿Qué datos se conocen?
2. ¿Qué datos hay que calcular?
3. ¿Qué relaciones hay entre los datos?
4. ¿Qué herramienta hay que utilizar?, ¿Por qué?

RESPUESTAS

A. El número de cajas es un divisor del número de latas de salsa de tomate y del número de latas de pimientos.

B. Como se busca un divisor común a dos números, pero además hay que hacer el menor número de cajas, por lo que hay que meter el mayor número de latas en cada caja, lo que se necesita es el máximo común divisor.

C. Número de cajas con latas de salsa de tomate, T, número de cajas con latas de pimientos, P, número de latas de salsa de tomate y de latas de pimientos en cada caja (es el mismo según el enunciado), L.

D. Como se dice que tiene que haber el mayor número de cajas, tiene que ser el máximo común divisor.

E. Número de latas de salsa de tomate, 125, y número de latas de pimientos, 175.

F. El número de latas que hay en las cajas debe ser un divisor del número de latas totales, tanto de salsa de tomate como de pimientos, porque hay que hacer grupos iguales con las latas para meterlas en las cajas. El número de cajas será el cociente entre el número de latas totales y el número de latas en cada caja.

A2. Ahora calcula la solución del problema.

A3. Lee el siguiente problema y contesta a las preguntas:

"Mis amigos Ana y Benito coleccionan monedas antiguas que guardan en un álbum. Ana ha guardado sus monedas colocando 12 en cada página de su álbum y le han sobrado 7. Benito, sin embargo, ha colocado 14 en cada página y le sobran 3. Entre los dos tienen menos de 100 monedas"

PREGUNTAS

A. ¿Crees que el número de monedas de Ana es un divisor de 12? ¿O es un múltiplo de 12?

B. ¿Puede ser 59 el número de monedas de Benito? Explica tu respuesta.

C. ¿Es posible que tengan los dos el mismo número de monedas? Y en ese caso, ¿cuántas serían? Explica qué procedimiento has usado.

A4. Estoy pensando en un número cuya descomposición factorial solo contiene como factores primos los números 2, 3 y 7

PREGUNTAS

1. ¿Cuál es el más pequeño posible?
2. ¿Podría ser divisible entre 4? ¿Y entre 5? ¿Y entre 6? Explica tu respuesta.
3. Si te digo que es mayor que 300 pero menor que 400, ¿sabrías en cuál estoy pensando?

AUTOEVALUACIÓN

SOLUCIÓN A1:

1 - E 2- C 3 - F 4- B

SOLUCIÓN A2:

Hay 25 latas en cada caja, 5 cajas de latas de salsa de tomate y 6 cajas de latas de pimientos

SOLUCIÓN A3:

A) El número de monedas de Ana no es divisor ni múltiplo de 12. Es mayor que 12 así que no puede ser divisor. Y no es múltiplo porque al dividir en grupos de 12, el resto no es cero.

B) Si puede ser porque 59 – 3 = 56. Y 56 ÷ 14 = 4. Así que Benito puede colocar sus monedas en 4 páginas y le sobrarían 3 monedas.

C) Ana puede tener 12 · 1 + 7 = 19; 12 ·2 + 7 = 31; 12 · 3 + 7 = 43; 52, etc. Benito: 14·1 + 3 = 17, 14 · 2 + 3 = 31, 31 +1 4 = 45, etc. Por tanto, sí pueden tener el mismo número y sería 31. Con números mayores sumarían más de 100.

SOLUCIÓN A4

A) El más pequeño es 2 · 3 · 7 = 42

B) Sí puede ser divisible entre 4. Solo necesito multiplicar el anterior por 2, ya que 84 es divisible por 4 y 84 = 2 ·2 · 3 · 7. Sin embargo, no puede ser divisible entre 5 porque ya tendría otro factor primo distinto. Por 6 sí puede serlo.

C) Solo se puede multiplicar a 42 por potencias de 2, de 3, de 7 o productos de ellos. Las posibles respuestas son 42 · 8 = 336 y 42 · 9 = 378.

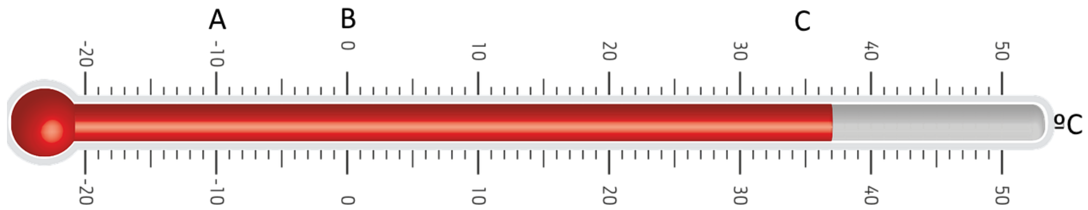
NÚMEROS ENTEROS

ÍNDICE

PROBLEMAS QUE VAMOS A RESOLVER

1.- Cuando nos informamos del tiempo que va a haber en un lugar, la temperatura está representada por números positivos, negativos (cuando es "bajo cero") o por 0.

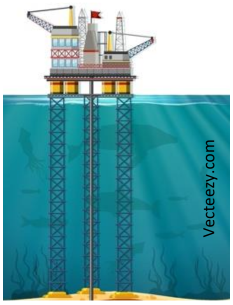
¿Qué temperatura marcan los puntos A, B y C? ¿Cuál es la más alta? ¿Cuál es la más baja?



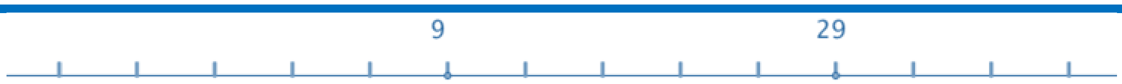
El 15 de marzo a las 14:00 la temperatura en Helsinki es de 2º C. A las 6 de la mañana del día siguiente la temperatura ha bajado 7º C. ¿Qué temperatura hace en Helsinki a las 6 de la mañana del 16 de marzo?

2.- La plataforma petrolífera Petronius está situada en el Golfo de México.

La base de la plataforma está a 565 metros bajo el nivel del mar. La parte de la plataforma visible sobre el agua tiene una altura de 75 metros. ¿Cómo puedes representar numéricamente la profundidad a la que se encuentra la base de la plataforma? ¿Cuál es la altura total de la plataforma? Haz un dibujo para representar esta situación.



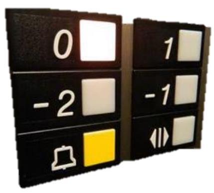
¿QUÉ SABES DE ...?

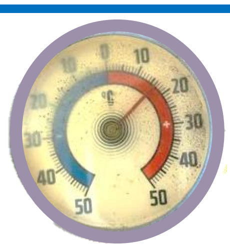


VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

$10 - 3 = 7$ $\qquad$ $3 - 10 =$ ¿?

VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

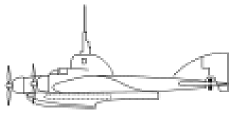




VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

1. CONTAMOS EN DOS SENTIDOS

RETOS



A) En 1961 Donald Reid diseñó y construyó un vehículo monoplaza capaz de volar y desplazarse bajo el agua.

El primer viaje (a 2 metros de profundidad y a 10 m de altura) se realizó el 9 de junio de 1964.

https://es.wikipedia.org/wiki/Submarino_volador

a) Imagina que tienes que diseñar el cuadro de mandos del submarino volador. ¿Con qué código representarías la altitud cuando el submarino se desplaza por el mar como si fuera un barco? ¿Con qué códigos representarías la profundidad y la altitud respecto al nivel del mar a la que se encuentra el prototipo?

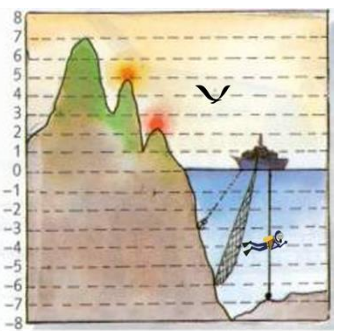
b) Haz un diseño de un cuadro de mandos en el que se represente la altitud o profundidad a la que se encuentra el aparato en cada instante. Supón que el prototipo solo se mueve entre los 10 metros por debajo y los 10 metros por encima del nivel del mar.

B) Escribe el enunciado de un problema en el que aparezcan los siguientes números:

-4 0 12

APRENDE Y APLICA

En el primer reto habrás observado una situación en la que necesitamos ***medir en dos sentidos opuestos respecto a un valor de referencia*** que marcamos con 0. Por ejemplo, el 0 puede representar el nivel del mar. A partir de este punto hemos medido en dos sentidos distintos: altura y profundidad respecto al nivel del mar. En el segundo reto es posible que hayas propuesto cuestiones como las siguientes, en las que se utilizan los números negativos:



- Para hablar de temperaturas bajo cero,
- para expresar deudas económicas,
- para representar el número de un sótano al que podemos bajar con un ascensor,
- para indicar los pasos o metros que retrocedemos,
- para indicar la profundidad bajo el nivel del mar,
- para medir el tiempo en años, contando los años antes de Cristo (a.C.) y después de Cristo (d.C.)

1. CONTAMOS EN DOS SENTIDOS

Por ejemplo:

- La temperatura mínima de ayer fue de 3 grados bajo cero: -3ºC
- El coche está aparcado en el segundo sótano: -2
- En este banco tengo una deuda de 100€: -100€
- Un pez nada a 25 m bajo el nivel del mar: -25 m
- Hipatia nació en el siglo VI a.C.

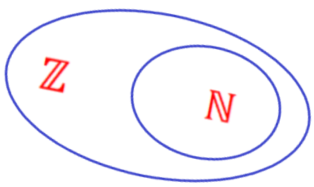
Al sentido en que los números son mayores que 0, le asignamos el ***signo +*** y al sentido en el que los números son menores que 0, le asignamos el ***signo -***. Por ejemplo, cuando medimos la profundidad respecto al nivel del mar, asignamos el signo – y cuando medimos la altura asignamos el signo +. Si no aparece signo, entendemos que el signo es positivo. En los ejemplos anteriores piensa qué representa el 0, qué representan los números positivos y qué representan los números negativos.

Además, los negativos dan sentido a la resta en la que el minuendo es menor que el sustraendo, como en el segundo apartado del problema 1 de la página 1. En ese ejemplo, la temperatura baja 7° desde una temperatura de 2°C y tenemos que restar, puesto que baja, 2 – 7, al igual que restaríamos si la temperatura fuera de 15°C, donde se calcularía 15 – 7 sin problema.

Los ***números enteros***, representados por $\mathbb{Z}$, son un conjunto formado por:

- Los números naturales: +1, +2, + 3, … (recuerda que se representaban por $\mathbb{N}$)
- Los números negativos: -1, -2, -3, -4, …
- El número 0 (no tiene signo)

Observa que el conjunto de los enteros contiene al conjunto de los naturales que forma parte de él. Así, es una ***ampliación*** que permite restar siempre y dar sentido a situaciones de conteo o medida en dos sentidos a partir de una referencia, que representamos con el 0. Es importante que las operaciones se amplíen de la misma forma y mantengan las propiedades que tienen en los naturales.



Podemos ***representar números positivos y negativos*** utilizando discos numéricos. Los discos numéricos tienen:

- Un 1 en el anverso: 1
- Un -1 en el reverso: -1

Estos discos tienen dos propiedades:

1) Si doy la vuelta a un disco obtengo el disco con signo opuesto.

   Así si doy la vuelta a 1, obtengo: -1

   Si doy la vuelta a -1, obtengo: 1

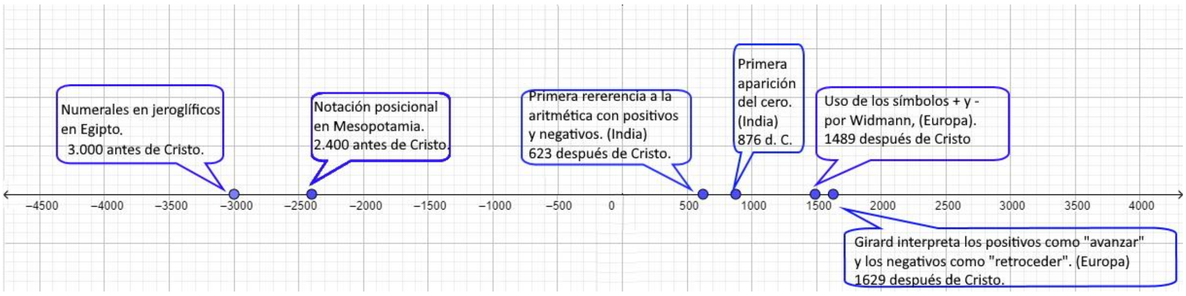
2) Al colocar un disco junto a otro con su signo opuesto el resultado es 0.

   -1 1 = 0

Con ellos podemos construir números positivos o negativos sin más que juntar discos. Por ejemplo:

3: 1 1 1 -2: -1 -1 0: 1 1 1 -1 -1 -1

Representación en la recta. Otra forma de representar los números enteros es mediante puntos en una recta. Observa por ejemplo una línea del tiempo como la del dibujo. Una representación como esta nos ayuda a visualizar los acontecimientos en el orden en el que han ocurrido. En la línea vemos una referencia a la historia de la aparación de los números enteros desde el año 3000 antes de Cristo. (Realmente existen evidencias de numeración desde la aparición de los Neardentales 50.000 años antes de Cristo.)



En la recta se representa el punto de referencia, que es el 0. Los positivos se colocan a la derecha de 0, como vimos en el tema de números naturales. Los negativos se colocan a la izquierda de 0.

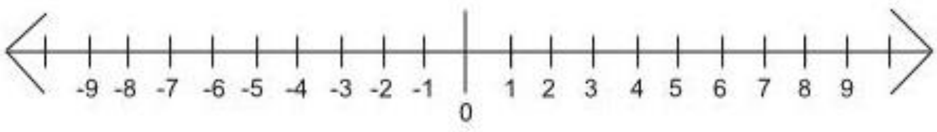
Puedes practicar otro tipo de situaciones cotidianas en recta utilizando la siguiente animación (escanea el código para acceder).

Orden de enteros. En la recta se puede visualizar claramente el orden. Como ves en la línea del tiempo, la notación posicional ocurrió antes que la primera aparición del cero, así que el número -2400 es menor que el número 876. Los números están ordenados en la recta de forma que:

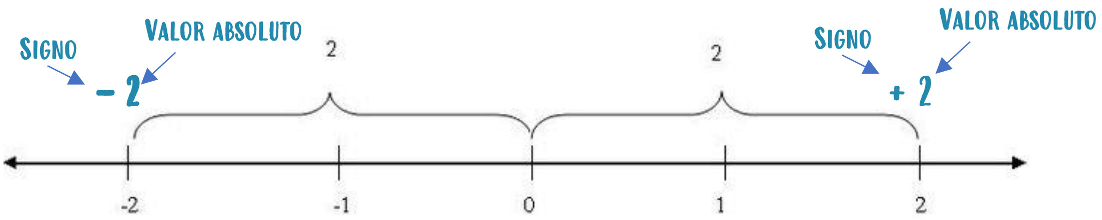
- Si un número se sitúa a la derecha de otro, es mayor que ese número.
- Si un número se sitúa a la izquierda de otro, es menor que ese número.

1. CONTAMOS EN DOS SENTIDOS

Las flechas en los extremos de la recta indican que la recta continúa hasta el infinito en ambas direcciones.



En la recta se puede medir la distancia de cada número al 0 como el número de unidades que hay entre ambos. Ese valor se llama ***valor absoluto del número entero***. Así, en el entero -2 el valor absoluto es 2 y el signo negativo. En +2 el valor absoluto también es 2 pero el signo es positivo. Así, un número entero se distingue por su signo y su valor absoluto.



PRACTICA

1.1.- Expresa con el número más adecuado cada una de estas situaciones:

a) He aparcado el coche en el tercer sótano.

b) Subió a la cima de una montaña de 1800 metros de altitud.

c) Tiene una deuda de mil euros.

d) Los concursantes ganaron 5000 euros.

e) El tiburón está nadando a 10 metros bajo el nivel del mar.

f) Pitágoras nació en el año 569 antes de Cristo.

g) Hace cuatro grados bajo cero.

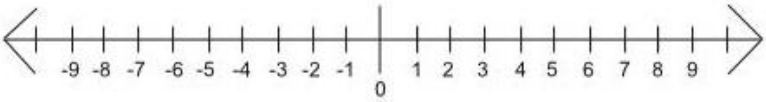
h) No he ahorrado dinero este mes.

i) El buceador alcanzó una profundidad de 3m.

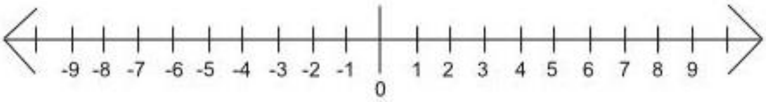
1.2.- En la siguiente serie, construye el término siguiente al tercer término y los tres términos anteriores al primero y escribe el número que representa cada término:

1.3.- Representa con discos numéricos y con la recta numérica los siguientes pares de números e indica qué número piensas que es mayor:

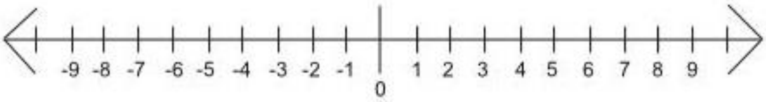
a) 2 y 5 b) -1 y -5 c) 9 y 3. d) -4 y 1 e)-7 y -3 f) 2 y -6 a)



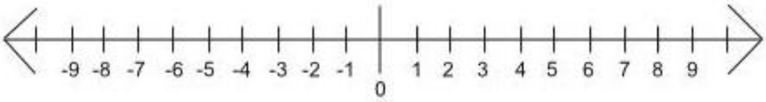
b)



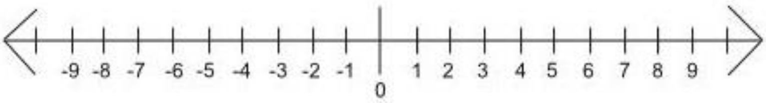
c)



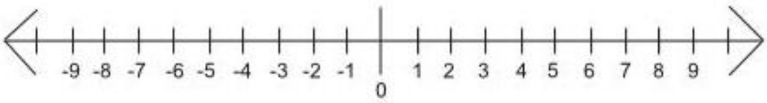
d)



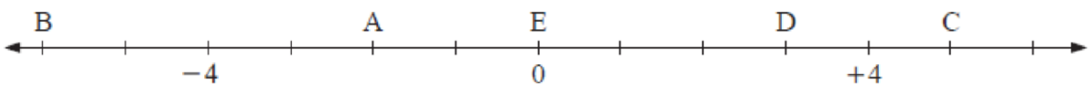
e)



f)



1.4.– Escribe el valor de los números A, B, C, D y E.



1.5.– Completa usando el símbolo más adecuado “<” o “>”.

a) -47 30 c) -35 -21 e) -514 -738

b) 500 -189 d) 84 47 f) -6000 0

1.6.– Ordena los siguientes acontecimientos empezando por el más antiguo:

a) 3400 a.C.: En Mesopotamia, los sumerios inventan el primer sistema de numeración, y un sistema de pesos y medidas.

b) 1030: Ali Ahmad Nasawi divide las horas en 60 minutos y los minutos en 60 segundos.

c) 240 a.C.: Eratóstenes usa un algoritmo para rápidamente separar los números primos.

d) 1654: Blaise Pascal y Pierre de Fermat crean la teoría de la probabilidad.

e) 355: Nace Hipatia de Alejandría, la primera mujer matemática.

f) 2400 a.C.: En Egipto se inventa un calendario astronómico preciso, que debido a su regularidad matemática se usó incluso en la Edad Media.

1.7.- Rellena los huecos:

a) Si -10 representa 10 segundos antes del lanzamiento de un cohete espacial, entonces +10 representa ____

b) Si -3° representa 3° bajo cero entonces +3° representa _________________________________

c) Si +500 representa el saldo de 500 € en una cuenta corriente entonces un saldo de 500 € en números rojos se representa por __________________

d) Si + 7 representa una rotación de 7 puntos en el sentido contrario a las agujas del reloj del mecanismo de apertura de una caja fuerte mecánica, entonces -7 representa _________________

____

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

2. SUMAMOS Y RESTAMOS ENTEROS

RETOS

A) En el Banco de Ana, solo es posible hacer ingresos de 2€ y retiradas en efectivo de 3€ cada vez. Si Juan ingresa 2€, otros 2€, otros 2€, otros 2€ y finalmente retira 3€, entonces tiene un saldo de 5€.

A.1) ¿Qué otros saldos pueden alcanzar Juan en su cuenta?

A.2) Hay otras formas de ingresar y retirar dinero para que Juan obtenga un saldo de 5€? ¿Cuántas hay?

A.3) El Banco de Ana quiere cambiar sus reglas siempre que asegure que sus clientes pueden alcanzar cualquier cantidad en el saldo de su cuenta. Si a Juan solo se le permite realizar ingresos de 3€ y retiradas en efectivo de 7€ cada vez. ¿Podrá tener en el saldo de su cuenta cualquier cantidad?

A.4) ¿Hay cantidades de ingreso y retiradas con los que no se puede alcanzar cualquier cantidad en el saldo?

B) En ocasiones tenemos una secuencia de números consecutivos:

1 2 3 4

B.1) Escribe todas las formas de colocar signos "+" o "–" entre ellos. ¿Estás seguro de que has escrito todas?

B.2) Calcula el resultado de las operaciones y escríbelo a continuación de la operación.

B.3) Ahora prueba con otro conjunto de números consecutivos y observa el resultado. ¿Estás sorprendido por lo que ha salido? Escribe lo que observas. Esto te puede llevar a verificar algunas ideas probando con nuevos conjuntos de números consecutivos y comprobando si las cosas ocurren de la misma manera. Así, podrías realizar algunas predicciones.

B.4) Hazte preguntas del tipo (e intenta responderlas investigando):

¿Qué pasaría si tomase los números consecutivos en orden decreciente?

¿Qué pasaría si tomase solo tres números consecutivos?

¿Qué pasaría si permitiera coger más números consecutivos?

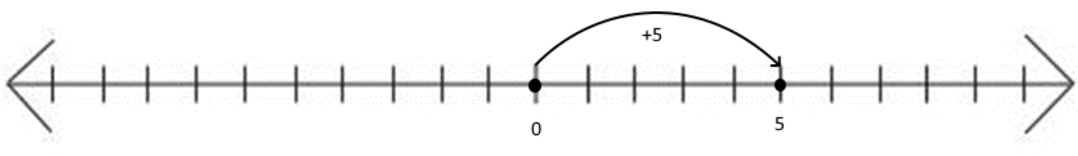
¿Qué pasaría si permitiera usar signo "+" o "–" delante del primer número?

¿Qué pasaría si utilizase números consecutivos negativos?

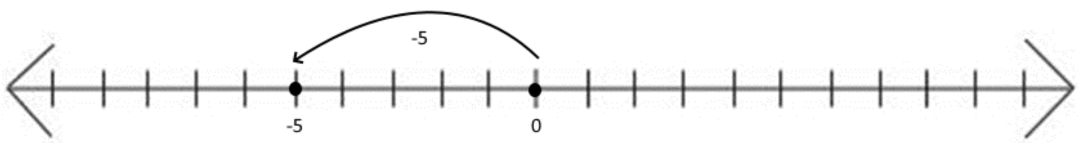
Presenta tus conclusiones al resto de la clase.

APRENDE Y APLICA

Números enteros para expresar cambios. Con números enteros podemos expresar cambios. Por ejemplo: cuántos pisos subo, o cuántos pisos bajo, cuantos pasos avanzo o retrocedo, cuantos grados giro en sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario, etc. Así, sobre la recta esos cambios se pueden visualizar como desplazamiento. En el ejemplo vemos el entero +5 visto como desplazamiento desde 0 hacia la derecha.



En el siguiente ejemplo vemos el entero -5 visto como desplazamiento desde cero a la izquierda.

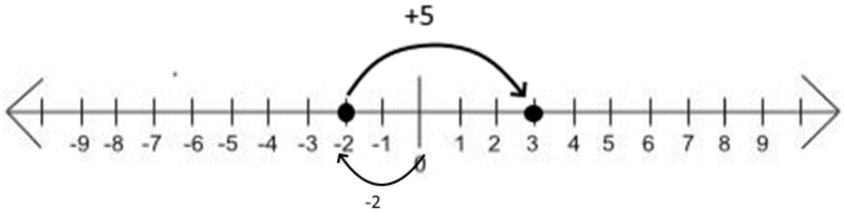


Para ***sumar dos números enteros en la recta numérica*** unimos los desplazamientos:

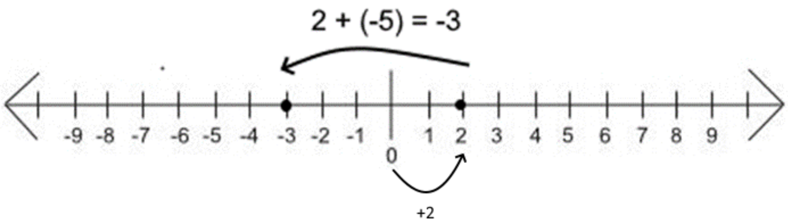
1º) Nos desplazamos desde 0 al primer sumando.

2º) Nos desplazamos desde el primer sumando tantas unidades como indica el segundo sumando, hacia la derecha si el segundo sumando es un entero positivo, y a la izquierda si el segundo sumando es negativo.

Así, por ejemplo -2 + 5 = 3

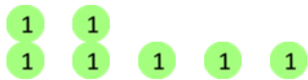


Otro ejemplo 2 + (-5) = -3

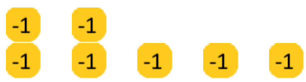


Para ***sumar números enteros con discos numéricos*** simplemente juntamos los discos que representan ambos números, y tenemos en cuenta que un disco positivo y otro negativo se anulan. Vamos a ver algunos ejemplos:

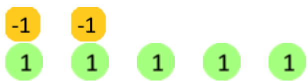
2 + 5 = 7



-2 + (-5) = -7



-2 + 5 = 3



2 + (-5) = -3

-2 + 5 = ¿?
Si consideramos 5 como 2 + 3 entonces:
-2 + 5 = -2 + 2 + 3
Pero como -2 + 2 =0 entonces:
-2 + 5 = 3

Propiedades de la suma de enteros. La suma de enteros amplía la suma de naturales puesto que mantiene sus propiedades. Los números enteros se pueden sumar y el resultado siempre es un número entero. No importa el orden en que sume dos números, el resultado siempre es el mismo (conmutativa). Tampoco importa la forma en que agrupemos los sumandos cuando hay más de dos porque el resultado es el mismo siempre (asociativa). Si se suma 0 a cualquier número entero obtenemos ese mismo número.

El ***opuesto de un número entero*** es otro entero que sumado con él da como resultado 0. Todos los enteros tienen opuesto, salvo el 0. Observa que los opuestos tienen el mismo valor absoluto y signo opuesto. El opuesto de 2 es -2 y el de -7 es 7.

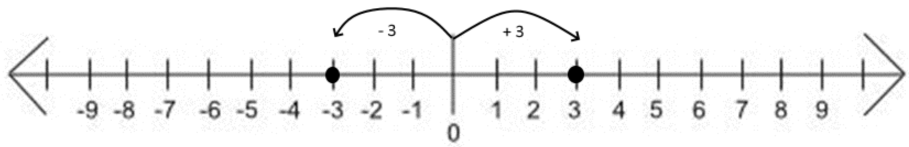
Opuesto de un número con discos algebraicos: Para representar el opuesto basta dar la vuelta a los discos.

A partir del entero 3: 1 1 1

Se da la vuelta a los discos y obtengo su opuesto - -1 -1 -1 3:

Si se vuelve a dar la vuelta a los discos se obtiene 3 que es el opuesto de - 3: 1 1 1

Opuesto de un número en la recta numérica. El opuesto en la recta es un número que está a la misma distancia de 0, pero en sentido contrario.



Resta de enteros con discos numéricos.

Para restar a 7, 4 unidades, las tachamos o las quitamos.

7 – 4 = 3 ~~1~~ ~~1~~
~~1~~ ~~1~~ 1 1 1

Vemos que 7 – 4 = 3.

Calcula con discos: 7 + (-4)

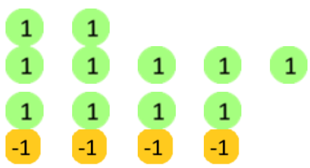
y observa que: 7 + (-4) = 3

así que 7 – 4 = 7 + (-4) = 3

Para restar a 7, -4, no tengo -4 unidades (cuatro discos negativos) para quitar.

7 – (-4) = ¿? 1 1
1 1 1 1 1

Para calcular la resta añadimos 4 discos negativos y 4 positivos para seguir teniendo 7 unidades y además poder así quitar 4 discos con valor -1.

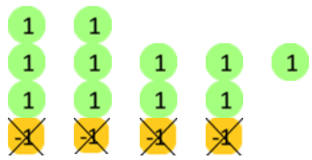


Ahora podemos hacer la resta:

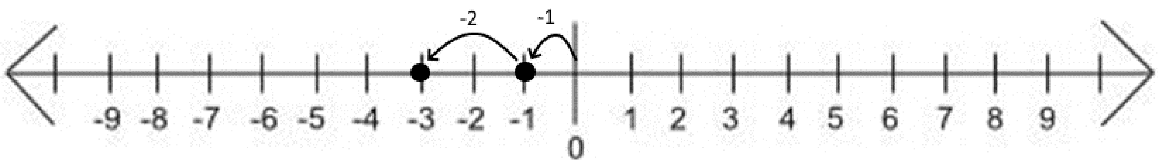
7 - (-4) = 11

Vemos que

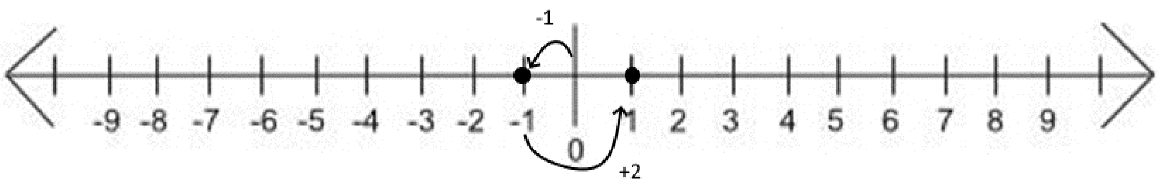
7 – (-4) = 7 + 4



Resta de enteros en la recta. En la recta restar equivale a cambiar el sentido del desplazamiento del número que resta, puesto que restar es lo opuesto de sumar y por tanto al sumar una cantidad y restar la misma cantidad el número debe permanecer igual. La forma de deshacer un desplazamiento en un sentido es moverse la misma cantidad en el otro sentido. Por ejemplo: -1 – 2 equivale a desplazarse 2 unidades a la izquierda desde -1, que es lo mismo que hacer -1 + (-2).



Para calcular -1 – (-2), hay que desplazarse desde -1, 2 unidades en la dirección opuesta a la izquierda, lo que equivale a desplazarse 2 unidades hacia la derecha. Equivale a -1 + 2.

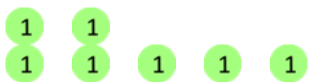


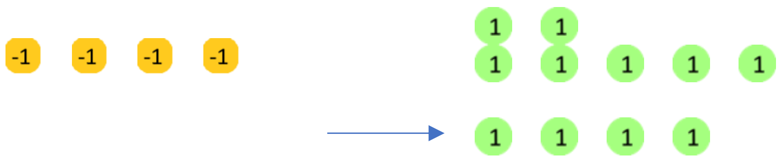
De los ejemplos anteriores se deduce que ***restar dos números enteros es lo mismo que sumar al primero el opuesto del segundo número***. Así, por ejemplo:

5 – (-7) = 5 + (+7) = 5 + 7.

Resta de enteros con discos numéricos. Teniendo en cuenta lo anterior, la resta con discos también se puede hacer juntando los discos que representan el primer número con los que representan el segundo a los que se le da la vuelta.

7 – (-4)   7 + 4 = 11





Cuando están juntos el signo que representa una operación y el signo que forma parte de la representación de un número entero, ponemos el entero con su signo entre paréntesis:

Se escribe 2 + (-3) El signo "+" representa la "operación suma" y el signo "–" forma parte de la representación del entero -3.

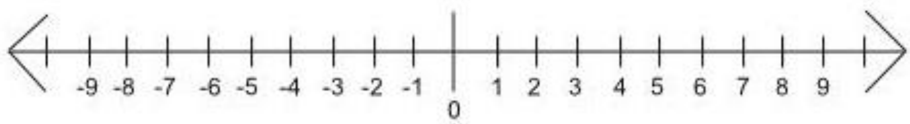
Se escribe 2 – (+3) El signo "–" representa la "operación resta" y el signo "+" forma parte de la representación del entero +3.

Así, es importante fijarse si un signo menos indica que estamos calculando el opuesto de un número o que estamos restando.

	Se lee como	**También se puede leer:**
2 + (-3)	Dos más "menos tres".	Dos más "el opuesto de tres"
1 – (-3)	Uno menos "menos 3"	Uno menos "el opuesto de tres"
- (-3)	Menos "menos tres"	"el opuesto de menos tres" o "El opuesto del opuesto de tres".

PRACTICA

2.1.– Resuelve los siguientes ejercicios representando desplazamientos en la recta numérica.



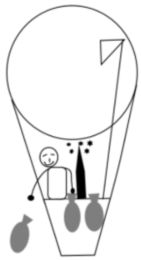
a) Si estoy en el piso -1 y bajo dos pisos, ¿en qué piso estoy?
b) Si estoy en el piso -2 y subo tres pisos, ¿en qué piso estoy?
c) Si estoy en el piso -3 y voy al -1, ¿he subido o bajado?, ¿cuántos pisos?
d) Si estoy en el piso 5 de un edificio y bajo hasta el -2, ¿cuántos pisos he bajado?

2.2.– Realiza las siguientes operaciones utilizando discos y la recta numérica.

a) -3 + 4 b) 3 + (-4) c) (-3) + (-4) d) 3 + 4

- Deduce de qué depende el signo del resultado de la suma.
- También deduce una forma para calcular la suma de enteros sin utilizar discos o la recta numérica.

2.3.– Un globo se desplaza un metro hacia arriba si le proporcionamos una bocanada de aire caliente. +(+1)



Se desplaza un metro hacia abajo si añadimos un saco de arena. +(-1)

Se desplaza un metro hacia abajo si le quitamos una bocanada de aire caliente. –(+1)

Se desplaza un metro hacia arriba si le quitamos un saco de arena. –(-1)

A. Calcula e interpreta el significado de las siguientes operaciones y su resultado:

a) -(-10) + 6 = b) (+10) + (-7) = c) 5 – (+ 2) = d) 5 – (+ 2) = e) 2 – (+5)

B. Escribe cuatro pares de acciones opuestas que dejen el globo a la misma altura y represéntalas numéricamente. Por ejemplo: Tirar 3 sacos de arena (sube tres metros) y dejar escapar 3 bocanadas de aire caliente (baja tres metros) se representa por –(-3) – (+3) = 3 – 3.

2.4.– Mario dispone de una tarjeta de crédito en la que se han realizado los siguientes movimientos durante los meses de enero y febrero:

MES DE ENERO

El 1 enero dispone de un saldo de 20 €

El 2 enero ... Gasto en el cine 12 €

8 de enero.... Ingreso 150€

9 de enero.... Gasto en ropa 35 €

15 de enero ... Recibe un ingreso de 20 € como regalo de cumpleaños

25 de enero ... Gasto en peluquería 30€

30 de enero—gasto móvil ... 120 €

MES DE FEBRERO

El 4 Feb....... Ingreso de 150 €

8 de feb .... Gasto en supermercado 20 €

15 de feb ... Gasto transporte 15€

18 de feb ... Gasto en librería 32€

26 de feb ... gasto con amigos 60 €

28 de feb ... ingreso Bizum amigos 50€

a) Completa las siguientes tablas con ayuda de la calculadora:

MES DE ENERO

	INGRESOS	GASTOS	SALDO
1 EN			20 €
2 EN		-12 €	8 €
8 EN	150 €		
9 EN			
15 EN			
25 EN			
30 EN			
TOTAL			

MES DE FEBRERO

	INGRESOS	GASTOS	SALDO
Saldo 1 FEB			
4 FEB			
8 FEB			
15 FEB			
18 FEB			
26 FEB			
28 FEB			
TOTAL			

b) ¿Cuál es el saldo de la tarjeta al finalizar el mes de enero?

c) ¿Cuánto dinero tiene Mario al final del mes de febrero?

d) ¿Ha ganado o ha perdido dinero de enero a febrero?

2. SUMAMOS Y RESTAMOS ENTEROS

2.5.– PROBLEMAS: *Resuelve los siguientes problemas expresando los datos con enteros, representándolos gráficamente si es necesario y/o escribiendo operaciones y respondiendo a la cuestión planteada.*

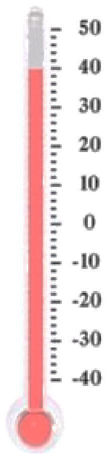
2.5.1. Un pueblo está situado en lo alto de una montaña, a 707 m de altitud, mientras que una cantera de granito se encuentra en el fondo del valle a 64 m bajo el nivel del mar. Si voy del pueblo a la cantera, ¿cuántos metros he bajado?

2.5.2 Las Guerras Púnicas empezaron el año 264 a.C. y terminaron el año 146 a.C. ¿Cuántos años duraron?

2.5.3. El Everest, con 8848 metros de altura, es el monte más alto de la Tierra, mientras que la fosa de las Marianas, que está a 10916 metros bajo el nivel del mar, es la zona más profunda. ¿Qué diferencia de altura hay entre ellos?

2.5.4. El papiro de Ahmes o de Rhind es un famoso documento que constituye una gran fuente de información de la matemática egipcia. Lo escribió Ahmes el año 1650 a.C. y fue comprado por Alexander Henry Rhind en 1858. ¿Qué antigüedad tenía el papiro cuando lo compró?

2.5.5. Estás en lo alto de una colina. Desciendes 45 metros, después subes un pequeño monte de 23 metros y finalmente vuelves a descender 15 metros. ¿Cuál ha sido la variación de altura respecto del principio?



2.5.6. En las noticias sobre el tiempo el reportero contó que la temperatura en Adelaida era de 25°C, mientras que en Londres había -1°C y -5°C en Berlín. Representa en un termómetro las temperaturas y responde:

a) ¿Cuántos grados más hay en Adelaida que en Londres?

b) ¿Cuántos menos hay en Berlín que en Londres?

2.5.7. Antonio le debe a Jana 40€. Entonces Jana le pide prestado a Antonio 50€. Un tiempo después Antonio presta a Jana 60€. Indica si alguno de los dos debe dinero y en caso de que deba cuánto debe.

2.5.8 . Tengo un termómetro en mi invernadero. Registra las temperaturas máximas y mínimas alcanzadas desde la última vez que lo reinicié. Lo reinicié el domingo cuando había una temperatura de 4°C. De madrugada la temperatura cayó 5°. Después el lunes subió 6° antes de descender 10° durante la noche. El martes subió 4° y bajó 2° de madrugada. ¿Qué temperatura máxima y mínima había registrado el termómetro cuando yo lo miré el miércoles por la mañana?

2.6.– Si p es un entero positivo y q es un entero negativo, ¿cuál de las siguientes expresiones es mayor?

a) p – q   b) q – p   c) p + q   d) -p – q

3. MULTIPLICAMOS Y DIVIDIMOS ENTEROS

RETOS

A) He ahorrado 5€ cada mes durante 9 meses, ¿cuánto dinero tengo? Escribe el cálculo que haces.

Mi madre me ha prestado 5€ cada mes durante 9 meses, ¿cuánto dinero tengo? Escribe el cálculo que haces.

B) Inventa un problema que se resuelva con la división -18 : 3 y otro similar que se resuelva con la división (-18) : 3 e interpreta los resultados.

APRENDE Y APLICA

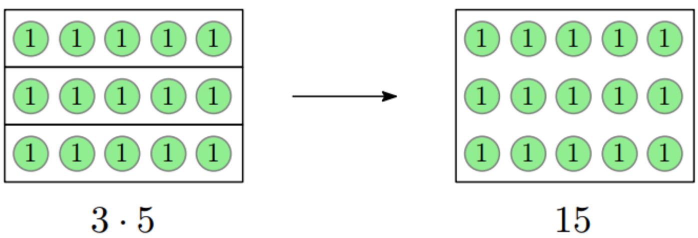
Multiplicación por 0. Como ya sabes, cuando multiplicas cualquier número natural por cero, el resultado es cero. Lo mismo ocurre cuando multiplicas por cero cualquier número entero:

$$(+3) \cdot 0 = 0 \qquad (-3) \cdot 0 = 0$$

Multiplicación de enteros positivos. Recuerda que la multiplicación de números naturales se puede interpretar como una suma sucesiva:

$$3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 = 15$$

Esta operación se puede interpretar como "3 veces 5", o "3 grupos de 5", y se puede representar usando fichas numéricas de esta forma:



Como ya hemos visto, los números enteros positivos los podemos identificar con los naturales, de manera que ya sabemos cómo multiplicar dos enteros positivos:

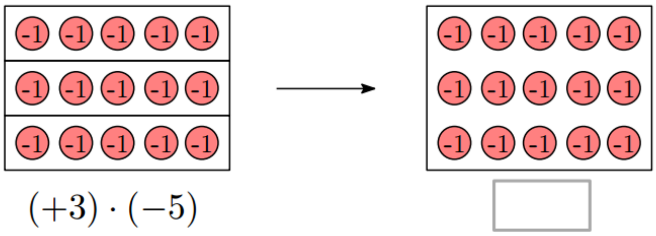
$$(+3) \cdot (+5) = (+5) + (+5) + (+5) = +15$$

Puedes probar a expresar los siguientes productos de números enteros como una suma y efectuar lo operación, representando alguno de los apartados con fichas numéricas:

a) $(+2) \cdot (+3) =$ b) $(+4) \cdot (+2) =$ c) $(+6) \cdot (+2) =$

3. MULTIPLICAMOS Y DIVIDIMOS ENTEROS

Multiplicación de positivo por negativo. Veamos ahora qué pasa si uno de los enteros que estamos multiplicando es un entero negativo. Si la expresión (+3) · (-5) la interpretamos como "3 veces -5" la podemos representar con fichas numéricas y ver cuánto vale



- Expresa (+3) · (-5) en forma de suma repetida, como en el ejemplo de 3 · 5.
- Busca una interpretación de esta expresión pensando en un cambio de temperatura durante unas horas.

Expresa los siguientes productos de números enteros como una suma y efectúa la operación:

a) (+2) · (-4) = b) (+3) · (-2) = c) (+4) · (-3) =

Imagina que queremos calcular (-2)·(+3). ¿Cuál debe ser el resultado? ¿Por qué?

Utiliza esta idea para expresar los siguientes productos de números enteros como una suma y efectúa la operación:

a) (-3) · (+4) = b) (-2) · (+5) = c) (-4) · (+2) =

¿Podrías sacar alguna conclusión sobre el producto de enteros donde uno es positivo y el otro es negativo?

Multiplicación de dos negativos. Hemos estudiado el producto de dos enteros positivos y el producto de dos enteros de distinto signo. Por tanto, solo nos falta el caso en que los dos números enteros son negativos. ¿Imaginas cuál es el resultado de un producto como este?

(-2) · (-3)

Observa esta secuencia e intenta completarla:

(+3) · (-3) = -9

(+2) · (-3) = -6

(+1) · (-3) = -3

0 · (-3) = 0

(-1) · (-3) = ____

(-2) · (-3) = ____

Cuando multiplicamos dos enteros que tienen el ***mismo signo*** el resultado es positivo:

$(+2) \cdot (+3) = +6$

$(-2) \cdot (-3) = +6$ $\qquad$ $(+) \cdot (+) = (+)$

$(+9) \cdot (+5) = +45$ $\qquad$ $(-) \cdot (-) = (-)$

$(-9) \cdot (-5) = +45$

Cuando multiplicamos dos enteros que tienen ***signos distintos*** el resultado es negativo:

$(+2) \cdot (-3) = -6$

$(-2) \cdot (+3) = -6$ $\qquad$ $(+) \cdot (-) = (-)$

$(+9) \cdot (-5) = -45$ $\qquad$ $(-) \cdot (+) = (-)$

$(-9) \cdot (+5) = -45$

Multiplicar por -1. Una operación sencilla pero importante va a ser "multiplicar por -1". Completa:

$(-1) \cdot (+2) =$ ___

$(-1) \cdot (-2) =$ ___

$(+3) \cdot (-1) =$ ___

$(-3) \cdot (-1) =$ ___

Observa que "multiplicar por -1" se traduce en cambiar el signo,

División de enteros positivos. ¿Recuerdas cómo repartimos una cierta cantidad de dinero o una deuda entre varias personas, de modo que todas ellas paguen o reciban la misma cantidad? ¿Qué operación tienes que hacer? Reparte, por ejemplo, 12€ entre 4 personas. ¿Cuánto dinero tienes que entregar a cada una? Si tienes 12 monedas de 1€ cada una.

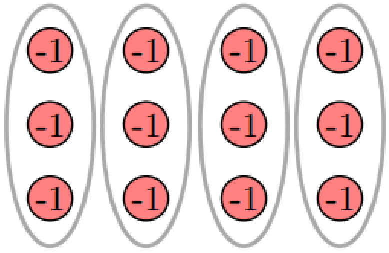
¿Cómo puedes hacer el reparto sin necesidad de hacer ninguna operación? Puedes entregar una moneda a cada persona tantas veces como sea necesario hasta que te quedes sin monedas.

1ª persona $\qquad$ 2ª persona $\qquad$ 3ª persona $\qquad$ 4ª persona

Cada persona recibe 3 €. El cálculo que hemos hecho es:

$(+12) : (+4) = +3$

División de negativo entre positivo. Si ahora queremos calcular (-12) : (+4) lo podemos interpretar como repartir 12 fichas negativas, o una deuda de 12 euros, entre 4 personas.



Por tanto, $(-12):(+4) = -3$

La división también se puede escribir en forma de fracción, por lo que también escribimos

$$\frac{(-12)}{(+4)} = -3$$

Completa los siguientes cálculos (recuerda que cuando el número entero es positivo podemos omitir el signo).

a) (-8):(+2) =

b) (-15):3 =

c) $\frac{(-6)}{(+3)} =$

d) $\frac{(-10)}{2} =$

División entre negativos. Cuando el divisor es un número negativo nos encontramos con una dificultad. ¿Puedes imaginar qué significa "repartir 8 euros entre (-2)"?

Vamos a recurrir a la relación entre multiplicación y división:

$$8 : 2 = 4 \leftrightarrow 4 \cdot 2 = 8$$

Aplica esta misma idea para completar los recuadros, cuando el divisor es – 2:

$$8 : (-2) = \square \leftrightarrow \square \cdot (-2) = 8$$

Completa estos ejemplos:

a) $(-12) : (-3) = \square \leftrightarrow \square \cdot (-3) = -12$

b) $10 : (-5) = \square \leftrightarrow \square \cdot (-5) = 10$

En resumen, el signo del cociente de dos números enteros viene dado por la misma regla que el signo del producto de dos números enteros. Completa:

- Si el dividendo y el divisor tiene el mismo signo, el cociente tiene signo ________________
- Si el dividendo y el divisor tienen signos distintos, el cociente tiene signo ________________

PRACTICA

3.1.- Calcula:

a) (+4) · (-3) = 　　b) (-2) · (-7) = 　　c) 0 · (-3) =

d) (-5) · (+4) = 　　e) (+7) · (+3) = 　　f) (-1) · (-8) =

g) (+4) · (-3) = 　　h) (+3) · (-4) = 　　i) (+4) · (-3) · (+2) =

3.2.- Completa el círculo con el signo adecuado para que la operación sea correcta:

a) (-2) · (◯3)= +6 　　b) (◯4) · (-3)= -12

c) (◯1) · (+2)= -2 　　d) (-6) · (◯3)= -18

e) (◯6) · (-3)= +18 　　f) (-1) · (◯8)= +8

3.3. Escribe cuatro productos distintos en los que el resultado sea −12:

(　) · (　) = - 12 　　(　) · (　) = - 12 　　(　) · (　) = - 12 　　(　) · (　) = - 12

3.4.- Calcula:

a) (+18) : (-3) = 　　b) (-18) : (-3) = 　　c) 0 : (-3) =

d) (+6) : (+2) = 　　e) (-6) : (+2) = 　　f) (-8) : (-1) =

g) (+7) : (-7) = 　　h) (-10) : (-2) = 　　i) (+24) : (-6)=

3.5.- Completa el círculo con el signo adecuado para que la operación sea correcta:

a) (-12) : (◯3)= +4 　　b) (◯6) : (-3)= -2

c) (◯2) : (+2)= -1 　　d) (-6) : (◯3)= +2

e) (◯24) : (-4)= -6 　　f) (-24) : (◯6)= +4

3.6. Escribe cuatro divisiones distintas en las que el resultado sea -3.

(　) : (　) = - 3 　　(　) : (　) = - 3 　　(　) : (　) = - 3 　　(　) : (　) = - 3

4. OPERANDO CON ENTEROS

RETOS

A) Ordena de menor a mayor los siguientes números:

$$(-2)^2,\ (-2)^3,\ (-2)$$

Una vez que la serie está ordenada, continúa la serie hacia delante y hacia atrás.

B) ¿Qué números se pueden colocar en el cuadrado para que sea cierta la igualdad?

$$\square^2 - 1 = 8$$

C) Observa los siguientes ejemplos, algunos de ellos están mal hechos. ¿Qué operaciones son correctas? En las que no lo son, ¿cuál te parece que puede haber sido la causa del error?

$-3 + 5 \cdot (-2) = -4$

$-2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = 14$

$5 + 3 \cdot (-2) = -1$

$-2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = -16$

APRENDE Y APLICA

Una vez que hemos visto cómo ampliar las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) de los naturales a los enteros, veremos cómo ***ampliar la potenciación y radicación a enteros***. En los dos primeros retos has tenido que usar dichas operaciones.

Recuerda que, en los números naturales, para resumir una multiplicación de factores iguales se emplea la potencia, donde el factor que se repite es la base y el número de veces que se repite es el exponente. En enteros la definición es la misma, con la salvedad de que la base puede ser también un número negativo. Para ***elevar un número negativo a una potencia*** es necesario poner la base entre paréntesis ya que para multiplicar números negativos los ponemos entre paréntesis:

$$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$$

Si no se pone entre paréntesis lo que significa es el opuesto del resultado de la potencia. Observa atentamente estos ejemplos:

$(-5)^2 = (-5)\cdot(-5) = +25$	pero	$-5^2 = -(5^2) = -(5\cdot5) = -25$
$(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$	y	$-5^3 = -(5^3) = -(5\cdot5\cdot5) = -125$

A la izquierda vemos (-5) elevado al cuadrado y (-5) elevado al cubo.

A la derecha vemos el opuesto de 5^2 y el opuesto de 5^3.

Calcula las siguientes potencias:

a) $(-3)^2 =$ b) $(3)^2 =$ c) $(-1)^{10} =$ d) $(1)^{10} =$

e) $(-3)^3 =$ f) $(+3)^3 =$ g) $(-2)^5 =$ e) $(+2)^5 =$

¿Qué observas?

La potencia cuya base es un número entero y exponente natural es un valor positivo si el exponente es par, y es un valor negativo si el exponente es impar. Por ejemplo:

$(-5)^2 = (-5)\cdot(-5) = +25$

$(-1)^3 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1.$

Potencias en la calculadora: Para calcular potencias, las calculadoras tienen alguna de las teclas siguientes (podrían cambiar las letras o tener un cuadradito en lugar de una letra):

[x^y] [^]

Para calcular una potencia se debe introducir primero la base y después el exponente. Así calcularíamos 2^3:

[2] [x^y] [3] [=] O bien [2] [^] [3] [=]

Si la base es negativa utilizaremos la tecla para cambiar el signo, y las teclas de paréntesis. Por ejemplo, para escribir $(-2)^3$ ponemos:

[( ] [(-)] [2] [ )] [^] [3]

Raíces cuadradas de enteros. Una vez definidas las potencias, la idea de raíz cuadrada se puede extender a los números enteros. Una raíz cuadrada de un número entero es otro número entero cuyo cuadrado es el primer número. Es decir, la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado. ***Todo número entero positivo tiene dos raíces cuadradas de igual valor absoluto***

y distinto signo. Ya hemos visto en los naturales que $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ por lo que $\sqrt{9} = 3$ Pero también, en los enteros $(-3) \cdot (-3) = 9$ por lo que 9, considerado como número entero positivo, tiene 2 raíces cuadradas $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{9} = -3$. Por ahorrar espacio solemos escribir $\sqrt{9} = \pm 3$.

¿Se puede calcular la raíz cuadrada de un número negativo, como por ejemplo $\sqrt{-4}$? ¿Por qué?

Raíces cúbicas de enteros. Al igual que se han definido las raíces cuadradas se podían definir otro tipo de raíces, como inversas de otro tipo de potencias, por ejemplo, la potencia de exponente 3 (cubo), en lugar de la potencia de exponente 2 (cuadrado). Así, una raíz cúbica de un entero es otro entero cuyo cubo (potencia de exponente 3) es igual al primer número. Todo número entero tiene una única ráiz cúbica. Por ejemplo, sabemos que $(+2)^3 = (+2)\cdot(+2)\cdot(+2) = 8$ y por tanto $\sqrt[3]{8} = 2$. Como $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$, entonces $\sqrt[3]{-8} = -2$

Raíces en la calculadora: Para calcular raíces en la calculadora se utilizan las teclas

 Raíz cuadrada  Raíz cúbica

escribiendo el número del que queremos calcular la raíz tras pulsar la tecla.

Operaciones combinadas. Al igual que cuando se opera con números naturales, cuando hay varias operaciones con enteros hay que tener claro en qué orden hay que hacerlas, cuáles son prioritarias. La prioridad de operaciones con los números enteros es la misma que ya conoces cuando trabajabas con números naturales: paréntesis, potencias, multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha si hay varias seguidas) y sumas y restas. Veamos un ejemplo con detalle (en cada línea hemos anotado la operación que efectuamos para pasar a la línea siguiente):

$5 - 8 + 3 \cdot (\underline{3^2} - 13)$ paréntesis - potencia

$= 5 - 8 + 3 \cdot \underline{(9 - 13)}$ paréntesis - resta

$= 5 - 8 + \underline{3 \cdot (-4)}$ multiplicación

$= \underline{5 - 8} + (-12)$ resta

$= \underline{-3 + (-12)}$ suma

$= -15$

Uso de paréntesis. Cuando se quiere alterar la prioridad de operaciones, por ejemplo, hacer una suma antes que una multiplicación, hay que colocar paréntesis en la operación que se quiere hacer primero, puesto que los paréntesis son prioritarios a todas las demás operaciones. Por ejemplo, en la operación 3 + 4 · 3 , para hacer primero la suma habría que escribir (3 + 4) · 3, pues de lo contrario la primera operación que hay que hacer es la multiplicación. No es necesario poner paréntesis si la operación es prioritaria, por ejemplo, la operación 3 + 4 · 3 no se escribe como 3 + (4 · 3). Cuando se escriben las divisiones en forma de fracción hay que tener en cuenta que la división se realiza sólo cuando se resuelven los cálculos que hay en el dividendo y en el divisor:

$$\frac{13+5+2}{5\cdot 4} = (13+5+2) : (5\cdot 4) = 20 : 20 = 1$$

Esto es especialmente importante cuando se usa la calculadora, pues la operación se escribe en una única línea con los correspondientes paréntesis.

PRACTICA

4.1.– Escribe aplicando la definición y calcula:

a) $4^2 =$	g) $(-12)^1 =$	m) $(-2)^6 =$
b) $(-6)^1 =$	h) $10^5 =$	n) $(+4)^3 =$
c) $(+7)^2 =$	i) $(+6)^2 =$	o) $(-10)^3 =$
d) $(-1)^5 =$	j) $(-1)^4 =$	p) $(-8)^1 =$
e) $(+2)^5 =$	k) $(-4)^2 =$	q) $(-3)^1 =$
f) $(-3)^2 =$	l) $(+6)^1 =$	r) $(+1)^{15} =$

4.2. – Calcula:

a) $-5^2 =$	b) $(-5)^2 =$	c) $(-2)^4 =$
d) $-2^4 =$	e) $-10^5 =$	f) $(-10)^5 =$

4.3. – Expresa los siguientes números como potencias de más de una manera si es posible:

a) 81 b) 16 c) -125 d) 1

4.4. – Expresa como una única potencia y calcula con la calculadora si es necesario:

a) $(-2)^3 \cdot (-2)^7 =$	e) $3^2 \cdot (-3)^2 =$	j) $10^6 : (-10)^5 =$
b) $(-3)^7 : (-3)^2 =$	f) $5^3 \cdot (-2)^3 =$	k) $(-1)^{23} : (1)^3 =$

c) $(-5)^{12} : (-5)^{6} =$ 　h) $-7^{3} \cdot 7^{2} =$ 　l) $((-4)^{4})^{2} =$

d) $((-10)^{2})^{3} =$ 　i) $(-3)^{11} : (3^{7}) =$ 　m) $(-3)^{20} \cdot (+3)^{13}$

4.5. – Calcula todos los valores de las siguientes raíces, si es posible:

a) $\sqrt{1} =$ 　g) $\sqrt{10000} =$ 　m) $\sqrt{-64} =$

b) $\sqrt{16} =$ 　h) $\sqrt{-1} =$ 　n) $\sqrt{64} =$

c) $\sqrt{49} =$ 　i) $\sqrt{81} =$ 　o) $\sqrt[3]{-125} =$

d) $\sqrt{-81} =$ 　j) $\sqrt{900} =$ 　p) $\sqrt{169} =$

e) $\sqrt[3]{27} =$ 　k) $\sqrt{0} =$ 　q) $\sqrt{1000000} =$

f) $\sqrt{225} =$ 　l) $\sqrt{36} =$ 　r) $\sqrt{144} =$

4.6.– Realiza los cálculos siguientes, teniendo cuidado de aplicar la prioridad explicada. Puedes ayudarte subrayando con un color aquellas operaciones que haya que hacer primero.

a) 15 – 12 : 3 = 　b) 6 – 12 : (-3) =

c) 12 – 12 : 3 + 4 · (-3) = 　d) 3 · (15 -12) – 32 : (-2) =

e) 5 + 2 · (5 -12) + (-3) · 5 = 　f) (10 – 12) : (3 – 4) – 6 · (-3) -50 =

g) -2 · (5 – 8) + 14 : 2 – 25 =

4.7.– Completa los recuadros para que los cálculos sean correctos:

a) 2 · $\boxed{}$ + 1 = -15 　b) $\boxed{}$ – 6 · (-3) = 10 　c) 2 + 2 · $\boxed{}$ = -10 　d) 3 · ($\boxed{}$ -12) = -15

4.8.– Intenta obtener todos los números, del 1 al 10, usando cuatro 4, las operaciones elementales y paréntesis. Escribe todas las soluciones que encuentres. Por ejemplo:

1 = 4 – 4 + 4 : 4 　1 = (4 + 4) : (4 + 4)

4.9.– Escribe con una operación combinada y calcula:

a) El dinero que tengo después de 3 meses ahorrando 4€ y 5 meses con una deuda de 3€
b) Los pisos que dice mi móvil que he subido si he ido desde un valle a 18 metros bajo el nivel del mar a un pico que está a 324, si para el móvil un piso son 3 metros.
c) La temperatura que hay a las 10 de la mañana si a las 6 de la madrugada había 5 grados bajo cero y ha subido un par de grados cada hora.
d) El imperio romano duró desde el año 27 a.C. hasta el 305 d.C. Si cada cuatro años los romanos construían 1444 km de calzada, ¿cuántos metros se habrían construido en total a lo largo del imperio?

SOMOS ENTEROS

- Se coloca en el suelo una cuerda y en ella se pega, en puntos equidistantes, hojas que representan los números entre el -10 y el 10.
- Se eligen 9 estudiantes y a cada uno se le coloca en un punto de la recta entre el -4 y el 4.
- El resto de la clase observará.
- El docente irá dando órdenes a los estudiantes que estos cumplirán moviéndose sobre la recta, mientras que los estudiantes que observan apuntarán en cada caso lo que ocurre en la siguiente tabla.

Restar 3	
Sumar 3	
Sumar 1	
Restar 2	
Multiplicar por 2	
Multiplicar por -1	
Dividir por – 2	
Multiplicar por – 2	

CONCLUSIONES DE LA ACTIVIDAD

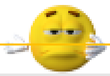
Una vez que se haya cumplimentado la tabla los estudiantes que observan se colocarán en la recta para realizar el ejercicio y los que lo han hecho anteriormente cumplimentarán la tabla. Después por parejas obtendrán conclusiones a partir de lo que ha observado cada uno. Las distintas parejas deben explicar alguna de las conclusiones.

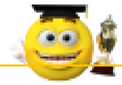
DE UN VISTAZO

DIBUJA LAS IDEAS PRINCIPALES DEL TEMA:

- ✓ Uso de los números enteros en la vida real.
- ✓ Formas de representar los números enteros: Recta, discos, números.
- ✓ Valor absoluto y signo de un entero.
- ✓ Orden en los números enteros.
- ✓ Suma de enteros.
- ✓ Opuesto de un número entero.
- ✓ Resta de enteros.
- ✓ Uso del símbolo “-“ en la resta y como signo.
- ✓ Multiplicación de enteros.
- ✓ División de enteros.
- ✓ Potencia de un número entero.
- ✓ Propiedades de las operaciones con potencias.
- ✓ Raíces cuadradas y raíces cúbicas.
- ✓ Jerarquía de las operaciones.

Llegados al final del tema reflexiona sobre lo que has aprendido. Marca en la siguiente tabla lo que corresponde a cada frase, haz la autoevaluac a de nuevo la tabla

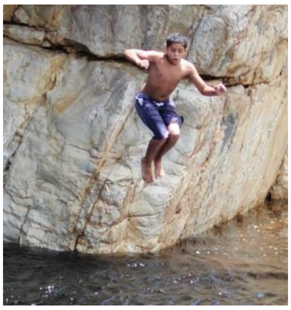


¿CÓMO LO HAGO?	Me cuesta hacerlo	Estoy aprendiendo	Lo hago bien	Soy un experto
Representar los números enteros sobre la recta numérica o con discos				
Ordenar los números enteros				
Escribir el opuesto de un número entero				
Distinguir en un entero valor absoluto y signo				
Sumar números enteros				
Restar números enteros				
Multiplicar números enteros				
Dividir números enteros				
Calcular potencias de un número entero				
Calcular raíces cuadradas de un número utilizando la definición				
Calcular raíces cúbicas de un número utilizando la definición				
Utilizar la relación inversa entre las operaciones con números enteros (suma/resta, multiplicación/división, potencias /raíces) para hacer cálculos.				
Utilizar correctamente la jerarquía de las operaciones.				
Escribir adecuadamente expresiones, haciendo uso de los paréntesis, para marcar el orden en que ha de realizarse una serie de operaciones combinadas.				
Reconocer problemas cotidianos que pueden ser resueltos utilizando los números enteros.				
Identificar en un problema los datos necesarios para resolver el problema.				
Representar datos con números enteros.				
Distinguir qué operaciones se necesitan en un problema.				
Utilizar representaciones gráficas de los datos de los problemas que ayuden a encontrar la relación entre ellos.				
Explicar de forma ordenada y clara los pasos que sigo para resolver una actividad o problema matemático.				
Comprobar e interpretar la solución de los problemas.				
Inventar problemas en los que se usen los números enteros.				
Expresar las dificultades que tengo a la hora de resolver un problema matemático con números enteros, en caso de tenerlas.				

AUTOEVALUACIÓN

A1. *Inventa un problema a partir de la siguiente fotografía en la que intervengan números enteros tanto positivos como negativos.*
Resuelve el problema e interpreta la solución.



A2. Calcula:

a) $25 - 32 : (-4) + (-13)$

b) $(-10) - (-7) + (-12) : 4$

c) $(5 - 7)^3 \cdot 4 + ((-18) + (-2)) : (-2)^2$

d) $(-2)^2 - (-2)^2 + (-2)^3 - 2^3$

e) $(-18 - (18 + (-9))^2) : (-3)$

A3. La temperatura en Villalar de los Comuneros, el 25 de diciembre a las 6 de la mañana es de -4°C. Durante el día la temperatura sube hasta los 8° C a las seis de la tarde.

A) ¿Cuánto ha subido la temperatura en ese periodo de tiempo?

B) Haz una estimación de cuánto ha subido la temperatura cada hora.

C) Calcula la temperatura el ese mismo día a las 11 de la noche si ha descendido 10°C respecto a la temperatura a las 6 de la tarde. E indica cuánto ha descendido la temperatura cada hora.

A4. Representa en la recta numérica y ordena de menor a mayor:

- Valentina Tereshkova se convierte en la primera mujer en el espacio: 1963 después de Cristo.

- Nace Mileva Maric que colaboró con Einstein en el desarrollo de la Teoría de la Relatividad. 1875 después de Cristo.

- Nace Teano, primera mujer matemática conocida en el mundo occidental: 546 antes de Cristo.

- Nace Hildegard de Bingen, Científica, humanista y Teóloga. 1098 después de Cristo.

- Nace Merit Ptah, en Egipto. Primera mujer científica conocida, 2700 antes de Cristo.

A5. Relaciona cada número entero con la frase o frases que le correspondan:

-13	Es el número de mayor valor absoluto.
-20	Es el menor de los números.
0	Es opuesto de otro de los números
-25	Es el mayor de los números.
16	Es el resultado de sumar dos de los números
13	Su opuesto es mayor que el mayor de los números.

SOLUCIÓN A1:

En este problema hay que proponer una situación relacionada con la altura. El niño salta desde una altura concreta, por ejemplo 1 metro, y llega a una profundidad por ejemplo de 2 metros. Se puede preguntar por la longitud recorrida, que sería la diferencia entre 1 y -2, $1 - (-2) = 1 + 2 = 3$.

SOLUCIÓN A2:

a) $25 - \underline{32 : (-4)} + (-13)$

$= 25 - (-8) + (-13)$

$= \underline{25 + 8} - 13$

$= 33 - 13$

$= 20$

b) $(-10) - (-7) + (-12) : 4$

$= (-10) - (-7) + \underline{(-12) : 4}$

$= (-10) - (-7) + (-3)$

$= -10 + \underline{7 - 3}$

$= -10 + 4$

$= -6$

c) $\underline{(5 - 7)^3} \cdot 4 + \underline{((-18) + (-2))} : (-2)^2$

$= \underline{(-2)^3} \cdot 4 + (-20) : \underline{(-2)^2}$

$= \underline{(-8) \cdot 4} + \underline{(-20) : 4}$

$= -32 + (-5)$

$= -37$

d) $\underline{(-2)^2} - \underline{(-2)^2} + \underline{(-2)^3} - \underline{2^3}$

$= \underline{4 - 4} + \underline{(-2) - 8}$

$= 0 + (-10)$

$= -10$

e) $(-18 - (\underline{18 + (-9)})^2) : (-3)$

$= (-18 - (\underline{9})^2) : (-3)$

$= \underline{(-18 - 81)} : (-3)$

$= (-99) : (-3) = 33$

SOLUCIÓN A3:

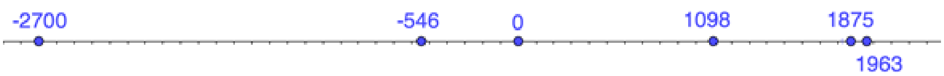
A) 8 – (-4) = 8 + 4 = 12. Ha subido 12°C.

B) Son 12°C en total en 12 horas (de las 6 de la mañana a las 6 de la tarde), así que dividiendo se obtiene un grado por hora.

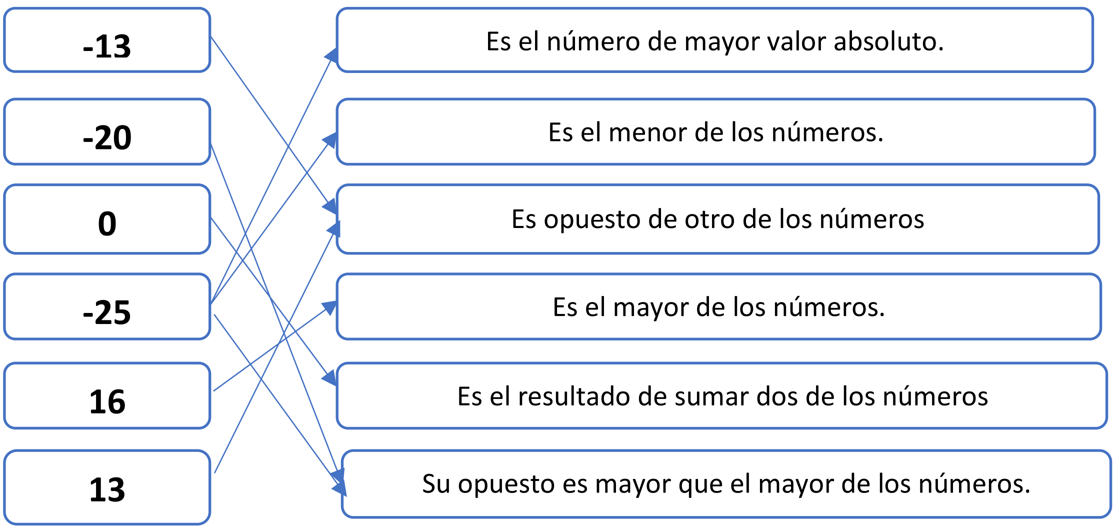
C) 8 – 10 = -2. A las 11 de la noche hay -2°C.

Como el descenso de 10°C se produce en 5 horas (de las 6 a las 11) entonces (-10) : 5 = -2, lo que significa que desciende 2°C cada hora.

SOLUCIÓN A4



SOLUCIÓN A5



Fracciones y decimales

ÍNDICE

PROBLEMAS QUE VAMOS A RESOLVER

1.- Quedan 5,6 segundos para el final del partido. El equipo visitante pierde de 1 punto, 75-74. Hay que hacer falta o la derrota es segura.

El entrenador pide tiempo muerto.

—Si no hacemos falta, el equipo rival dejará pasar los 5 segundos que quedan y perderemos el partido. Si hacemos falta, aunque metan los tiros libres tendremos opciones de empatar o ganar. ¿Pero a qué jugador hacemos la falta? ¿Cuál es la mejor opción? —dice el entrenador

Los ayudantes traen las estadísticas de los jugadores del equipo rival. El jugador número 1 ha anotado 7 tiros libres de los 12 que ha intentado, el jugador 2 ha encestado 6 de 10 y el jugador 3 ha encestado 4 de 7 intentos.

—El que más ha fallado es el número 1—dice el entrenador—. Ha fallado cinco tiros, hagámosle la falta a él.

—También es el que más tiros ha anotado—argumenta el segundo entrenador—. Ha metido 7. Hay que hacer falta al jugador 3, que es el que menos tiros lleva encestados. Solo ha metido 4.

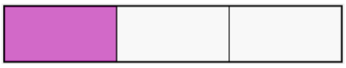
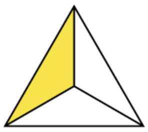
—Pues yo creo que hay que hacer la falta al jugador 2— dice el capitán del equipo.

¿Cuál es la mejor opción?

¿QUÉ SABES DE ...?

ENCUENTRA EL INTRUSO	
$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{6}$
$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{6}$

ENCUENTRA EL INTRUSO	
$\frac{1}{2}$	$0,5$
	$0,2$

ENCUENTRA EL INTRUSO	
	
	

ENCUENTRA EL INTRUSO	
	
SU PRODUCTO FAVORITO, 450 GR. 2,95 EUROS EL KG SALE A 6,55 €	

1. PARTIENDO LA UNIDAD

RETOS

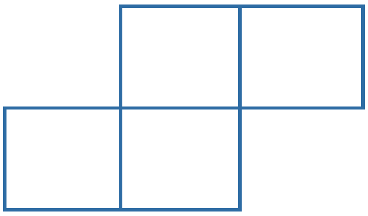
A) Juan y Belén han comprado una pizza, que cortan en cinco partes iguales para comerse una Juan y tres Belén. Dibuja lo que se come cada uno.

Su padre llega con otra pizza cortada en 10 trozos iguales y les dice que tomen la misma parte de pizza que han comido antes ¿cuántos trozos tiene que coger cada uno?

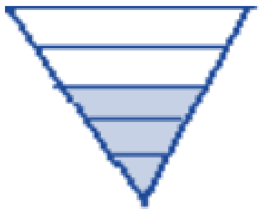
¿Qué relación hay entre lo que ha comido Belén y Juan?

¿Qué relación hay entre lo que se ha comido Belén y la pizza entera?

B) Tenemos la siguiente figura irregular y nos gustaría dibujar 2/3 de ella ¿Cómo podrías hacerlo? ¿Hay una forma única?



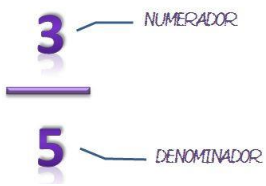
C) Dos hermanos se tienen que repartir un cucurucho de palomitas. El mayor de ellos propone el reparto indicado en la siguiente figura, explicando que él se comerá la parte sombreada, los 3/5 de las palomitas "ya que es el mayor" ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? ¿Cuál crees que sería el reparto más justo? Dibújalo. A partir de aquí, enuncia qué debe de cumplirse al representar fracciones.



APRENDE Y APLICA

En muchas situaciones cotidianas surge la necesidad de ***dividir una unidad*** (como la pizza del reto) en partes iguales. Con los conjuntos numéricos vistos hasta ahora no podemos representar esa información. Algunas situaciones serían: el tiempo en un partido de baloncesto se divide en 4 tiempos iguales, los cuartos; para repartir una tarta hay que dividirla, si por ejemplo se dividen en 6 partes iguales cada trozo es un sexto de la tarta; al comparar lo que se ha comido Belén con lo que se ha comido Juan vemos que Juan se ha comido la tercera parte de lo que se ha comido Belén; al medir una mesa necesitamos dividir el metro en partes iguales porque no siempre tenemos una cantidad entera de metros, así que dividimos en 100 partes iguales, los centímetros, y podemos decir que una mesa por ejemplo mide 132 centímetros. Todas estas situaciones se representan numéricamente con unas expresiones que llamamos "fracciones".

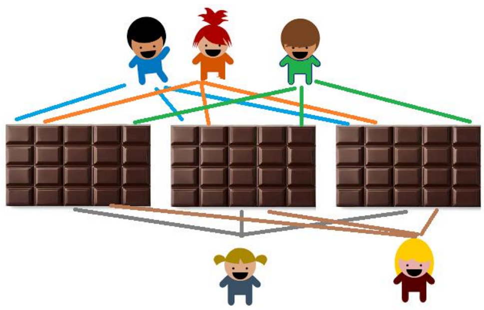
Una ***fracción*** es una expresión de la forma a/b donde a y b son números enteros, con b distinto de cero. El número a se llama ***numerador*** y el número b se llama ***denominador.*** Por ejemplo, en el reto Belén se ha comido 3 trozos de los 5 en que se ha dividido la pizza, por lo que se dice que Belén se ha comido los "tres quintos" de la pizza y se escribe 3/5. En este tipo de situaciones el denominador expresa el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad y el numerador expresa el número de partes que tomamos. Si al medir una mesa obtenemos 132 centímetros, tenemos 132/100, que son 132 partes de esas 100 en las que se divide el metro.



Fíjate que el numerador puede ser menor que el denominador, en cuyo caso se llama ***fracción propia*** y representa algo más pequeño que la unidad, por ejemplo, tres octavos de una tarta no llegan a una tarta entera, suponen dividir la tarta en ocho partes y tomar tres de ellas. Pero también podría ser el numerador mayor que el denominador, y se llamaría ***fracción impropia***, lo que supone que es mayor que la unidad. Por ejemplo, diez sextos de una pizza, que es más de una pizza, de hecho, es una pizza y cuatro sextos de otra. Estas fracciones se pueden escribir también como suma de un entero (las unidades enteras) y una fracción propia (menor que la unidad). A esta expresión se le llama ***número mixto.*** La forma de escribirlo sería:

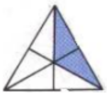
$$\frac{10}{6} = 1 + \frac{4}{6} = 1\frac{4}{6}$$

Se puede interpretar la fracción como parte de un todo. Por ejemplo, si tenemos 5 globos y 2 son rojos, la fracción de globos rojos es de dos quintos, 2/5. En este caso el denominador indica el número que representa el total y el numerador el que representa la parte.

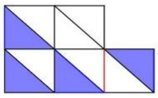


Otra idea de fracción puede ser la de reparto. Si se quiere repartir una unidad entre varias partes, las fracciones indican perfectamente la cantidad que le corresponde a cada uno. Por ejemplo, si se tienen tres tabletas de chocolate a repartir entre cinco personas, a cada persona le corresponderán tres quintos de tableta.

Cuando se quiere *representar una fracción gráficamente*, aspecto muy útil para resolver problemas visualizando los datos, se pueden utilizar varias formas: se puede representar con figuras geométricas (un círculo, un cuadrado, etc.) o mediante partes de un conjunto. Para representarlas *mediante figuras geométricas*, se debe dividir dicha figura en tantas partes iguales como indica el denominador. La fracción vendrá representada al marcar las partes que indica el numerador. Las dos fracciones siguientes indican la parte sombreada de las figuras geométricas.

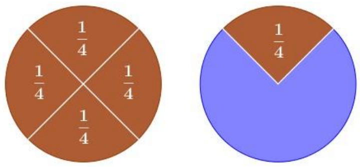


2/6



4/10

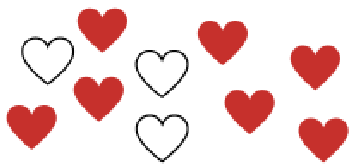
Fíjate en que al representar fracciones impropias será necesario dibujar más de una figura geométrica. La fracción correspondiente a la parte roja sería:



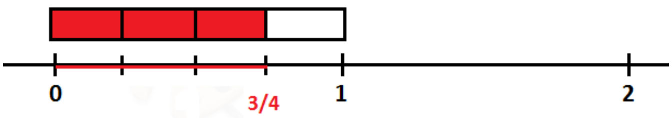
1+1/4=5/4

Para *representar fracciones por medio de conjuntos* debemos dibujar el conjunto con sus elementos. La cantidad de elementos del conjunto corresponde al denominador y la cantidad apartada o destacada corresponde al numerador.

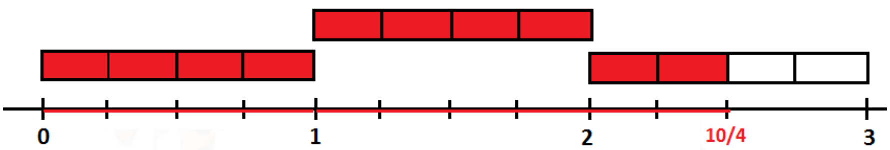
7/10 de los corazones están coloreados



Representación de fracciones en la recta numérica. Al igual que los números enteros, las fracciones también representan cantidades, puntos en la recta numérica. Si la fracción es propia, siempre estará representada entre 0 y 1. Se divide la unidad en tantas partes como indique el denominador y se señalan las partes que indica el numerador.



Si la fracción es impropia, se transforma en un número mixto. La parte entera me indicará a partir de qué unidad se ha de representar la fracción. Por ejemplo, 10/4= 2+2/4= 10 2/4. Desde el 2, se divide la unidad en 4 y se señalará el segundo cuarto. Ahí estará 10/4.



PRACTICA

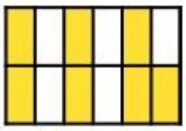
1.1.- En una clase de 30 alumnos, 16 cursan tecnología y el resto música. ¿Qué fracción representa a los alumnos que cursan cada una de las materias?

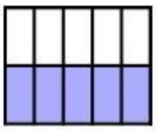
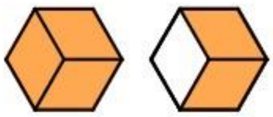
1.2.- Si de una garrafa 5 litros de agua le quitamos 3 litros, ¿cuál es la fracción que representa la cantidad de agua que queda en la garrafa?

1.3.- Completa el siguiente cuadro:

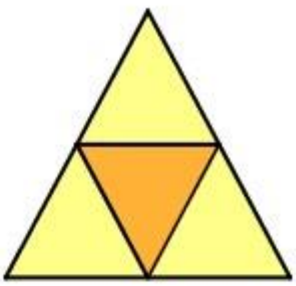
	3/5	*46/25*	*3+2/7*	*27/14*	*7/10*
Numerador					
Denominador					
Propia/Impropia/ Número mixto					
Se lee …					

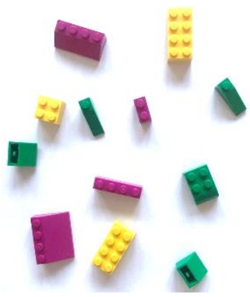
1.4.- ¿Qué fracciones asociarías a las siguientes gráficas? Escribe dos fracciones para cada gráfica y explica qué es lo que representan.



1.5.- ¿Dónde está 3/4? En las siguientes imágenes explica por qué aparece representada la fracción 3/4.





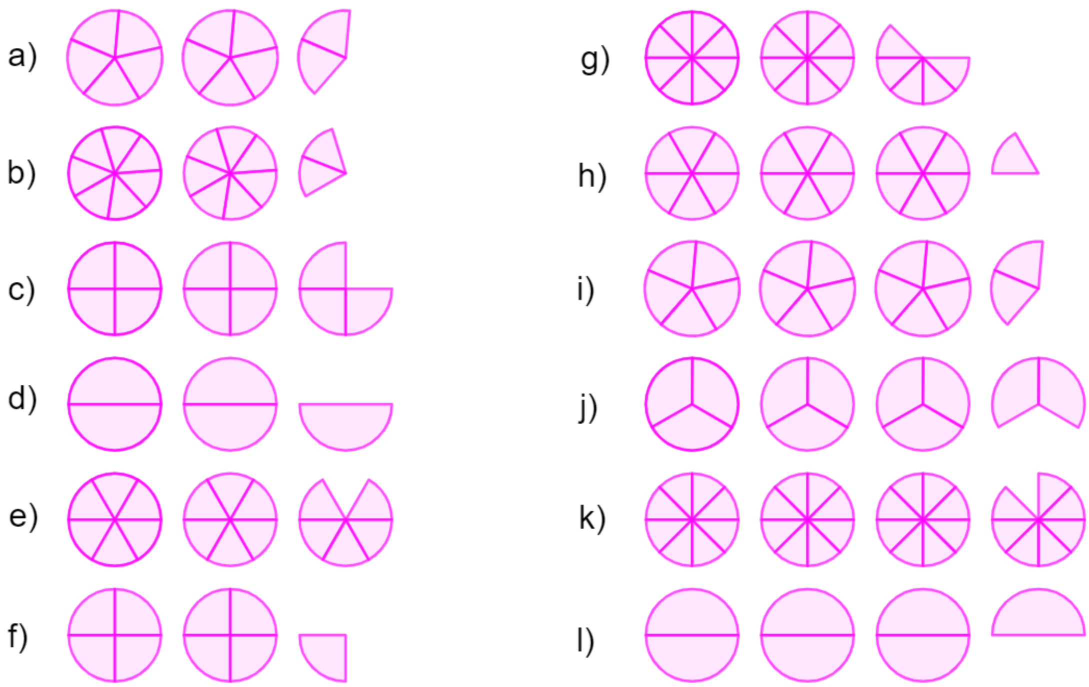
1.6.- Prueba, utilizando la recta numérica, las siguientes desigualdades:

$1 < {}^{3}/_{2} < 2$

$3 < {}^{17}/_{5} < 4$

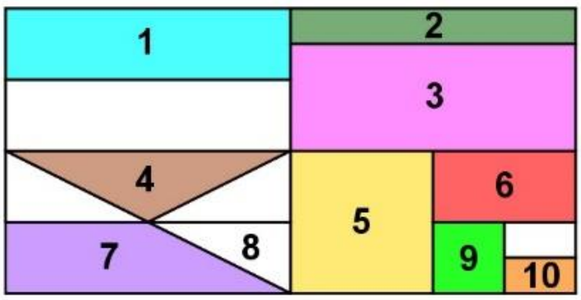
1.7.- La figura que ves a la derecha representa los 3/5 de una unidad ¿Puedes dibujar la unidad completa?

1.8.- Escribe las siguientes representaciones como número mixto y como fracción impropia



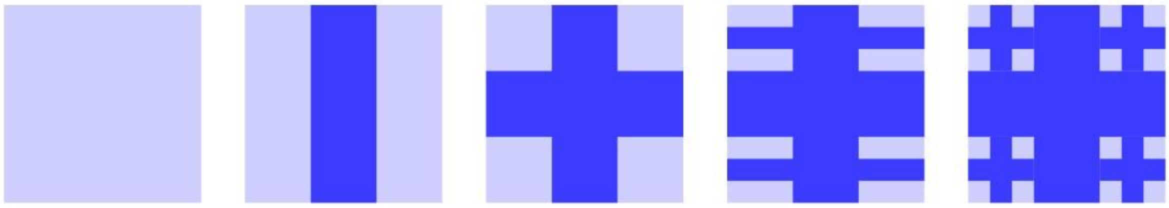
1.9.- El rectángulo grande de la figura está dividido en una serie de cuadriláteros y triángulos más pequeños.

¿Qué fracción corresponde a cada una de las 10 figuras numeradas?



1.10.- ¿CUÁL ES EL PATRÓN?

Para cada uno de los cinco cuadrados, escribe el área del cuadrado azul claro como una fracción.



¿Puedes averiguar cómo se verían los siguientes dos diagramas? ¿Qué fracción de estos cuadrados será azul claro?

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

2. REPARTIENDO CANTIDADES

RETOS

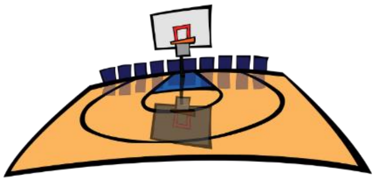
A) Resuelve gráficamente: *En la frutería hay 20 sandías, si se venden tres cuartos del total ¿Cuántas sandías se habrán vendido?*

B) Resuelve gráficamente: *En la frutería se han vendido 12 manzanas, que se corresponden con las 3/4 partes del total de manzanas que había al principio. ¿Cuántas manzanas había en total?*

APRENDE Y APLICA

Fracción de una cantidad. En el apartado A del reto inicial vemos que, en ocasiones, conocemos la cantidad que representa un total y queremos calcular a cuánto equivale una determinada fracción: conocemos el número total de sandías y queremos calcular cuántas equivalen a ¾. Entendiendo bien esta idea, se puede hacer el paso contrario, conocida la cantidad de una fracción, se puede calcular el total como en el reto B: sabemos que 12 manzanas son ¾ y queremos conocer el total.

Cálculo del parte conocido el total. Imaginad que somos 125 alumnos en nuestro instituto, y que $^2/_5$ partes de ellos juegan a baloncesto. Para calcular cuántos de nuestros alumnos juegan a baloncesto hacemos 5 grupos iguales.



25	**25**	**25**	**25**	**25**

Total: 125

- Cada grupo (en este caso, cada quinto) tiene 25 alumnos.
- Los alumnos que juegan a baloncesto se concentran en dos de los grupos.
- En total son 50 alumnos los que juegan a baloncesto.

$$\frac{2}{5}\ de\ 125 = 50$$

El cálculo que hemos hecho es el siguiente:

$$\frac{2}{5}\ de\ 125 = 50$$

$$125 : 5 = 25$$

Se divide la cantidad entre 5, el denominador de la fracción, para ver qué cantidad corresponden a cada parte.

$$25 \cdot 2 = 50$$

Se multiplica el resultado por 2, el numerador de la fracción, porque es el que indica el número de partes que se consideran.

Cálculo del total conocida una parte. Pedro ha recorrido en bici 6 km que son los 3/5 de su camino al colegio ¿Cuántos kilómetros hay de su casa al colegio? En este caso, lo que nos dicen es que, si se divide el camino en 5 partes, 3 de esas partes equivalen a 6 km.

2	**2**	**2**		

Parte sombreada: 6 km

- Si esas tres partes equivalen a 6 km, quiere decir que cada parte (1/5 del total) equivaldrá a 2 km (6:3=2 km).
- Como el total son 5 partes, el total de la distancia de su casa al colegio será 10 km.

2. REPARTIENDO CANTIDADES

El cálculo que hemos hecho es

$\frac{3}{5}$ *de* $x = 6$

$6 : 3 = 2$

Se divide la cantidad entre 3, el numerador de la fracción, para ver qué cantidad corresponden a una parte (un quinto).

$2 \cdot 5 = 10$

Se multiplica el resultado por 5, el denominador de la fracción, porque es el que indica el número de partes totales.

Calcular la ***fracción de una cantidad*** equivale a dividir esa cantidad en partes iguales, las que indica el denominador, y la cantidad que representa cada parte multiplicarla por el número de partes escogidas, que es lo que indica el numerador.

PRACTICA

2.1.- En una bolsa de 42 bolas, 1/3 son blancas, 2/7 son naranjas y el resto verdes. ¿Cuál es el color que más aparece? Calcula cuántas hay de cada color.

2.2.- Tengo 294 euros ahorrados, y quiero donar 5/6 de esta cantidad a la ONG de mi barrio. ¿Cuánto dinero me quedará?

2.3.- Calcula:

a) $\frac{3}{4}$ de 28 = b) $\frac{7}{10}$ de 90 = c) $\frac{2}{3}$ de 36 =

d) $\frac{1}{6}$ de 12 = e) $\frac{5}{7}$ de 49 = f) $\frac{4}{8}$ de 80 =

2.4.- Calcula:

a) $\frac{3}{5}$ de ….. = 9 b) $\frac{2}{3}$ de…. = 24 c) $\frac{4}{7}$ de ….. = 40

d) $\frac{5}{11}$ de ….. = 30 e) $\frac{2}{5}$ de …… = 10 f) $\frac{9}{10}$ de ….. = 90

2.5.- En una clase hay 12 chicas y 6 chicos. ¿Qué fracción del total le corresponde a cada uno?

Divide un círculo en dos sectores que representen las fracciones anteriores calculando el ángulo correspondiente. Recuerda que el círculo completo tiene 360°.

3. FRACCIONES EQUIVALENTES

RETOS

A) Un grupo de 48 alumnos de un instituto de Palencia viaja de intercambio a Londres en un avión de pasajeros de 240 plazas. El avión tiene 40 filas de asientos y en cada fila hay 6 asientos. Uno de los alumnos, el típico listillo que se ha leído por encima el tema de fracciones y quiere impresionar a una compañera con sus conocimientos, le dice:

—Los de Palencia ocupamos 8 filas de las 40 del avión, luego somos los $\frac{8}{40}$ *del total de pasajeros.*

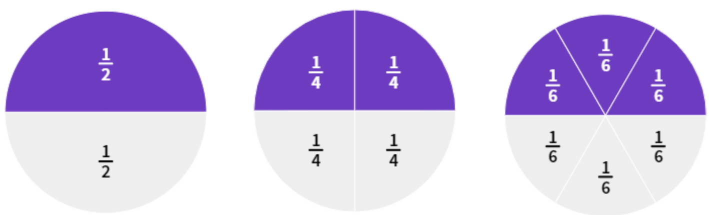
Pero la alumna en cuestión también sabe de fracciones e incluso, en ocasiones señaladas, hace los deberes de matemáticas. Después de meditar largo rato, le responde:

—Te equivocas, los de Palencia somos 48 seres humanos y hay 240 plazas de avión, luego somos los $\frac{48}{240}$ *del total de pasajeros.*

¿Quién tiene razón?

APRENDE Y APLICA

Dos fracciones son ***equivalentes*** si representan la misma cantidad.



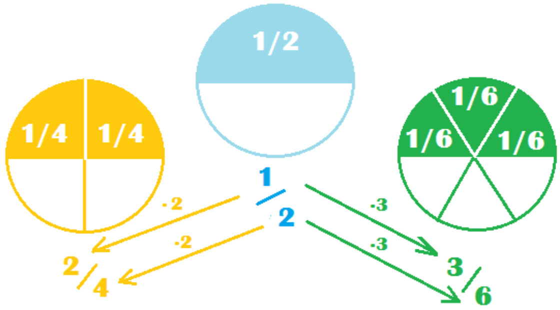
¿Cómo podemos obtener fracciones equivalentes? Se puede distinguir dos formas:

Amplificación: Multiplicamos numerador y denominador por un mismo número distinto de 0 y obtenemos fracciones equivalentes.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{10}{15} = \frac{200}{300} = \frac{1000}{1500} = \cdots$$

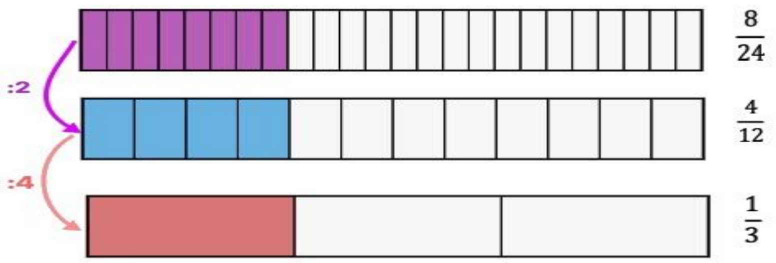
3. FRACCIONES EQUIVALENTES

Equivale a dividir las partes en partes más pequeñas. Como vemos hay infinitas fracciones amplificadas equivalentes a una dada, tantas como números por los que es posible multiplicar el numerador y el denominador.



Simplificación: Si numerador y denominador son múltiplos de un mismo número, se puede dividir entre ese número y obtenemos una fracción equivalente.

$$\frac{8}{24} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$



Cuando una fracción no se puede simplificar más, se llama ***irreducible***. Por ejemplo, 2/3 es irreducible pues no se puede dividir el numerador y el denominador entre ningún número salvo la unidad. Si dividimos numerador y denominador entre el máximo común divisor de ambos, se obtendrá directamente la fracción irreducible.

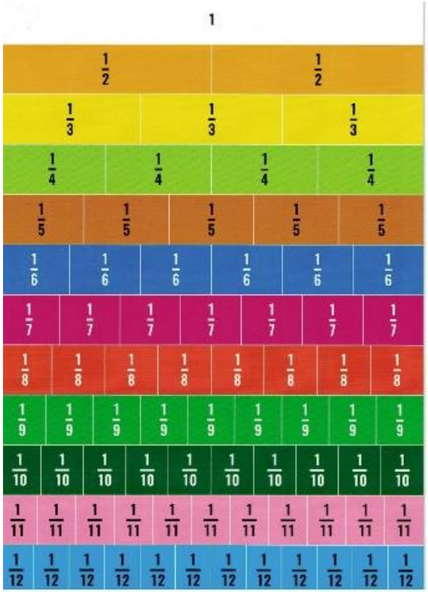
PRACTICA

3.1.- Utilizando el muro de fracciones, encuentra fracciones equivalentes a las siguientes:

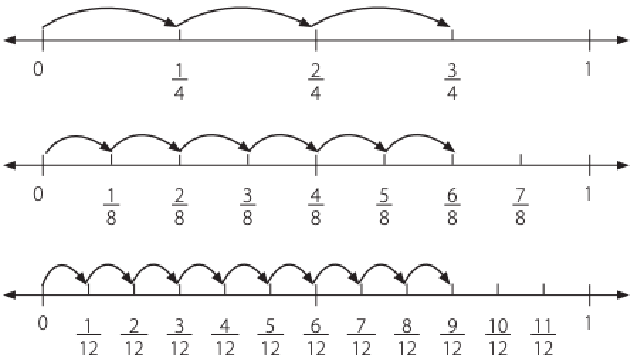
a) $\frac{1}{3} = \frac{2}{} = \frac{3}{} = \frac{}{12}$

b) $\frac{3}{4} = \frac{}{} = \frac{}{}$

c) $\frac{1}{2} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$



3.2.- Encuentra en la recta numérica fracciones equivalentes. Luego, completa el texto:



a) Las fracciones equivalentes a ¼ representadas en las rectas anteriores son …….
b) Las fracciones equivalentes a ……. son 4/8 y …….
c) Las fracciones ¾, ……. y ……. son equivalentes

3.3.- Busca la fracción irreducible correspondiente a las siguientes fracciones. Indica entre qué número divides

$\frac{15}{35} =$ $\frac{6}{4} =$ $\frac{28}{21} =$ $\frac{120}{72} =$

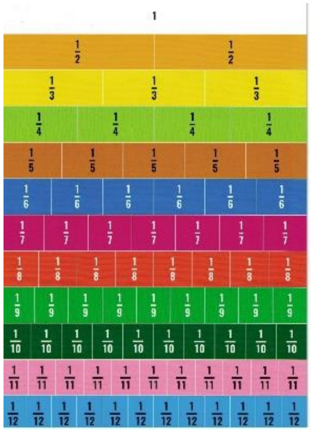
3.4.- Escribe dos fracciones que sean equivalentes y halla la fracción irreducible de cada una de ellas. ¿Qué podemos decir de las fracciones irreducibles de dos fracciones equivalentes?

3.5.- ¿Cuál es la fracción equivalente a 2/3 que tiene por denominador 21?

4. COMPARAMOS FRACCIONES

RETOS

A) En un concurso de preguntas y respuestas, uno de los concursantes ha acertado 19 de las 30 respuestas, mientras que el segundo ha acertado 15 de las 25 respuestas. ¿Cuál ha conseguido un mejor resultado? ¿Quién merece el premio?



B) Utiliza las piezas del muro de fracciones para ordenar de menor a mayor las siguientes fracciones:

5/7; 2/7; 1/8; 2/5; 2/8

¿En qué casos es más fácil comparar fracciones? Explica cómo las has comparado.

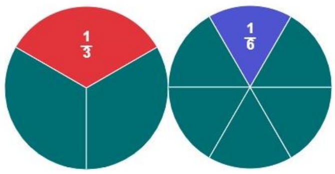
APRENDE Y APLICA

Podemos decir que una ***fracción positiva es mayor que otra*** si la cantidad que representa es mayor.

En el reto B habrás observado que es más fácil ***ordenar fracciones con el mismo denominador*** que con distinto denominador. Está claro que, si tú comes 2/6 de una pizza y tu hermana 5/6 de esa pizza, tu hermana está comiendo más que tú. Así, la fracción será mayor cuanto mayor sea el numerador (ya que las partes son iguales).

Para comparar fracciones con mismo numerador será menor la fracción con mayor denominador, ya que las partes son más pequeñas cuando la unidad se ha dividido en más partes.

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$$



En el caso de tener numerador y denominador distintos, siempre se pueden encontrar fracciones equivalentes con el mismo denominador. Al procedimiento de conseguir estas fracciones se le denomina ***reducción a común denominador***. Para ello, se calcula un múltiplo común a ambos denominadores, normalmente el mínimo común múltiplo de los denominadores, para que sea lo más pequeño posible. Ese número es el denominador buscado y sólo falta multiplicar numerador y denominador de las fracciones por el número adecuado.

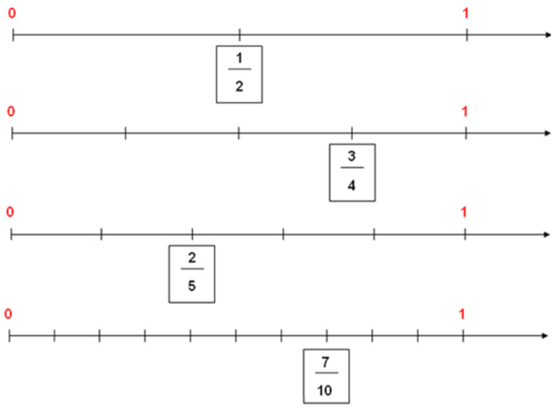
$$\frac{13}{20} \underset{\xrightarrow{\cdot 3}}{\overset{\xrightarrow{\cdot 3}}{=}} \frac{39}{60}$$

m.c.m (20, 15)=60

$$\frac{8}{15} \underset{\xrightarrow{\cdot 4}}{\overset{\xrightarrow{\cdot 4}}{=}} \frac{32}{60}$$

Orden en la recta. Otra forma de comparar fracciones, sin necesidad de reducción a común denominador, es representarlas en la recta. Recuerda que será mayor la fracción que se encuentre más a la derecha. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} > \frac{7}{10} > \frac{1}{2} > \frac{2}{5}$$



PRACTICA

4.1.– Ordena las siguientes fracciones reduciendo a común denominador:

a) $½, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

c) $1, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}$

b) $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{10}$

d) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{15}$

4.2.– Escribe:

a) Dos fracciones mayores que tres octavos, cuyo denominador sea igual a 8 y que sean menores que la unidad.

b) Dos fracciones menores que siete tercios cuyo denominador sea 3 y que sean mayores que la unidad.

4.3.- Compara las siguientes fracciones:

$\frac{3}{4} \bigcirc \frac{1}{4}$	$\frac{5}{7} \bigcirc \frac{6}{7}$	$\frac{2}{10} \bigcirc \frac{8}{10}$
$\frac{2}{6} \bigcirc \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} \bigcirc \frac{5}{8}$	$\frac{5}{18} \bigcirc \frac{1}{3}$
$\frac{4}{5} \bigcirc \frac{22}{25}$	$\frac{5}{6} \bigcirc \frac{33}{42}$	$\frac{80}{100} \bigcirc \frac{4}{5}$
$\frac{15}{21} \bigcirc \frac{4}{7}$	$\frac{4}{16} \bigcirc \frac{12}{24}$	$\frac{36}{81} \bigcirc \frac{18}{27}$

4.4.- Encuentra el camino para llegar al número pi marcando comparaciones que sean correctas. Empieza por la casilla señalada de rojo.

$\frac{3}{7} > \frac{1}{7}$	$\frac{11}{12} < \frac{9}{16}$	$\frac{5}{6} > \frac{9}{10}$	$\frac{23}{31} < \frac{1}{8}$	$\frac{3}{4} > \frac{6}{5}$	$\frac{2}{7} < \frac{4}{29}$	$\frac{29}{35} < \frac{10}{21}$	$\frac{1}{2} > \frac{33}{43}$
$\frac{9}{3} < \frac{2}{9}$	$\frac{18}{3} > \frac{2}{3}$	$\frac{7}{13} < \frac{7}{9}$	$\frac{6}{7} < \frac{24}{43}$	$\frac{3}{16} > \frac{2}{3}$	$\frac{25}{47} < \frac{1}{3}$	$\frac{9}{13} > \frac{7}{6}$	$\frac{4}{13} > \frac{11}{15}$
$\frac{15}{23} > \frac{11}{14}$	$\frac{1}{2} > \frac{25}{29}$	$\frac{15}{30} < \frac{15}{22}$	$\frac{10}{11} < \frac{11}{17}$	$\frac{3}{4} > \frac{4}{5}$	$\frac{45}{46} < \frac{37}{46}$	$\frac{3}{25} > \frac{21}{37}$	$\frac{3}{26} > \frac{19}{29}$
$\frac{4}{5} < \frac{6}{23}$	$\frac{10}{37} < \frac{28}{37}$	$\frac{29}{29} > \frac{1}{2}$	$\frac{8}{15} > \frac{3}{5}$				$\frac{37}{44} < \frac{1}{3}$
$\frac{29}{23} > \frac{6}{23}$	$\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$	$\frac{7}{10} > \frac{3}{4}$	$\frac{7}{10} > \frac{25}{31}$				$\frac{11}{12} < \frac{9}{16}$
$\frac{4}{32} < \frac{1}{2}$	$\frac{5}{6} > \frac{9}{10}$	$\frac{23}{31} < \frac{18}{25}$	$\frac{2}{7} < \frac{4}{29}$				$\frac{29}{35} > \frac{10}{21}$
$\frac{20}{5} > \frac{8}{4}$	$\frac{7}{3} > \frac{7}{15}$	$\frac{32}{23} > \frac{32}{41}$	$\frac{20}{10} < \frac{22}{10}$				$\frac{1}{2} > \frac{33}{43}$

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

5.-OPERAMOS CON FRACCIONES

RETOS

RESUELVE LAS SIGUIENTES SITUACIONES GRÁFICAMENTE.

A) Tenemos una caja de bombones. Álvaro se ha comido 5/12 de los bombones y Miguel 2/12. Posteriormente, Ana se come 1/6 de los bombones ¿Qué fracción se han comido entre los tres? ¿Qué fracción de bombones se ha comido más Álvaro que Miguel?

B) Una quinta parte de la basura doméstica que se genera en España son desechos de papel y cartón. De estos, tres cuartas partes se reciclan.

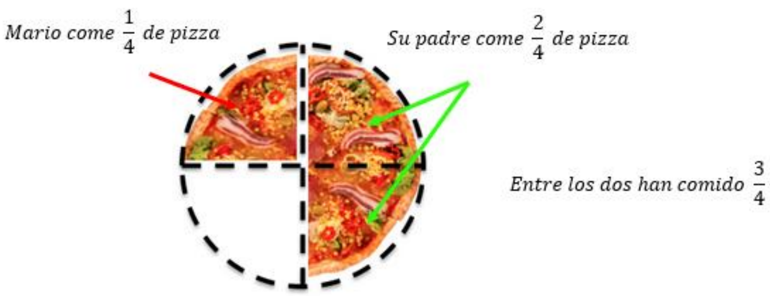
¿Qué fracción de la basura doméstica acaba como papel reciclado?

C) Queremos meter 5 litros de aceite en botellas de 1/2 l ¿Cuántas botellas llenaremos? ¿Y si queremos meter los 5 litros en botellas de ¾ l de aceite?

APRENDE Y APLICA

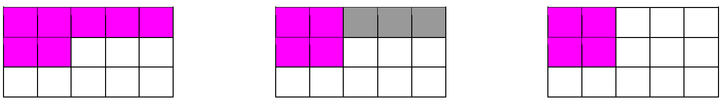
Suma y resta de fracciones con igual denominador. Al resolver el reto A, habrás visto que se dan dos situaciones diferentes: sumar fracciones con mismo denominador y con distinto denominador. Veamos dos ejemplos:

Tenemos una pizza redonda que hemos dividido en 4 porciones iguales. Mario come una porción y su padre come dos porciones. ¿cuánta pizza han comido?



Hemos pintado siete partes de las quince que tiene un mural y se han secado tres, ¿cuántas quedan por secarse?:

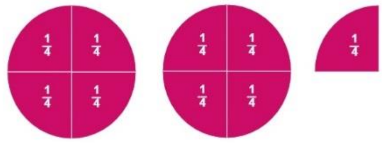
$$\frac{7}{15} - \frac{3}{15} = \frac{4}{15}$$



Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador se suman o restan los numeradores y el denominador no cambia.

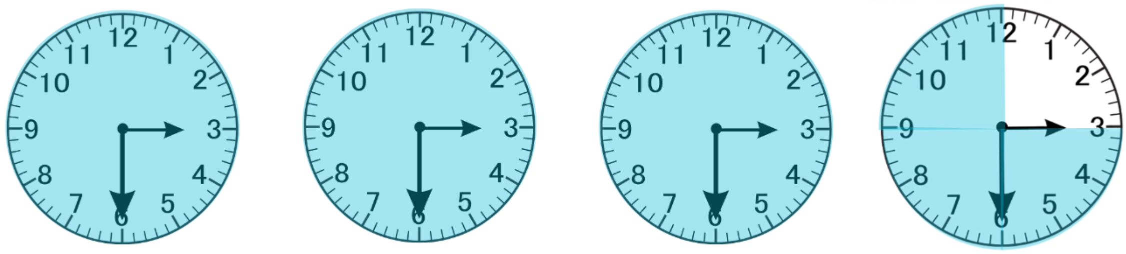
Paso de una fracción impropia a un número mixto. Para escribir una fracción impropia como un número mixto, dividimos numerador entre denominador. El cociente entero será el número de partes enteras del número mixto. El resto de la división será el numerador de la fracción propia resultante.

Por ejemplo, si queremos escribir como número mixto la fracción 9/4, el proceso será: ¿Cuántos 4/4 tengo? Si hago la división entera veré que el cociente es 2 (dos 4/4, es decir, 2 unidades) y me sobra 1/4.



Paso de número mixto a fracción impropia. Se dividirá la fracción en tantas partes como indique el denominador de la fracción impropia. El número de partes totales indicará el numerador de la fracción impropia. Por ejemplo, ¿cuántos cuartos de hora hay en tres horas y tres cuartos?:

$$\mathbf{3\frac{3}{4}=\frac{12}{4}+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}}$$



PRACTICA

5.1. Escribe como fracción impropia. Haz la representación:

a) $6+\frac{1}{2}=$ b) $4+\frac{1}{3}=$ c) $1+\frac{4}{5}=$ d) $8+\frac{5}{6}=$

5.2. Escribe como número mixto. Haz la representación:

a) $\frac{7}{2}=$ b) $\frac{17}{3}=$ c) $\frac{8}{5}=$ d) $\frac{19}{6}=$

5.3 Construye el siguiente dominó y une cada número mixto con su fracción impropia correspondiente.

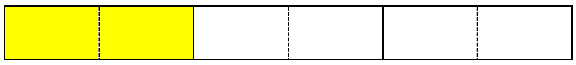
$\frac{8}{3}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{36}{16}$	$2+\frac{8}{16}$	$\frac{40}{16}$	$2+\frac{2}{3}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{24}{16}$	$4+\frac{1}{3}$
$1+\frac{8}{16}$	$13+\frac{1}{2}$	$2+\frac{2}{3}$	$7+\frac{1}{2}$	$\frac{10}{3}$	$3+\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$	$2+\frac{4}{16}$	$1+\frac{4}{5}$	$\frac{9}{5}$

APRENDE Y APLICA

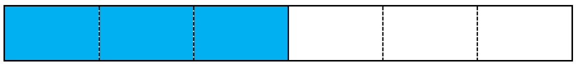
Suma y resta de fracciones con diferente denominador: ¿Qué pasa si queremos sumar cantidades que están formadas por partes distintas? Lógicamente, en principio no podemos ya que solo partes iguales pueden ser sumadas o restadas. Lo que se va a hacer será buscar una fracción equivalente de cada uno QUE TENGAN EL MISMO DENOMINADOR. Veamos un ejemplo.

Queremos juntar el agua que hay en dos depósitos iguales. Uno tiene $\frac{1}{3}$ de su volumen y el otro $\frac{1}{2}$ de su volumen. ¿Qué parte del volumen total se obtiene?

Solo puedo resolver esta suma si encuentro una forma de representar ambas fracciones de forma que las partes en las que divido la unidad son las mismas para ambas. A primera vista una posible solución es dividir en 6 partes iguales la unidad, puesto que tanto los tercios como los medios se pueden dividir para obtener sextos. Por tanto, utilizo el denominador común 6.



$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$



$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

Si ahora juntamos todas las partes, tenemos $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

Para sumar o restar fracciones con distinto denominador, se reducen a común denominador y se suman o restan las fracciones obtenidas.

PRACTICA

5.4. Isabel ha comprado una tarrina de mantequilla. Ha utilizado $\frac{1}{3}$ para hacer un bizcocho y $\frac{2}{5}$ para hacer unas galletas. ¿Qué fracción de tarrina de mantequilla le queda?

5.5. Alicia ha instalado un videojuego en su disco duro, que le ocupa 1/4 del disco; 1/3 del mismo está ocupado por aplicaciones.

Si le dedica 1/8 del mismo a guardar los correos electrónicos ¿qué fracción del disco duro le queda libre?

5.6. Resuelve las siguientes sumas:

a) $\frac{1}{60}+\frac{1}{30}-\frac{1}{15}=$ b) $\frac{1}{30}-1+\frac{3}{4}=$ c) $\frac{1}{11}-\frac{13}{22}-\frac{1}{4}+1=$

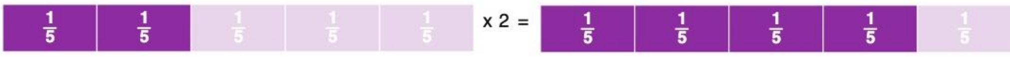
c) $\frac{11}{6}-\frac{7}{8}-\frac{17}{18}=$ d) $6+\frac{3}{7}-\frac{1}{14}=$

APRENDE Y APLICA

Multiplicación de fracciones. Para explicar la multiplicación de fracciones, partimos de varios ejemplos.

Ejemplo 1: *Si tengo dos quintas partes de dos botellas y las vuelco en otra botella igual ¿qué parte de la botella he llenado*?

Veamos gráficamente lo que pasa:

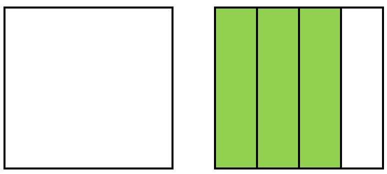


Por tanto, vemos que $2\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$

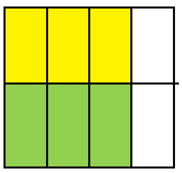
Vemos que hemos multiplicado el numerador por 2 y el denominador se deja igual, ya que la unidad (en este caso la botella), sigue estando dividida en quintos.

Ejemplo 2: *Rocío se ha comido 1/4 de un bizcocho. Después, su hermana Loreto se come la mitad de lo que ha quedado. ¿Qué fracción del bizcocho se ha comido Loreto?*

Dibujamos un rectángulo que representen la unidad, en nuestro caso, el bizcocho. Vemos que Rocío se ha comido 1/4. Por lo tanto, ha dejado 3/4 del bizcocho para Loreto (los pintamos).

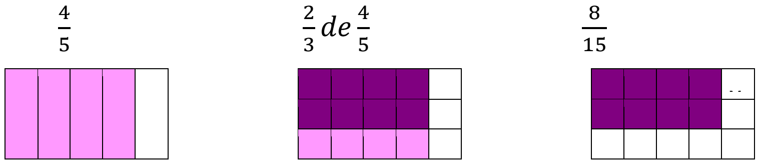


A continuación, dividimos en dos partes iguales la parte coloreada obteniendo 12 partes iguales de las que se han marcado 3. Esa parte representa ½ de $\frac{3}{4}$, que es lo que se ha comido Loreto.



Por tanto, vemos que ½ · ¾ es igual que $\frac{3}{8}$. Vemos que para hacer mitades de cuartos hemos dividido los cuartos en 2 partes iguales. Como había 4 cuartos, si se dividen en 2 cada cuarto, tendré en total 8 partes iguales (octavos). Hemos multiplicado los denominadores.

Ejemplo 3: *En casa de Rodrigo, cuatro quintas partes de los gastos mensuales se dedican a comida. De ellas, dos terceras partes se gastan en las tiendas del barrio ¿Qué parte de los gastos mensuales se queda en las tiendas del barrio?*



Al igual que en el caso anterior, vemos que para hacer tercios de quintos hemos dividido los quintos en tres partes iguales, por lo que se consiguen 15 partes (quinceavos). Hemos multiplicado los denominadores. Además, por cada 4 pares marcadas se han marcado de nuevo 2, de lo que resulta 8 en total. Hemos multiplicado también los numeradores.

Independientemente del método seguido observamos:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Para multiplicar fracciones se multiplican los numeradores y se divide por el producto de los denominadores.

Potencia de fracciones. A partir de la definición de potencia como producto de un mismo factor ¿podrías enunciar a qué es igual la potencia de una fracción?

PRACTICA

5.7. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $\frac{3}{10} \cdot \frac{20}{27}$ d) $\frac{36}{11} \cdot \frac{77}{9}$

b) $\frac{28}{15} \cdot \frac{50}{7}$ e) $\frac{51}{8} \cdot \frac{56}{17}$

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{34}{15}$ f) $11 \cdot \frac{3}{55}$

5.8.– Para el comedor del colegio han comprado 48 cajas de mandarinas.

Pero antes de las vacaciones, ven que sobran 3/16 de las cajas compradas y deciden donarlas al Banco de Alimentos de la ciudad ¿Cuántas cajas donaron?

FUNDACIÓN BANCO DE ALIMENTOS

5.9.– Una furgoneta de reparto carga 40 cajas de leche. Cada caja contiene 12 briks de tres cuartos de litro. ¿Cuántos litros de leche van en la furgoneta?

5.10.– En nuestro instituto 7/10 partes del terreno está ocupado por pistas polideportivas.

Del terreno restante, 1/4 está ocupado por el edificio propiamente y el resto es zona ajardinada. ¿Qué fracción del terreno está ajardinada?

5.11.– Si se congela, el agua aumenta su volumen en 1/10.
Si metes en el congelador una botella de 2 litros de capacidad, con un litro y medio de agua en su interior, ¿crees que explotará la botella?

Se llama ***inversa de una fracción***, a aquella que multiplicada por la original da como resultado la unidad. Se obtiene al intercambiar numerador y denominador. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{15}{15} = 1$$

Así que las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{3}$ son inversas.

APRENDE Y APLICA

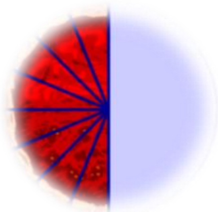
División de fracciones. Al igual que en la multiplicación de fracciones, partiremos de varios ejemplos.

Ejemplo 1: *Si tenemos media pizza y queremos repartirla entre 8 personas ¿cuánto le corresponderá a cada uno?*

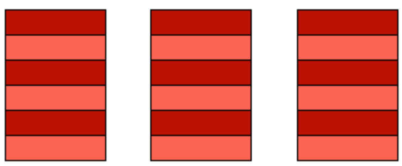
Vamos a verlo gráficamente: queremos repartir ½ entre 8 personas.

Se divide ese medio en 8 y obtenemos:

½ : 8 = 1/16



Ejemplo 2: *Julia quiere cortar para sus alumnos tres cartulinas en sextos para dar uno a cada alumno ¿Cuántos alumnos tendrá en clase Julia?*



Debemos realizar la operación $3 : \frac{1}{6}$

Si una cartulina la hemos dividido en 6 trozos iguales, en total con 3 cartulinas habrá 18 trozos.

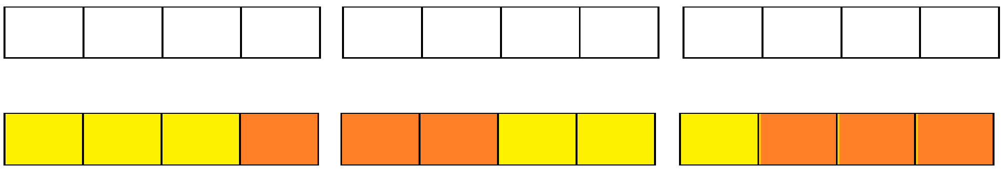
$$3 : \frac{1}{6} = 18$$

Vemos que es lo mismo dividir que multiplicar por la inversa de la fracción:

$$3 : \frac{1}{6} = 3 \cdot \frac{6}{1} = 18$$

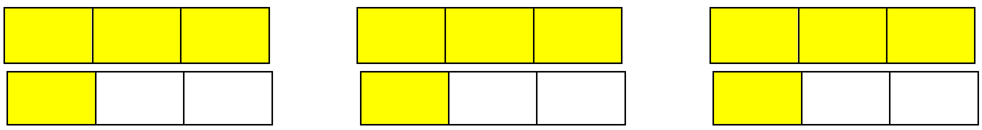
Ejemplo 3: *¿Cuántos botellines de ¾ de litro necesito para tener 3 litros de leche?*

Realizar esta división es lo mismo que responder cuántos grupos de $\frac{3}{4}$ hay en 3 unidades, que son 12/4. Lo comenzamos resolviendo gráficamente: Para realizar esta división, podemos tomar 3 rectángulos en blanco, cada uno de ellos representa la unidad. A continuación, dividimos cada uno en 4 cuarto, obteniendo 12 cuartos y hacemos grupos de 3 cuartos:



En total contamos 4 grupos de $\frac{3}{4}$. Con lo cual $\mathbf{3} : \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = 4$

Se comprueba gráficamente que coincide con $\mathbf{3} \cdot \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} = 4$



Para dividir fracciones se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

Operaciones combinadas. Cuando se resuelven operaciones combinadas con fracciones, la jerarquía de operaciones es la misma que con enteros o naturales:

- 1º Paréntesis.
- 2º Multiplicaciones y divisiones (si hay varias seguidas se hacen de izquierda a derecha)
- 3º Sumas y restas.

PRACTICA

5.12.- Realiza las siguientes divisiones:

a) $\frac{2}{5} : \frac{7}{8} =$

b) $\frac{3}{4} : \frac{5}{9} =$

c) $\frac{5}{12} : \frac{10}{4} =$

d) $\frac{2}{3} : 2 =$

e) $3 : \frac{1}{8} =$

f) $\frac{7}{5} : \frac{6}{9} =$

5.13.– Resuelve los siguientes problemas:

a) Con un contenedor de 12 litros,

¿cuántas botellas de 2 litros se pueden llenar?

¿cuántas botellas de medio litro se pueden llenar?

¿cuántas botellas de un litro y medio se pueden llenar?

¿cuántas botellas de ¾ de litro se pueden llenar?

b) ¿Qué fracción es la mitad de la mitad?

¿Qué *fracción es una quinta parte de una tercera?*

¿Qué fracción es dos tercios de un cuarto?

5.14.– Para realizar el proyecto de tecnología, en el instituto se han comprado tablas de longitud $\frac{4}{5}\,m.$ Si el profesor las ha cortado en trozos de $\frac{1}{10}\,m$ ¿cuántos trozos saca de cada tabla?

5.15.– En el aula taller nos hemos dado cuenta de que, con cada golpe de martillo, un clavo penetra ¾ de cm ¿cuántos golpes deberemos dar para que penetre 6 cm?

5.16.– Resuelve las siguientes operaciones expresando el resultado en forma irreducible.

a) $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\cdot 2 =$

b) $5-\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3} =$

c) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}+\frac{7}{6}\cdot\frac{3}{2} =$

d) $\left(6+\frac{7}{4}\right):3 =$

e) $\frac{11}{4}\cdot\frac{8}{3}:\left(1+\frac{1}{2}\right) =$

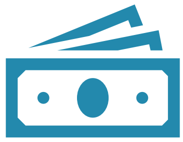
f) $\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right) =$

g) $\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\right) =$

h) $\left(\frac{1}{4}+3\right):\frac{1}{2} =$

6. EXPRESIONES DECIMALES

RETOS



A) Martina ha ido a visitar a sus abuelos esta semana y se ha vuelto con una suculenta propina de 10 euros y un montón de besos y achuchones.

Como tienen planeado para el fin de semana ir al cine con sus amigas, quiere calcular si tendrá suficiente para la entrada, palomitas y un refresco. La entrada cuesta 5,45 €, las palomitas 2,25€ y el refresco 1,75 €. ¿Tendrá suficiente con los 10 €? ¿Le sobrará algo?

B) En un concurso de televisión, tras finalizar la pregunta del presentador, los concursantes han apretado a la vez el pulsador. Tras recurrir al cronómetro digital han detectado que el concursante del equipo1 tardó 231 diezmilésimas de segundo en apretarlo y el concursante del equipo 2 tardó 0,0236 s ¿quién lo apretó antes?

C) Los alumnos de 1º de Bachillerato, tradicionalmente hacen un viaje a un país del extranjero. Este año han elegido ir a Reino Unido.

Como sabrás, en Reino Unido la moneda que hay es la libra esterlina. La equivalencia entre libra esterlina y euro es:

1 LIBRA ESTERLINA (GBP) =1,1996 EUROS.

Los alumnos quieren saber cuánto cuesta, en euros, algunos precios que vamos a manejar diariamente:

1 viaje en bus: 1,50 LIBRAS.

1 barra de pan: 0,82 LIBRAS.

1 plato de fish and chips: 4,5 LIBRAS.

¿Qué es lo que observas? ¿Podrías dar el precio en euros, teniendo en cuenta que solo existe la moneda hasta los céntimos de euro?

APRENDE Y APLICA

Los ***decimales*** están presentes en nuestra vida cotidiana. Al igual que las fracciones, aparecen cuando hay que dividir la unidad en partes más pequeñas. Aquí tenemos unos cuántos ejemplos:

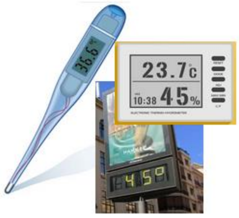
6. EXPRESIONES DECIMALES

Peso: Báscula de baño o pesos en supermercados

Cronómetros en las competiciones

Precios o la factura de cualquier compra.

Carteles de carretera que indican distancias

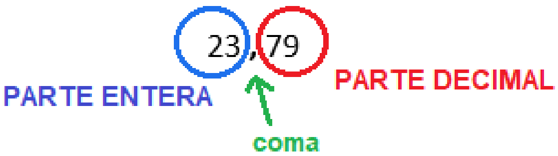


Termómetros:
Para medir la temperatura corporal o de la zona en la que estamos o el termostato

Volúmenes
En el supermercado nos encontramos con botellas de diferentes volúmenes

Un decimal tiene una cierta cantidad de unidades completas, que es la parte entera, y número de porciones de la unidad que hay que añadir, que es la parte decimal, separadas por una coma.

- ✓ La parte entera es el número que está a la izquierda de la coma.
- ✓ La parte decimal es el número que se encuentra a la derecha de la coma.



La parte decimal representa una porción menor que la unidad. Recordando el concepto de fracción, tomamos un cuadrado que represente la unidad, a continuación, lo dividimos en 10 partes (cuadrado central) y seguidamente en 100 partes iguales (cuadrado derecho).

$unidad$ $\quad \frac{1}{10}$ *de la unidad* $\quad \frac{1}{100}$ *de la unidad*

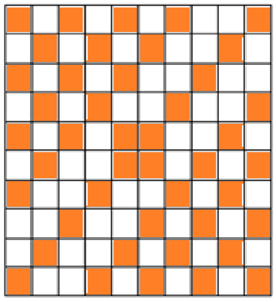
Cuando dividimos el cuadrado en diez partes iguales una unidad, cada una de ellas representa $\frac{1}{10}$ de la unidad y se llama ***décima***; si lo dividimos en 100 partes iguales, cada una de ellas representa $\frac{1}{100}$ de la unidad y se llama ***centésima***, si lo dividimos en 1000 partes iguales, cada una representaría $\frac{1}{1000}$ de la unidad y se llama ***milésima***.

DÉCIMA	CENTÉSIMA	MILÉSIMA
$0{,}1=\frac{1}{10}=1\,d$	$0{,}01=\frac{1}{100}=1\,c$	$0{,}001=\frac{1}{1000}=1\,m$

Por ejemplo:

- ✓ 0,7: Si a la unidad la dividimos en 10 partes iguales, tenemos décimos; tomamos 7 partes de las 10, es decir $\frac{7}{10}$, luego tenemos 7 décimas

$\mathbf{0.7}$



$\mathbf{0.44}$

- ✓ 0,44: Si la unidad la dividimos en 100 partes iguales, cada una de ellas es un décimo; tomamos 44 de las 100, es decir $\frac{44}{100}$. Luego tenemos 44 centésimas o 4 décimas y 4 centésimas.

Siguiendo con esta idea, vemos que se puede escribir un número decimal utilizando fracciones:

$$3{,}9\ =3+0{,}9\ =3\ +\frac{9}{10}$$

$$7{,}15\ =7\ +0{,}1+0{,}05\ =7+\frac{1}{10}+\frac{5}{100}$$

Otra forma de descomponer este número es:

$$7{,}15=7+0{,}15=7+\frac{15}{100}$$

$$8{,}765\ =8\ +0{,}765\ =8\ +\frac{7}{10}+\frac{6}{100}+\frac{5}{1000}$$

Un número decimal está conectado con las descomposiciones de fracciones cuyo denominador es potencia de 10

Para ***operar*** con decimales vamos a trabajar igual que con números naturales, ya que los algoritmos que conocemos se basan en el sistema de numeración decimal.

Para reflexionar:

¿Es cierto que al multiplicar decimales el resultado es mayor que los factores y que al dividir es menor que el dividendo?

¿A qué equivale multiplicar por 0,1, 0,01, 0,001, …? ¿Y dividir entre 0,1, 0,01, 0,001, …?

¿Cómo decidir si un decimal es mayor o menor que otro? Si sus partes enteras son distintas, es mayor el que tiene mayor parte entera. Por ejemplo 15,75 > 12,85. Si tienen la misma parte entera, buscamos la primera cifra decimal en la que los números difieren. La que sea mayor pertenecerá al mayor número decimal. Por ejemplo: 9,25 y 9,30 tienen la misma parte entera, pero si nos fijamos en la parte decimal, 3 es mayor que 2 es decir 9,30 > 9,25.

Aproximar un número a cierto orden (unidad, decena, décima, etc) consiste en encontrar un múltiplo de ese orden que esté muy próximo al número dado. Por ejemplo, aproximar un número a la decena es buscar un número múltiplo de 10 (su última cifra es un cero) que esté próximo: por ejemplo, si queremos aproximar 82 a la decena, podremos considerar tanto el 80 como el 90 como las decenas más próximas. Las aproximaciones mayores que el número (al alta) se llaman ***aproximaciones por exceso***, mientras que las que son menores que el número (a la baja) se llaman ***aproximaciones por defecto.*** En el caso anterior, 80 sería una aproximación por defecto y 90 una aproximación por exceso.

Truncamiento: Truncar un número decimal a un orden determinado es una aproximación por defecto donde se eliminan las cifras de los órdenes inferiores a él, poniendo ceros si es necesario para conservar el valor de las cifras. Por ejemplo:

732	≈	700	Truncamiento a la centena
1850	≈	1000	Truncamiento a los millares
43,99	≈	43	Truncamiento a las unidades
15,342	≈	15,3	Truncamiento a las décimas

Redondeo: Consiste en escoger la aproximación de un orden determinado más cercana al número que se quiere aproximar. Se sigue el siguiente procedimiento: Se eliminan las cifras de orden inferior al que se aproxima, pero antes se aumenta la cifra del orden deseado una unidad si la primera cifra que debemos suprimir es mayor o igual que 5 (si no lo es se deja como está). Por ejemplo, si se redondea a las centésimas, nos fijamos primero en las milésimas:

250,787	≈	250,79	La milésima es 7, se aumenta en 1 la centésima
103,0204	≈	103,02	La milésima es 0, se deja igual la centésima
926,11403	≈	926,11	La milésima es 4, se deja igual la centésima
813,295	≈	813,30	La milésima es 5, se aumenta en 1 la centésima

Este método de aproximación es el que se usa, por ejemplo, en las operaciones financieras, al repostar gasolina, etc..... Se usa por dos razones: Es la aproximación más cercana a un orden determinado. Al ser unas veces por exceso y otras por defecto, al sumar cantidades se compensan los errores cometidos.

PRACTICA

6.1.- Queremos cubrir una de las paredes de nuestra habitación de 4 m de largo y 3 m de alto, con un póster de nuestro jugador de futbol favorito.

¿Qué superficie tenemos disponible? ¿Y si fuera de 4,2 m de largo y 2,45 m de alto?

6.2.- Queremos envasar 8 litros de mi refresco favorito en botellas de 2 litros. ¿Cuántas botellas necesitaremos? Explica los pasos que sigues.

Ahora quiero envasar 8,25 litros de mi refresco favorito en botellas de tres cuartos de litro, es decir, 0,75 litros. ¿Cuántas botellas necesitaremos? Utiliza el mismo razonamiento que has utilizado anteriormente.

6.3.- Completa los términos que faltan y explica cómo lo haces:

	2	5	,	8	3	5
+	●	2	,	●	5	1
	3	●	,	3	●	4
	9	0	,	5	2	●

	2	6	,	●		
-	1	●	,	1	●	5
	●	4	,	7	2	●

6.4.- El parque de atracciones de mi ciudad tiene las siguientes tarifas:

	ADULTO	***NIÑO***
PRECIO	***8,25€***	***4,80€***

¿Cuánto tienen que pagar en total si van 3 adultos y 7 niños?

Pedro paga con dos billetes de 50€. ¿Cuánto le tienen que devolver?

Al final deciden repartir los gastos entre las 3 familias por igual. ¿Cuánto pagará cada familia?

6.5.- La clasificación de los 100m lisos de mujeres en los juegos olímpicos de Tokio 21, fue la que vemos en la tabla, ¿quiénes fueron las medallistas?

NACIONALIDAD	ATLETA	TIEMPO
SUI	Ajla del Ponte	10.97
GBR	Daryll Neita	11.12
JAM	Elaine Thompson-Herah	10.61
CIV	Marie-Josee Ta Lou	10.91
SUI	Mujinga Kambundji	10.99
JAM	Shelly-Ann Fraser-Pryce	10.74
JAM	Shericka Jackson	10.76
USA	Teahna Daniels	11.02

6.6.- ¿Verdadero o falso?

a) 24 centésimas es mayor que 240 milésimas.

b) 310 décimas son 31 unidades.

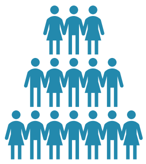
c) Un bote de refresco de 33 cl. es lo mismo que otro bote de 330 ml.

d) Media décima equivale a 5 centésimas.

6.7.– Redondea y trunca a las centésimas:

a) 4,236	R	T	b) 2,731	R	T
c) 5,625	R	T	d) 4,377	R	T
e) 6,5237	R	T	f) 7,919	R	T

6.8.–La población de Castilla y León fue 2 400 000 en 2020.
Este valor está redondeado a las decenas de mil. ¿Cuál es el valor mayor y menor que pudo tener la población de Castilla y León en 2020?



6.9.– ***REGALO DE CUMPLEAÑOS:***

A Luis le encantan los puzles. Sus amigos Ana, Diego, Fernando y Laura quieren comprarle uno para su cumpleaños. Buscando por Internet han encontrado dos portales de ventas con el puzle que más le gusta a Luis, de 2000 piezas:

MAZONIA

50 €

Gastos de envío: 4 €

Caja de regalo de edición limitada: 6 € más

ESun

55 €

Gastos de envío: incluidos

Caja de regalo de edición limitada: 3 € más

Los menores de 18 años NO pueden comprar por Internet, salvo que tengan la autorización expresa de sus padres.

1. Si los amigos de Luis compran el puzle a través de Mazonia y no lo quieren con la caja de regalo, ¿cuánto tendría que pagar cada uno? ¿Y si lo compran con la caja de regalo?
2. Si, en vez de Mazonia eligen eSun, sin la caja de regalo, ¿cuánto tiene que pagar cada uno? ¿Y si lo compran con la caja?
3. Argumenta: ¿Cuál de los dos portales es más económico? ¿Por qué?
4. Manuel, otro amigo, también quiere participar en el regalo. En ese caso, ¿cuánto tendrán que pagar cada uno si lo compran por Mazonia con la caja de regalo? ¿Y si lo hacen por eSun? ¿Cuál es más barato?
5. Al final han pensado que lo comprarán con la caja especial en Mazonia, ya que Laura ha recordado que tiene un vale de descuento de 8 € en ese portal si el producto cuesta más de 30 €. En este caso, ¿pueden utilizar el vale de descuento? ¿Cuál sería el precio total? ¿Cuánto dinero tendría que poner cada uno de los amigos, incluyendo a Manuel?

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

7. FRACCIÓN VS DECIMALES

RETOS

A) Observa las siguientes fracciones

$$\frac{2}{3},\frac{16}{3},\frac{5}{10},\frac{81}{36},\frac{5}{9},\frac{440}{100},\frac{15}{6},\frac{586}{110},\frac{2}{7},\frac{17}{50}$$

$$\frac{8}{11},\frac{5}{4},\frac{5}{2},\frac{5}{12},\frac{13}{24},\frac{3}{12},\frac{5}{14},\frac{13}{45},\frac{151}{99},\frac{52}{25}$$

Si dividimos numerador entre denominador obtendremos expresiones decimales. Toma una calculadora y vete apuntando en tu cuaderno las expresiones decimales que obtengas. ¿Observas alguna pauta que se repita? ¿Hay alguna diferencia entre las expresiones decimales que se obtienen? ¿Podrías establecer algún tipo de clasificación a partir de dichas expresiones decimales?

Inventa una fracción y divide numerador entre denominador para hallar su expresión decimal, ¿se parece a las anteriores?

Haz lo mismo ahora con las siguientes fracciones:

$$\frac{12}{10},\frac{123}{100},\frac{1234}{1000},\frac{12345}{10000},\frac{123456}{100000},\frac{1234567}{1000000},\frac{123456789101112}{100000000000000}$$

$$\frac{12}{9},\frac{123}{99},\frac{1234}{999},\frac{12345}{9999},\frac{123456}{99999},\frac{1234567}{999999},\frac{123456789101112}{99999999999999}$$

$$\frac{12}{90},\frac{123}{900},\frac{1234}{9900},\frac{12345}{99000},\frac{123456}{999000},\frac{1234567}{9990000},\frac{123456789101112}{999999900000000}$$

Escribe lo que observas.

APRENDE Y APLICA

Toda fracción tiene asociada una expresión decimal que representa la misma cantidad. Piensa, por ejemplo, que ½ es la mitad de una unidad pero que también lo es 0,5.

7. FRACCIONES VS DECIMALES

En el reto has observado que al dividir el numerador entre el denominador de una fracción obtenemos un número decimal. Se pueden dar los siguientes casos:

- ***Entero,*** si el numerador es múltiplo del denominador la división tiene resto 0 y el resultado es un número entero. Por ejemplo:

$$\frac{18}{6} = 3$$

- ***Decimal exacto,*** si al hacer la división en algún momento el resto es igual a 0, el número de cifras decimales es finito. Por ejemplo:

$$\frac{9}{4} = 2{,}25$$

- ***Decimal periódico,*** si al hacer la división en algún momento se repite un resto (recuerda que el resto es menor que el divisor y que, por tanto, si no es 0 en algún momento se tiene que repetir) en la parte decimal hay un grupo de cifras que se repite indefinidamente. Este grupo se llama período y se indica con un arco encima. Pueden ser:
  - ***Periódico puro***, si toda su parte decimal es periódica.

    $$\frac{7}{3} = 2{,}333\ldots = 2{,}\overset{\frown}{3}$$

    parte entera
    período

  - ***Periódico mixto,*** si hay cifras decimales que no se repiten delante del período, llamadas anteperíodo.

    $$\frac{13}{6} = 2{,}1666\ldots = 2{,}1\overset{\frown}{6}$$

    parte entera
    período
    anteperíodo

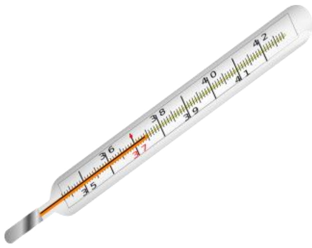
PARA REFLEXIONAR: ¿Existirán números decimales que no sean enteros, exactos o periódicos?

Algunos decimales se pueden escribir como fracciones. Ya se ha visto en el apartado anterior cómo se escriben los decimales exactos como suma de fracciones. También se pueden escribir como una única fracción. Observa por ejemplo que 2,45 son 245 centésimas y que, por tanto $2{,}45 = \frac{245}{100}$. De la misma manera 4,789 son 4789 milésimas, por lo que $4{,}789 = \frac{4789}{1000}$.

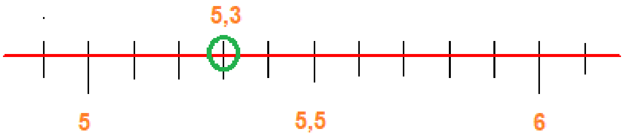
PARA REFLEXIONAR: ¿Crees que todo decimal se puede escribir como fracción?

Gracias a la relación que hemos encontrado entre los decimales y las fracciones, los decimales los podemos ***representar en la recta numérica*** al igual que las fracciones.

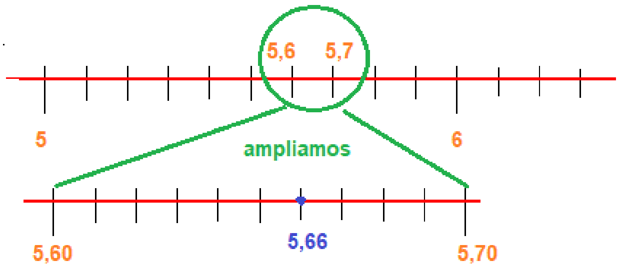
Los termómetros son un buen ejemplo de esa representación. Se lee la temperatura fijándonos primero en los números marcados (los enteros). Vemos que entre dos enteros hay 10 divisiones que nos permiten leer las décimas de grado. Por ejemplo, la temperatura habitual de un ser humano es de 36,5 y si tienes 37,2 por ejemplo se dice que tienes "décimas".



Vamos a ver con un ejemplo cómo representar decimales. Ten en cuenta que el decimal 5,3 se puede escribir como $5{,}3 = \frac{53}{10} = 5 + \frac{3}{10}$. Este número tiene parte entera 5 y parte decimal 3 (3 décimas); por lo tanto, es un número que estará representado entre 5 unidades y 6 unidades. Debemos dividir dicho segmento en 10 partes iguales, y tomamos 3. Ese punto representa 5,3.



¿Qué pasa si el número a representar es por ejemplo 5,66? En primer lugar, 5,66 es un decimal que está situado entre los enteros 5 y 6; dividimos el segmento que empieza en 5 y acaba en 6 en 10 partes iguales, cada una de ellas es una décima, así que están representados 5,1, 5,2, 5,3, etc. Nuestro número está entre 56 y 57 décimas, es decir, entre 5,6 y 5,7. Siguiendo el razonamiento anterior, el segmento entre 5,6 y 5,7 lo dividimos en 10 partes iguales, y tomamos 6, es decir 6 centésimas.



PRACTICA

7.1.– Observa el siguiente número 1,01001000100001000001… ¿qué tipo de número decimal es?

7.2.– Busca con la calculadora el decimal asociado a las fracciones siguientes e indica el tipo de expresión decimal

a) $\frac{50}{30}$ c) $\frac{18}{6}$ e) $\frac{4}{25}$

b) $\frac{50}{12}$ d) $\frac{18}{7}$ f) $\frac{26}{9}$

7.3.- Transforma en fracciones los siguientes números decimales:

a) 0,87 b) 0,0701 c) 2,037

7.4.- Representa en la recta numérica los siguientes decimales.

a) 1,2 b) 0,3 c) 1,85 d) 0,12

7.5.- Busca...:

a) Un decimal que esté a la misma distancia de 2,04 y 2,05.

b) Los decimales que dividen el intervalo comprendido entre 0,6 y 0,7 en cuatro partes iguales.

TRABAJA EN GRUPO

RECETA DE ROLLITOS DE CANELA

- Forma un equipo de 3 o 4 personas.
- El profesor/a os da la receta con las instrucciones.
- Se puede usar la calculadora.
- Hay que explicar los pasos seguidos en el grupo para resolver la actividad.

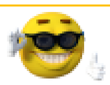
DE UN VISTAZO

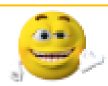
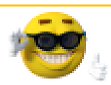
DIBUJA LAS IDEAS PRINCIPALES DEL TEMA:

- ✓ Una fracción es un número que representa una parte de la unidad. Tiene dos partes, numerador y denominador.
- ✓ Una fracción también representa un reparto.
- ✓ Existen fracciones propias e impropias. Las primeras son menores que la unidad y las segundas son mayores. Estas últimas también se pueden expresar como números mixtos.
- ✓ Se llaman fracciones equivalentes a aquellas que representan la misma cantidad.
- ✓ Se pueden obtener fracciones equivalentes de dos formas: amplificando (multiplicando numerador y denominador por el mismo número) o simplificando (dividiendo numerador y denominador por el mismo número).
- ✓ Reducir a común denominador es encontrar fracciones equivalentes con el mismo denominador. Se necesita para comparar, sumar o restar fracciones.
- ✓ Para sumar o restar fracciones debemos tener el mismo denominador en todas ellas. Se sumarán los numeradores y se mantendrá el mismo denominador.
- ✓ Para multiplicar fracciones, la fracción producto tendrá como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.
- ✓ La fracción inversa es la que multiplicada por una fracción es la unidad. Para obtenerla se intercambian numerador y denominador.
- ✓ Para dividir fracciones se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda.
- ✓ Los números decimales se componen de parte entera y parte decimal.
- ✓ Las operaciones con números decimales se realizan con los mismos algoritmos que los números enteros.
- ✓ Los decimales se ordenan utilizando el mismo procedimiento que los naturales.
- ✓ Los métodos más comunes para aproximar decimales son: truncamiento y redondeo.
- ✓ Toda fracción tiene asociada una expresión decimal.
- ✓ Los números decimales que se pueden expresar como fracción pueden ser exactos o periódicos.

EVALÚA Y AFIANZA

Llegados al final del tema reflexiona sobre lo que has aprendido. Marca en la siguiente tabla lo que corresponde a cada frase, haz la autoevaluación y revisa de nuevo la tabla.

¿SOY CAPAZ DE HACERLO?	 No soy capaz	 Solo a veces. Aún me cuesta	 En general creo que sí sería capaz	 Sin ninguna duda. ¡Puedo con ello!
Entender y explicar qué es una fracción y sus diferentes interpretaciones				
Identificar situaciones cotidianas en las que se utilizan fracciones				
Representar fracciones de diferentes maneras: gráficamente, en la recta real…				
Diferenciar entre una fracción propia y una impropia y escribir estas últimas como números mixtos				
Calcular la fracción de una cantidad proporcionada, y la cantidad total conociendo una fracción de la misma				
Reconocer y explicar cuándo dos fracciones son equivalentes y cuánto no.				
Escribir fracciones equivalentes a una fracción dada				
Comparar cualquier pareja de fracciones				
Obtener la suma y la resta de fracciones con diferentes denominadores				
Asociar la fracción de una fracción a la multiplicación de fracciones y obtener el producto de ambas				
Asociar la división de fracciones a saber cuántas veces cabe el divisor en el dividendo y obtener el cociente de ambas				
Resolver operaciones combinadas con fracciones				
Identificar situaciones cotidianas en las que se utilizan números decimales				
Comparar y ordenar números decimales				
Obtener aproximaciones de números decimales en situaciones que lo precisen				
Representar una fracción como número decimal				
Reconocer problemas cotidianos que pueden ser resueltos utilizando fracciones y decimales				

¿SOY CAPAZ DE HACERLO?	 No soy capaz	 Solo a veces. Aún me cuesta	 En general creo que sí sería capaz	 Sin ninguna duda. ¡Puedo con ello!
Explicar de forma ordenada y clara los pasos que sigo para resolver una actividad o problema matemático				
Expresar las dificultades que tengo a la hora de resolver un problema matemático, en caso de tenerlas				
Reflexionar sobre mis errores para aprender a partir de ellos				
Motivarme para enfrentarme a los problemas matemáticos con ganas				
Razonar o argumentar las decisiones que tomo al resolver una actividad o un problema				
Trabajar en equipo para realizar investigaciones y resolver problemas matemáticos				
Diseñar o pensar un plan para resolver un problema matemático, aunque el plan después no funcione				
Expresar problemas cotidianos en lenguaje matemático cuando veo que las matemáticas pueden ayudar a resolverlos				

AUTOEVALUACIÓN

A1. Cada mes, Julia gasta 1/3 de su paga, ahorra 3/8 de lo que le queda y reparte el resto con sus 2 hermanos pequeños. Si su paga es de 24 euros al mes.

PREGUNTAS

A) ¿Qué fracción de su paga da a cada hermano? Ayúdate de una representación gráfica para resolverlo.

B) ¿Cuánto ahorra cada mes? Representa tu respuesta.

A2. Lee el siguiente problema y contesta a las preguntas:

> "En un laboratorio de Biología quieren estudiar el efecto de un fertilizante en el crecimiento de unas plantas. Después de aplicar el fertilizante durante varios días, recogieron los siguientes datos: la altura de la planta 1 fue de tres cuartos de metro, la altura de la planta 2 fue de dieciocho veinticincoavos de metro; la planta 3 midió 0,73 metros y la planta 4 midió setenta y seis centésimas de metro."

PREGUNTAS

A. ¿Cuál de las plantas alcanzó mayor altura? ¿Cuál de las plantas mide menos?

B. ¿Cuál es la diferencia entre la planta más alta y la más baja?

A3. Las siguientes operaciones contienen un error. ¿Podrías identificarlo y corregirlo?

A) $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{3+2}{4+5}=\frac{5}{9}$

B) $\frac{1}{4}+\frac{3}{2}:\frac{1}{3}=\frac{7}{4}:\frac{1}{3}=\frac{21}{4}$

C) $34{,}75+1{,}005=35{,}80$

D) $\frac{5}{2}=1+\frac{1}{2}$

A4. PROBLEMAS: Resuelve los siguientes problemas explicando el razonamiento

A) "Me he gastado 3/5 de mi dinero y me han quedado 30 €. ¿Cuánto dinero tenía?"

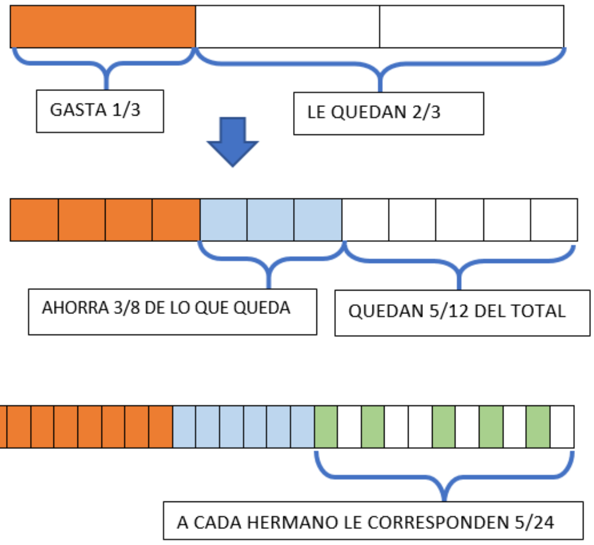
B) "Alicia se ha comido 3/8 de una pizza y yo 1/3. ¿Quién ha comido más? ¿Cuánto más?"

C) "Por la mañana se ha vaciado 1/10 de una piscina y, por la tarde, 1/3 de lo que quedaba. ¿Qué fracción de piscina queda sin vaciar?"

D) "Tengo un queso de 2+3/4 kg. ¿Cuántas cuñas de 1/8 kg puedo hacer con él?"

E) "Miriam ha comprado cinco entradas de cine a 7,35€ cada una, y Carlos dos entradas para el baloncesto a 17,80€ cada una. ¿Quién se ha gastado más?"

SOLUCIÓN A1:



1. A cada hermano le corresponde 5/24 de la paga.

2. Cada mes ahorra 1/4 de su paga, es decir, 6 euros.

SOLUCIÓN A2:

A) Las alturas de las plantas son:

Planta 1: 0,75 m; planta 2: 0,72 m; planta 3: 0,73 m y planta 4: 0,76 m. La que más mide es la planta 4, con 0,76 m y la que menos mide es la planta 2, con 0,72 m.

B) La diferencia es de 0,04 m.

SOLUCIÓN A3:

A) $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{3+2}{4+5}=\frac{5}{9}$

Para sumar fracciones con distinto denominador debemos reducir a común denominador. No se pueden sumar así los denominadores. La operación correcta sería:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{23}{20}$$

B) $\frac{1}{4}+\frac{3}{2}:\frac{1}{3}=\frac{7}{4}:\frac{1}{3}=\frac{21}{4}$

Cuando hay varias operaciones, hay que respetar la jerarquía de operaciones. Aquí se debe priorizar la división y, al resultado, sumarle la fracción. El resultado correcto sería:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{2}:\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{9}{2}=\frac{1}{4}+\frac{18}{4}=\frac{19}{4}$$

C) $34{,}75+1{,}005=35{,}80$

Se deben sumar las cifras en la misma posición: décimas con décimas, centésimas con centésimas, etc. En este caso han sumado milésimas con centésimas, lo cual no es correcto. El resultado sería:

$$34{,}75+1{,}005=35{,}705$$

D) $\frac{5}{2}$ representa la misma cantidad que $1+\frac{1}{2}$

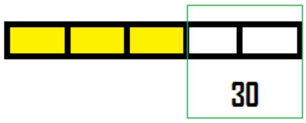
Para expresar una fracción impropia en forma de número mixto se realiza la división entera de 5/2. El resultado correcto es:

$$\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN A4:

A) “Me he gastado 3/5 de mi dinero y me han quedado 30 €. ¿Cuánto dinero tenía?”

Me quedan dos quintos. Si 30€ son dos quintos, un quinto son 15€ y el total, 5·15=75€

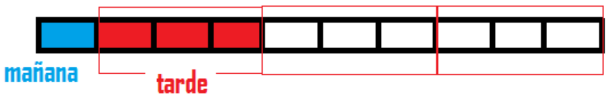


B) “Alicia se ha comido 3/8 de una pizza y yo 1/3. ¿Quién ha comido más? ¿Cuánto más?"

Se trata de comparar ambas fracciones, como tienen el mismo denominador hay que reducir a común denominador, que en este caso es 24, así Alicia se ha comido 9/24 (se multiplica por 3 numerador y denominador) y yo 8/24 (se multiplica por 8 numerador y denominador), así que Alicia ha comido más que yo.

C) “Por la mañana se ha vaciado 1/10 de una piscina y, por la tarde, 1/3 de lo que quedaba. ¿Qué fracción de piscina queda sin vaciar?”

Si se representa gráficamente se ve claramente que quedan 6/10 sin vaciar. También se puede calcular como 1/3 de 9/10 (que es lo que queda sin vaciar para la tarde), que se halla multiplicando las fracciones y simplificando el resultado.



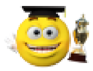
D) “Tengo un queso de 2+3/4 kg. ¿Cuántas cuñas de 1/8 kg puedo hacer con él?”

Hay que repartir el queso en cuñas, así que hay que dividir. Como 2+3/4 es lo mismo que 11/4 el número de cuñas es 11/4 : 1/8 = 11/4 · 8 = 88/4 = 22 cuñas

E) “Miriam ha comprado cinco entradas de cine a 7,35€ cada una, y Carlos dos entradas para el baloncesto a 17,80€ cada una. ¿Quién se ha gastado más?”

Miriam se ha gastado 5 · 7,35= 36,75€ y Carlos 2 · 17,80 = 35,6 €, así que se ha gastado más Miriam que Carlos.

También es importante que reflexiones sobre cómo es tu relación con las matemáticas. Para ello, hemos preparado un listado de enunciados que debes leer con atención indicando si estás o no de acuerdo con cada uno de ellos, si te sientes identificada/o con lo que dicen.

¿ME SIENTO, ME VEO O PIENSO ASÍ?	 En absoluto	 De vez en cuando	 Con bastante frecuencia	 Casi siempre
Comprendo las matemáticas				
Estoy deseando aprender nuevas cosas en matemáticas				
Hacer matemáticas es fácil para mi				
Las matemáticas están en todas partes de nuestra vida cotidiana				
Las matemáticas me confunden				
Las matemáticas me cuestan mucho				
Las matemáticas son aburridas				
Saber matemáticas me será útil en el futuro				
Me encantan las matemáticas				
Uso las matemáticas en otras asignaturas				
Se me dan bien las matemáticas				
Me lo paso bien resolviendo pasatiempos o retos matemáticos				
Mucha gente usa matemáticas en su trabajo				
No es necesario saber matemáticas				
No necesitaré nunca saber matemáticas cuando deje de estudiar				
Puedo resolver problemas difíciles de matemáticas				
Reconozco si mis respuestas en matemáticas tienen sentido				
Resolver problemas de matemáticas es divertido				
Resuelvo problemas de matemáticas por mi cuenta solo por gusto				
Saber matemáticas es útil				
Odio las matemáticas				
Me lo paso bien jugando a juegos matemáticos				
Solo uso matemáticas en clase de matemáticas				
Soy muy buena /o en matemáticas				
Me lo paso bien estudiando matemáticas				
Uso matemáticas fuera de la clase de matemáticas				

RAZONES Y PORCENTAJES

ÍNDICE

PROBLEMAS QUE VAMOS A RESOLVER

1.– Seis paquetes de galletas, todos iguales, pesan un kilo y medio y cuestan tres euros.

d) ¿Cuántos paquetes entran en un kilo?

e) ¿Cuánto cuesta el kilo de galletas?

f) ¿Cuántos paquetes me dan por un euro?

g) ¿Cuántos kilos de galletas obtendré si pago dos euros?

2.– Lola y Manuel, que no se conocen, han coincidido en la playa.

Los dos quieren disfrutar de conducir una moto náutica de una sola plaza, pero ninguno de ellos tiene los 180 euros que cuesta alquilarla por una hora, así que deciden poner una parte cada uno. Lola pone 108 euros y Manuel el resto. ¿Cuánto tiempo debería disfrutar la moto cada uno de ellos?

3.– Un jugador de baloncesto ha conseguido en un partido una efectividad del 90% en sus tiros a canasta. Si ha fallado 3 tiros, ¿cuántas veces ha tirado a canasta durante el partido?

¿QUÉ SABES DE ...?

NECESITO TRES HUEVOS PARA HACER UN BIZCOCHO PARA CUATRO PERSONAS		
VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

5 ES A 7 COMO 10 ES A 14		
VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

$10 \cdot 4 = 8 \cdot x$		
VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

25% DE $40 = 10$	75% DE $40 = 30$	$10 + 30 = 40$
VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

1. EXPRESAMOS RELACIONES EN FORMA DE RAZÓN

RETOS

Representa gráficamente las siguientes situaciones:

A) Lola tiene cuatro veces más dinero que su hermano Luis.

B) Para colaborar en una ayuda humanitaria entrego una bolsa con 3 paquetes de lentejas, 4 paquetes de macarrones y 6 paquetes de harina.

C) En un congreso internacional se encuentran representadas 5 empresas españolas, 4 empresas francesas y 7 empresas alemanas.

D) Los ingredientes de un tradicional bizcocho de limón para cuatro personas son:

- Tres huevos
- Un yogur de limón
- Aceite de oliva (1 medida del envase del yogur)
- Azúcar (2 medidas de yogur)
- Harina (3 medidas de yogur)
- Un sobre de levadura (16 gramos)

APRENDE Y APLICA

Magnitud es todo aquello que se puede medir. Son magnitudes, por ejemplo, la longitud, la cantidad de dinero, el tiempo, la cantidad de harina, la edad...

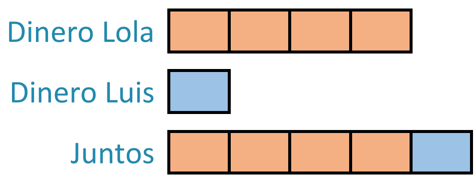
La medida de una magnitud se expresa en unidades, que son cantidades de esa magnitud que se utilizan como modelo. Una medida no tiene sentido si no se indica la unidad en que se mide. Por ejemplo, la longitud puede medir en metros, el dinero en euros, el tiempo en horas, la cantidad de harina en sacos, la edad en años...

Una magnitud puede ser medida en distintas unidades. Por ejemplo, la harina puede medirse también en kilos, en paquetes, en tazas...

Una razón es una relación entre dos cantidades o magnitudes.

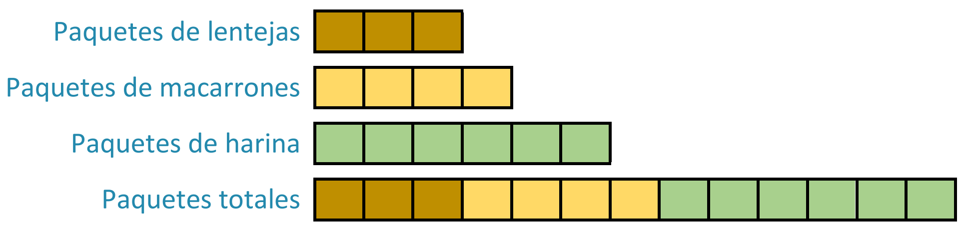
Expresión de una relación entre dos cantidades como una razón. Cuando queremos expresar la relación entre dos cantidades (a y b) como una razón, podemos escribirlo usando los dos puntos, **a:b**. Esta razón se lee "a es a b". Al escribir la razón es muy importante respetar el orden en que hemos mencionado las cantidades o las magnitudes. Ejemplo:

En la situación A del reto, podemos expresar la razón entre el dinero de Lola y el de Luis como **4:1**, que se lee como "4 a 1". Si queremos expresar la razón entre el dinero de Luis y el de Lola, usaremos la razón inversa, es decir, **1:4**.



Expresión de una relación entre tres cantidades como una razón compuesta. Cuando queremos expresar la relación entre tres cantidades (a, b y c) como una razón compuesta, escribimos **a:b:c.** También en este caso es muy importante el orden en el que escribimos las cantidades en la razón. Ejemplo:

En la situación B del reto, podemos expresar la razón entre los paquetes de lentejas, los paquetes de macarrones y los paquetes de harina como **3:4:6.**



Pero si queremos expresar la razón entre los paquetes de macarrones, los paquetes de harina y los paquetes de lentejas, escribiremos **4:6:3**.

Practica

1.1.- Regresemos a la situación B del reto, en la que la tenemos tres paquetes de lentejas, cuatro paquetes de macarrones y seis paquetes de harina.

a) Escribe la razón entre los paquetes de harina y los paquetes de macarrones.

b) Escribe la razón entre los paquetes de lentejas y los paquetes de harina.

c) Escribe la razón entre los paquetes de harina y los paquetes de lentejas.

d) Escribe la razón entre los paquetes de lentejas y los paquetes totales.

e) Escribe la razón entre los paquetes de macarrones y los paquetes totales.

f) Escribe la razón entre los paquetes de harina y los paquetes totales.

1.2.- Describe y expresa todas las razones, de dos o tres términos, que se te ocurran en la situación C del reto. Por ejemplo:

"La razón entre las empresas españolas, las francesas y las alemanas es 5:4:7".

1.3.- En la situación D del reto, usando las medidas indicadas en la receta:

a) Escribe la razón entre el número de huevos y el número de personas.

b) Escribe la razón entre la cantidad de azúcar y la cantidad de harina.

c) Escribe la razón entre la cantidad de levadura y la cantidad de harina.

d) Escribe la razón entre la cantidad de yogur y la cantidad de aceite.

e) Escribe la razón entre la cantidad de aceite, la cantidad de harina y la cantidad de azúcar.

f) Escribe la razón entre la cantidad de azúcar y el número de personas.

g) Escribe la razón entre el número de personas y la cantidad de azúcar.

Herramientas matemáticas

2. Utilizamos razones para hacer cálculos

Retos

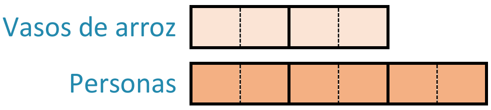
A) Para hacer paella para 6 personas, un cocinero echa cuatro vasos de arroz y, como todo el mundo sabe, para que el arroz quede en su punto es necesario poner dos medidas de agua por cada medida de arroz. Escribe la razón triple entre el número de personas, los vasos de arroz y los vasos de agua. Un día llegan al restaurante dos grupos distintos: un grupo de 30 excursionistas y una familia formada por tres personas. Los dos grupos piden paella. ¿Cuánto arroz y cuánta agua necesita el cocinero para cada una de las paellas?

B) Un padre tiene un trato con sus hijos Juan y María.

Deben turnarse para sacar la basura todas las noches y, a cambio, el padre les da 27 euros mensuales que deben repartirse entre los dos. En el mes de abril, Juan ha sacado la basura 17 días y María el resto de los días. ¿Cómo deberían repartirse el dinero que les dará su padre para que el reparto sea equitativo?

APRENDE Y APLICA

Dos razones son equivalentes si representan la misma relación entre magnitudes. Si multiplicamos o dividimos los dos términos de una razón por el mismo número, la razón obtenida es equivalente. Por ejemplo, nos da lo mismo decir que en la paella ponemos cuatro vasos de arroz para seis personas que decir que ponemos dos vasos para cada tres personas. Por tanto, la razón entre el arroz y las personas podemos representarla como 4:6 o como 2:3. Veamos esto en forma gráfica:



“entre 2” 4 : 6 → 2 : 3 “entre 2”

Las razones entre enteros pueden escribirse como las fracciones. Podemos escribir la razón $a: b$ como una fracción, $\frac{a}{b}$. Por ejemplo, si me dan 3 kilos de manzanas por 6 euros, la razón entre los kilos de manzanas y el dinero que tengo que pagar es $3: 6$, que podemos escribir como $\frac{3}{6}$. Esta fracción, que como bien sabes es también una división, representa los kilos de manzanas que conseguiré por un euro, es decir, medio kilo por cada euro. La razón inversa se puede representar con la fracción $\frac{6}{3}$, que indica los euros, 2 en este caso, que cuesta un kilo de manzanas.

Dos razones serán equivalentes si lo son las fracciones con las que las representamos. Esto nos permite aplicar todos nuestros conocimientos sobre fracciones equivalentes para hacer cálculos con razones. Por ejemplo, como la fracción $\frac{3}{6}$ se puede simplificar hasta obtener la fracción equivalente irreducible $\frac{1}{2}$, podemos decir también que la razón $3: 6$ es equivalente a la razón $1: 2$.

2. UTILIZAMOS RAZONES PARA HACER CÁLCULOS

Una proporción es una igualdad entre dos razones. Al igualar las razones $a: b$ y $c: d$ obtenemos la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Por motivos que no te será difícil encontrar, a y d se llaman extremos, mientras que b y c se llaman medios. En esta proporción podemos observar varias relaciones:

- ***Las dos razones representan la misma cantidad***, por lo que si dividimos "a entre b" nos dará lo mismo que si dividimos "c entre d".
- ***Las dos razones son equivalentes***, así que la segunda razón puede obtenerse de la primera multiplicando o dividiendo por el mismo número, por lo que la división "c entre a" da lo mismo que la división "d entre b".
- En una proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se cumple que $a \cdot d = b \cdot c$, ya que la razón $\frac{a}{b}$ es equivalente a $\frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ y la fracción $\frac{c}{d}$ es equivalente a $\frac{b \cdot c}{b \cdot d}$, por lo que tienen que ser iguales $a \cdot d$ y $b \cdot c$. lo que se conoce como "***producto de medios igual a producto de extremos***".

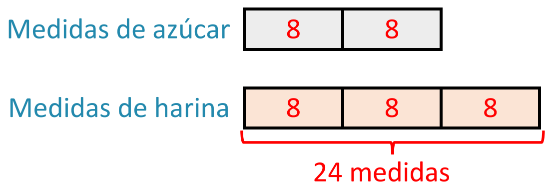
Cuando la razón entre dos magnitudes se mantiene constante, aunque varíen las cantidades, se dice que entre esas magnitudes hay una relación de proporcionalidad directa. Por ejemplo, el número de unidades que se adquieren de un determinado producto y el precio que se paga por ellas, en euros, son magnitudes directamente proporcionales, siempre que no haya ninguna oferta. Al calcular la razón *Precio: Cantidad* obtenemos siempre el mismo resultado, concretamente el precio por unidad de producto. Al calcular la razón inversa, *Cantidad: Precio,* también obtenemos siempre el mismo resultado, inverso del anterior, que representa el número de unidades que podremos adquirir por un euro.

Cálculos usando razones equivalentes.

Ejemplo 1: En el bizcocho del otro día, teníamos que la relación entre la cantidad de azúcar y la de harina era 2:3, es decir, teníamos que poner dos medidas de azúcar por cada tres medidas de harina. Supongamos ahora que queremos hacer un bizcocho mucho más grande, en el que vamos a poner 24 medidas de harina. Nos preguntamos cuánto azúcar deberíamos poner para mantener el sabor.

Para realizar este cálculo podemos usar varios métodos, de los cuales vamos a mostrar tres. Los tres métodos "funcionan" siempre, pero es bueno fijarse para saber elegir el más rápido y cómodo, que no es siempre el mismo y depende de la situación.

Método 1: Resolución gráfica



3 partes son 24 medidas
1 parte son 24 : 3 = 8 medidas
2 partes, que corresponden al azúcar, son 8 · 2 = 16 medidas

Por tanto, para 24 medidas de harina tendremos que poner 16 medidas de azúcar.

Método 2: Cálculo de fracciones equivalentes

Representamos la razón 2:3 como una fracción, es decir, $\frac{2}{3}$, en la que el numerador representa el azúcar y el denominador la harina. Como queremos poner 24 medidas de harina, buscamos una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$ que tenga denominador 24. Observamos que el denominador se ha multiplicado por 8, por lo que el numerador deberá multiplicarse también por ese número.

$$2 \xrightarrow{\cdot 8} \square \qquad 3 \xrightarrow{\cdot 8} 24$$

$$\frac{2}{3} = \frac{\square}{24} \qquad\qquad \frac{2}{3} = \frac{16}{24}$$

Obtenemos de nuevo que tendremos que utilizar 16 medidas de azúcar para 24 medidas de harina.

Si no vemos a simple vista por qué número hemos multiplicado, siempre podemos recordar que la respuesta a la pregunta “¿por cuánto hemos multiplicado?” se obtiene dividiendo el número que queremos obtener entre el número de partida. En este caso, el 8 puede obtenerse como 24 dividido entre 3.

Método 3: Cálculo del término desconocido en una proporción

Representamos la situación con una proporción, es decir, una igualdad entre dos razones equivalentes. La primera razón es 2:3 y la segunda, en la que desconocemos la cantidad de azúcar, sería x:24.

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{24}$$

Como dijimos anteriormente, se trata de dos razones equivalentes y, por tanto, los productos cruzados deben ser iguales o, lo que es lo mismo, “producto de medios igual a producto de extremos”.

$$2 \cdot 24 = 3 \cdot x$$

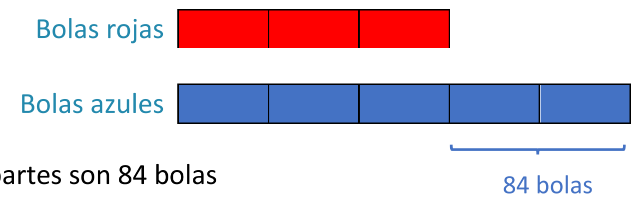
Por tanto, buscamos un número que multiplicado por 3 dé lo mismo que 2 · 24 y acabamos de recordar que ese número se calcula con una división. Por tanto, para calcular el valor de ***x*** tendríamos que multiplicar 2 · 24 y dividir el resultado entre 3.

$$x = \frac{2 \cdot 24}{3} = 16$$

Hay al menos tres formas para saber que 16 es el resultado de esa cuenta. Trata de encontrarlas, recordando lo que aprendiste en los temas de divisibilidad y fracciones.

Otros cálculos con razones.

Ejemplo 2: La razón entre las bolas rojas y las bolas azules de una bolsa es 3 : 5. Si sabemos que hay 84 bolas azules más que bolas rojas, ¿cuántas bolas rojas hay?



2 partes son 84 bolas

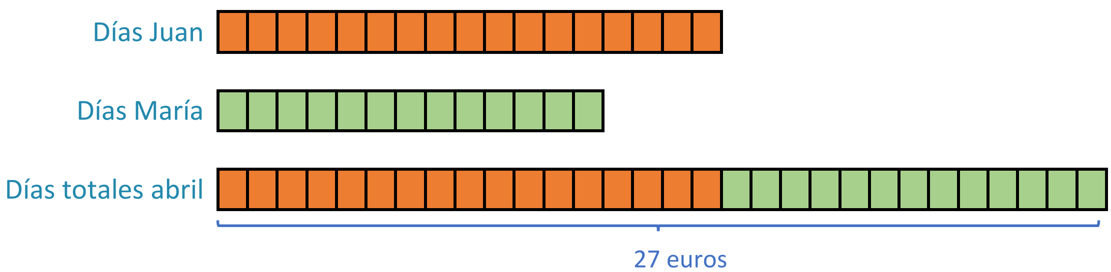
1 parte son 84 : 2 = 42 bolas

Las bolas rojas son 3 partes, que son 42 · 3 = 126 bolas

Ejemplo 3: Veamos también varias formas de afrontar el reto B de este apartado: Juan ha sacado la basura 17 días de abril y María el resto, por lo que su padre les ha dado 27 euros. *Recordemos que abril tiene 30 días.*

Método 1: Resolución gráfica

La razón entre los días que ha sacado la basura Juan y aquellos en los que lo ha hecho María es *17 : 13*. Por lo tanto, el reparto del dinero entre ellos tiene que guardar esa misma relación.



30 partes son 27 euros

1 parte son 27 : 30 = 0,90 euros

A Juan le corresponden 17 partes, que son 0,90 · 17 = 15,30 euros

A María le corresponden 0,90 · 13 = 11,70 euros

También podríamos haber calculado lo que le corresponde a María restando lo de Juan, pero así podemos comprobar además que el resultado es correcto, puesto que suman los 27 euros que les ha dado su padre. Conviene comprobar también que Juan, que sacó unos pocos días más la basura, ha recibido un poco más de dinero.

Método 2: Reducción a la unidad

En este caso, podríamos haber resuelto el problema numéricamente, sin mucho esfuerzo, calculando lo que paga el padre por cada día de abril que sacan la basura (observa que no sería la misma cantidad si el mes fuese de 28, 29 o 31 días).

Como abril tiene 30 días, repartimos los 27 euros entre los 30 días o recordamos que la razón 27:30 y la fracción $\frac{27}{30}$ representan los euros que corresponden a un día, y tenemos:

27 euros : 30 días = 0,90 euros/día

0,90 euros/día · 17 días = 15,30 euros por 17 días

0,90 euros/día · 13 días = 11,70 euros por 13 días

Por lo tanto, Juan recibirá 15,30 euros y María 11,70 euros, solución obtenida exactamente con las mismas cuentas que en el método gráfico.

Método 3: Cálculo del término desconocido en una proporción

Sabemos que la razón entre los días de Juan y los de María es 17:13, pero, como tenemos el total de dinero a repartir, necesitamos la razón entre cada uno de ellos y el total.

Razón entre los días de Juan y el total de días --> 17:30

Razón entre los días de María y el total de días --> 13:30

Buscamos ahora razones equivalentes para el reparto del dinero, colocando los 27 euros en la parte de la razón correspondiente al total.

JUAN	MARÍA
$\frac{17}{30} = \frac{x}{27} \Rightarrow x = \frac{17 \cdot 27}{30} = 15{,}3\ euros$	$\frac{13}{30} = \frac{x}{27} \Rightarrow x = \frac{13 \cdot 27}{30} = 11{,}7\ euros$

En este caso no hemos hecho las cuentas en el mismo orden, pero hemos obtenido el mismo resultado.

PRACTICA

2.1.– En una bolsa, por cada 2 bolas blancas hay 3 bolas grises. Escribe la razón entre las bolas blancas y las grises y represéntala usando el modelo de barras.

2.2.– Si sabemos que hay 54 bolas blancas, ¿cuántas bolas grises hay en total?

2.3.– La razón entre el número de hombre y el número de mujeres en un parque es 3:4.

La razón entre el número de mujeres y el número de niños es 2:3.

a) Calcula la razón entre el número de hombres y el número de niños en el parque.

b) ¿Qué fracción del total de las personas que había en el parque eran mujeres?

c) Si sabemos que en el parque había 42 niños, ¿cuántas personas había en el parque?

2.4.– Juan ha recorrido 24 km en una hora. ¿Qué distancia recorrerá en 12 minutos?

Valora si falta algo en el enunciado del problema para poder aplicar la proporcionalidad en su resolución. Piensa además qué nombre recibe la razón entre la distancia y el tiempo.

2.5.– Sofía, Luis y Ana han comprado juntos un décimo de lotería.

Sofía ha puesto 6,5 euros, Luis ha contribuido con 10 euros y Ana ha aportado 3,5 euros. Si el décimo ha resultado premiado con 1500 euros, ¿cuánto dinero le corresponde a cada uno de ellos?

2.6.– Cada paso de Juan mide 75 cm y cada paso de su hija Luisa mide 50 cm.

a) Escribe la razón simplificada entre la medida del paso de Juan y la del paso de Luisa.

b) Si ambos dan el mismo número de pasos, ¿qué distancia habrá recorrido Luisa cuando su padre haya recorrido 3 km?

c) Escribe la razón simplificada entre el número de pasos que da Juan y el número de pasos que da Luisa cuando ambos recorren la misma distancia. ¿Qué observas?

2.7.– En una bolsa tenemos bolas blancas y bolas negras.

Si nos dicen que 2/3 de las bolas blancas son la misma cantidad que 1/4 de las bolas negras, ¿cuál es la razón entre el número de bolas blancas y el número de bolas negras?

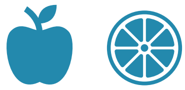
2.8.– Sabemos que Alicia tiene el doble de dinero que Benito.

Después de salir de fiesta y gastar 18 euros cada uno, nos dicen que Alicia tiene el triple de dinero que Benito. ¿Cuánto dinero tenían entre los dos al principio?

2.9.- La razón entre el dinero que tenía ahorrado Miguel y el que tenía ahorrado Laura era al principio de 5:2.

Cuando Miguel gastó 36 € y María ahorró 27 €, los dos amigos comprobaron que tenían los mismos ahorros. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado Laura al principio?

2.10.- Al principio tenía el doble de zumo de naranja que de zumo de manzana. Tras consumir 540 ml de cada uno, tenía 8 veces más zumo de naranja que zumo de manzana. ¿Cuánto zumo de manzana tenía al principio?

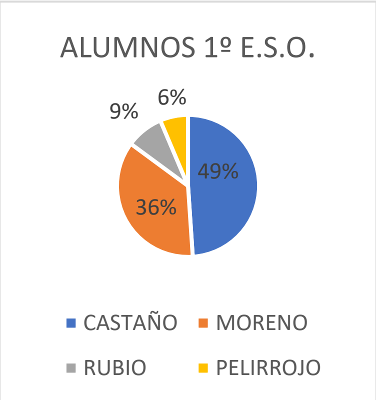


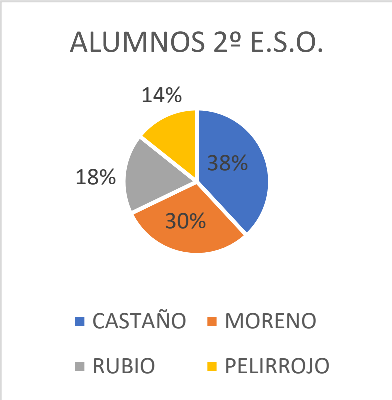
HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

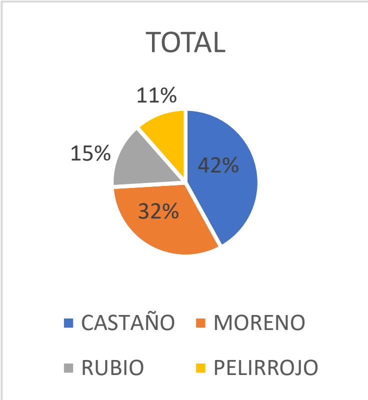
3. RELACIONAMOS LOS PORCENTAJES CON RAZONES, FRACCIONES Y DECIMALES

RETOS

A) Observa los siguientes gráficos y responde a las preguntas:







a) ¿Puedes decir cuántos alumnos de 1º de E.S.O. son morenos? Razona tu respuesta.

b) ¿Dónde hay más alumnos rubios, en 1º o en 2º? Razona tu respuesta.

c) Si en 1º hay un 6% de alumnos pelirrojos y en 2º un 14%, ¿por qué el porcentaje total es el 11%?

B) Representa de forma gráfica, como razón y como número decimal:

	GRÁFICA	RAZÓN	DECIMAL
La mitad de la clase son mujeres.			
La mitad de los chicos de la clase del ejercicio A llevan gafas.			
Tres de cada diez personas tienen ojos azules.			
El 40% de los coches son híbridos.			

APRENDE Y APLICA

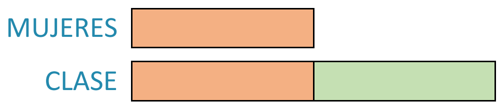
Un porcentaje indica una razón. Un porcentaje indica una razón entre dos magnitudes A y B (hay p% de A sobre B) que representa la cantidad de magnitud A que se corresponde con 100 unidades de magnitud B. El símbolo %, representa “por ciento”. 23% se lee “23 por ciento”.

En el primer ejercicio del reto, la respuesta a las dos primeras preguntas es que, analizando los gráficos, no podemos determinar el número de alumnos morenos o rubios debido a que los gráficos representan la razón de dichos alumnos, pero no el número de morenos o rubios.

En el ejemplo, el 8% de alumnos pelirrojos en 1º de ESO indica que 8 es la cantidad de alumnos pelirrojos que hay por cada 100 alumnos de 1º de ESO.

La respuesta a la tercera pregunta es que, mientras que la razón de alumnos pelirrojos en 1º de la ESO es del 6% y en 2º del 14%, la proporción total de alumnos pelirrojos es del 11%.

Expresión de un porcentaje. Un porcentaje puede expresarse como tanto por ciento, 75%, como una fracción 75/100 (o utilizando la fracción irreducible 3/4) o como el decimal 0,75.
Ejemplo: En la situación 3 del reto, podemos expresar la mitad de la clase como el 50%, como la razón 1:2, como la fracción 50/100 (o la fracción irreducible 1/2), como el número decimal 0,5 y de forma gráfica:



Calculamos porcentajes. Para calcular un porcentaje de una cantidad podemos usar varios métodos:

Método 1: Dividiendo la cantidad entre 100 y multiplicando por el porcentaje

Este método puede verse desde dos puntos de vista diferentes, dependiendo de qué significado le demos a la división de la cantidad entre 100. Veámoslo calculando el **37% de 150**.

Primera interpretación:

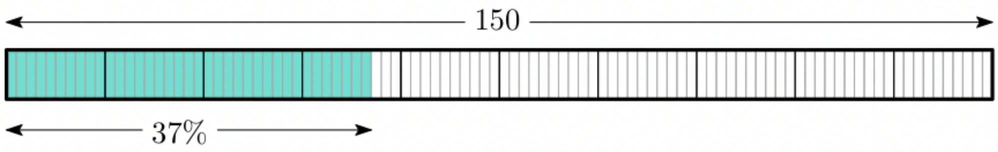
La división de la cantidad entre 100 representa el número de veces que cabe 100 en la cantidad.

150	
100 (una vez 100)	50 (0,5 veces 100)

Vemos cuántas veces cabe 100 en 150, o lo que es lo mismo, cuántos grupos de 100 podemos hacer con 150. Para ello dividimos 150 entre 100 y obtenemos que cabe 1,5 veces. Como por cada ciento debemos coger 37, multiplicamos 1,5 por 37 y obtenemos 55,5 que es el 37% de 150.

Segunda interpretación:

La división de la cantidad entre 100 representa el valor correspondiente al 1% de dicha cantidad.



Como 150 representa el 100%, dividimos 150 en 100 partes, con lo que sabemos que el 1% de la cantidad es 1,5. Como no queremos el 1%, sino el 37%, multiplicamos por 37 y obtenemos 55,5 que es el 37% de 150.

Método 2: Como fracción de una cantidad

$$30\%\ de\ 60 = \frac{30}{100} \cdot 60 = \frac{3}{10} \cdot 60 = 18$$

60									
10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

18

Método 3: Multiplicando por el número decimal asociado al porcentaje

$$35\%\ de\ 260 = 0,35 \cdot 260 = 91$$

260																			
5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%	5%
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13

91

Calculamos ahora el porcentaje 25% de 160 por los tres métodos. ¿Cuál te parece más cómodo?

Método 1: Viendo cuántas veces cabe 100 en la cantidad

$$25\%\ de\ 160 = 1,6 \cdot 25 = 40$$

160	
100 (una vez 100)	60 (0,6 veces 100)

Vemos cuántas veces cabe 100 en 160, o lo que es lo mismo, cuántos grupos de 100 podemos hacer con 160. Para ello dividimos 160 entre 100 y obtenemos que cabe 1,6 veces. Como por cada ciento debemos coger 25, multiplicamos 1,6 por 25 y obtenemos 40, que es el 25% de 160.

Método 2: Como fracción de una cantidad

$$25\%\ de\ 160 = \frac{25}{100} \cdot 160 = \frac{1}{4} \cdot 160 = 40$$

160			
25%	25%	25%	25%
40	40	40	40

40

Método 3: Multiplicando por el número decimal asociado al porcentaje

$$25\%\ de\ 160 = 0,25 \cdot 160 = 40$$

Algunos porcentajes equivalen a fracciones muy sencillas. El 50% de una cantidad equivale a la mitad, el 25% equivale a una cuarta parte o a la mitad de la mitad, el 20% equivale a una quinta parte. Observa que en el ejemplo del método 3 del apartado anterior, el 25% de 160, podríamos haber calculado más sencillamente el porcentaje haciendo "la mitad de la mitad" de 160, es decir, 40.

PRACTICA

3.1.– Representa gráficamente y expresa como razón, como fracción y como número decimal los siguientes porcentajes:

a) 25% b) 10% c) 30% d) 80% e) 75% f) 1%

3.2.– Calcula los siguientes porcentajes:

a) 10% de 350 b) 45% de 28 c) 20% de 50 d) 5% de 30

3.3.– En una granja hay 250 animales entre vacas y ovejas. El 60% son vacas, ¿Qué porcentaje corresponde a las ovejas? Calcula el número de vacas y el número de ovejas que hay.

3.4.– En un huerto hay 40 plantas, el 45% son de tomates, el 35% son pimientos y el resto calabacines. Calcula cuántas plantas hay de cada tipo.

4. Usamos porcentajes en distintas situaciones

RETOS

A) Me he comprado una falda que tenía un 20% de descuento. Representa gráficamente el precio de la falda antes del descuento, el porcentaje que pago y el porcentaje de descuento.

B) En un catálogo de ofertas, el precio de un televisor aparece sin el 21% de I.V.A. Representa el precio del televisor y el precio una vez añadido el I.V.A.

C) En una tienda, como unos pantalones se venden muy bien, la dependienta les sube el precio un 20%. Una vez hecha esta subida, en las rebajas se hace un 20% de descuento.

¿Costarán los pantalones lo mismo que antes de la subida de precio? Representa gráficamente la situación y razona tu respuesta.

APRENDE Y APLICA

Cálculo de la cantidad inicial conocidos el porcentaje y una parte.

Ejemplo 1: En una reunión, el 40% son mujeres y hay 120 hombres. ¿Cuántas personas asisten a la reunión?

TOTAL DE PERSONAS (100%)				
MUJERES (40%)		HOMBRES (60%) 120		
20%	20%	20%	20%	20%
40	40	40	40	40

En total hay 200 personas en la reunión

Si el 40% de asistentes a la reunión son mujeres, el 60% son hombres y este porcentaje se corresponde con 120 hombres.
Dividimos 120 entre tres, para calcular cuántas personas hay en una de las partes que hemos hecho en el dibujo.
Por último, multiplicamos el número de personas que hay en una parte por el número de partes que hemos hecho.

Ejemplo 2: El 15% de las personas de una sala son zurdos y son 60. Calcula cuántas personas hay en la sala:

PERSONAS (100%)	
ZURDOS (15%) 60	DIESTROS (85%)

En este caso, dividiríamos las 60 personas en 15 partes, en cada parte hay 4 personas. Multiplicamos por 100 y obtenemos las 400 personas que forman el total.

Cálculo del porcentaje conocida la cantidad inicial y la cantidad final.

Ejemplo: En un evento hay 150 personas de las cuales 60 son hombres. Calcula el porcentaje de hombres que hay.

60 HOMBRES

150 PERSONAS

La razón de hombres y personas en el evento se expresa como 60:150; la fracción asociada a dicha razón es $\frac{60}{150} = \frac{2}{5}$; el número decimal asociado es 0.4; y si multiplicamos por 100 dicho número, obtenemos el porcentaje de hombres que hay en el evento, 40%.

Aumentos porcentuales. Para calcular los aumentos porcentuales podemos hacerlo de dos formas diferentes:

Método 1: Calculando el aumento y sumándolo a la cantidad inicial.

Tomando la situación 2 propuesta en el reto, en un catálogo de ofertas, el precio de un televisor aparece sin el 21% de I.V.A. Si en el catálogo el televisor aparece con un precio de 150€, ¿cuánto habrá que pagar por él en realidad?

PRECIO INICIAL 150€ (100 %)

21% de 150= 31,5 €

PRECIO INICIAL = 150 €	AUMENTO = 31,5 €

El precio real de la tv es de 181,5 €

Método 2: Calculando porcentajes superiores al 100%

Un pantalón que costaba 75€ ha subido un 25%, ¿cuánto cuesta actualmente?

PRECIO INICIAL

AUMENTO 25%

100%	25%

125%

Calculamos el 125% de 75€: $\frac{125}{100} \cdot 75 = 1.25 \cdot 75 = 93.75$ €

Disminuciones porcentuales. Para calcular las disminuciones porcentuales podemos hacerlo de dos formas diferentes:

Método 1: Calculando la disminución porcentual y restando a la cantidad inicial

Un pueblo de Soria que tenía hace tres años 540 habitantes ha perdido el 15% de su población. ¿Cuántos habitantes tiene en la actualidad?

POBLACIÓN INICIAL 540 (100%)	
15%	El 15% de 540 = $\frac{15}{100} \cdot 540 = 0.15 \cdot 540 = 81$
81 (15%)	459 (85%)

En la actualidad tiene 459 habitantes.

Método 2: Calculando directamente el porcentaje opuesto (100% - disminución%)

Una camisa que costaba 30€ está rebajada un 30%. ¿Cuánto cuesta la camisa?

INICIAL (100%)	
REBAJA 30%	
REBAJA 30%	PAGO 70%

Calculamos el 70% $de\ 30 \ = \frac{70}{100} \cdot 30 = 0.7 \cdot 30 = 21€$

Después de la rebaja, la camisa cuesta 21€

Cálculo de la cantidad inicial dado un aumento o una disminución porcentual.

Ejemplo 1: Por una nevera he pagado 605 €, ¿cuál era el precio del electrodoméstico antes de añadirle el 21% de I.V.A.?

PRECIO FINAL (121%) 540€	
100%	21%

En este caso, dividiríamos los 605 € en 121 partes, en cada parte hay 5 €. Multiplicamos por 100 y obtenemos los 500 € que costaba la nevera antes de añadirle el I.V.A.

Ejemplo 2: Por un traje que tenía un 35% de descuento he pagado 260€, ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?

DESCUENTO 35%	PAGO 225€ (65%)
PRECIO INICIAL 100%	

En este caso, dividimos los 260€ en 65 partes iguales; en cada parte hay 4 €. Multiplicamos por 100 y obtenemos los 400€ que costaba antes del descuento.

PRACTICA

4.1.- En una urbanización han construido casas de dos y tres plantas. El 30% son de tres plantas y 28 de dos plantas. ¿Cuántas casas hay en la urbanización?

4.2.- En un garaje, el 45% de los coches son negros y son 18, ¿cuántos coches caben en el garaje?

4.3.- En un escaparate de una tienda de ropa hay 15 prendas de ropa de las cuales 6 son de color negro. Calcula el porcentaje de prendas de ropa de color negro.

4.4.- En una urna hay 20 bolas, 6 son de color rojo, 5 son verdes y el resto azules. Calcula el porcentaje de bolas de cada tipo que hay en la urna.

4.5.- El año pasado, el padre de Juan plantó 40 frutales y este año ha plantado un 35% más de frutales que el año pasado. ¿Cuántos frutales ha plantado este año?

4.6.- Las entradas para un partido de baloncesto cuestan 35€, pero por ser socio del equipo hacen un 15% de descuento. ¿Cuánto valen las entradas para los socios del equipo?

4.7.- Por un bolso que estaba rebajado un 15% he pagado 46,75€, ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?

4.8- En la actualidad, un piso que hace 10 años costaba 240.000€, cuesta 180.000€, ¿en qué porcentaje ha disminuido su precio?

4.9- El año pasado había 525 habitantes censados en una aldea y este año hay 630. ¿En qué porcentaje ha aumentado la población?

4.10.- En una tienda de electrodomésticos tienen la siguiente oferta:

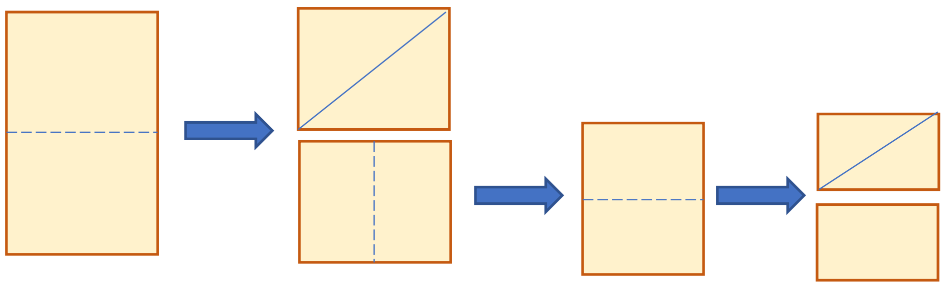
"Los precios de nuestro catálogo aparecen sin el 21% de I.V.A. y tenemos unas rebajas del 20% de descuento, ¿qué prefieres?:

- Añadir primero el I.V.A. y después se hace el 20% de descuento
- Hacer primero el 20% de descuento y después añadir el 21% de I.V.A."

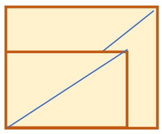
¿Cuál de las dos opciones elegirías tu? Razona tu respuesta.

BUSCAMOS UNA RAZÓN MUNDIALMENTE CONOCIDA

- Necesitáis una hoja de papel DIN A4 y otra hoja rectangular de otro tamaño diferente, por ejemplo, una hoja del cuaderno de matemáticas. Además, reglas y bolígrafo o rotulador.
- Con cada hoja haced lo siguiente:
    - Partid la hoja por la mitad y dibujad la diagonal de una de las partes.
    - Partid la otra parte por la mitad y dibujad la diagonal de uno de los trozos obtenidos.
    - Seguid partiendo así las hojas hasta tener, por cada una de ellas, cinco trozos de distinto tamaño con la diagonal dibujada.



- Colocad los cinco trozos de cada hoja con la diagonal dibujada a la vista, de forma que el más pequeño quede encima y todos coincidan en la esquina inferior izquierda.



- Observad los dos montones obtenidos y anotad las conclusiones.
- Medid en cada trozo el lado largo y el lado corto y anotad las medidas en los cuadros siguientes. Expresad la razón entre esas medidas en forma decimal. Si encontráis alguna razón equivalente, intentad descubrir en Internet si corresponde a algún número "famoso".

DIN A4	LADO LARGO (a)	LADO CORTO (b)	RAZÓN a:b
TROZO 1			
TROZO 2			
TROZO 3			
TROZO 4			
TROZO 5			

OTRO	LADO LARGO (a)	LADO CORTO (b)	RAZÓN a:b
TROZO 1			
TROZO 2			
TROZO 3			
TROZO 4			
TROZO 5			

USAMOS RAZONES EN NUESTRA VIDA DIARIA

- Necesitáis encontrar en una tienda (física u online) alguna oferta de un producto que compréis habitualmente en vuestra casa y traer el dato el día de la práctica para realizar la segunda actividad. Cada persona componente del grupo debe traer al menos una oferta.
- También debéis tener una calculadora.

PRIMERA ACTIVIDAD

En el supermercado encontramos galletas tradicionales tipo "María", en envases TIPO 1 de tres paquetes de 30 galletas o en envases TIPO 2 de cuatro paquetes iguales que los anteriores. Un envase del primer tipo pesa 600 gramos y cuesta 1,70 euros y un envase del segundo tipo pesa 800 gramos y cuesta 2,20 euros.

- Con esos datos rellenad la siguiente tabla, con cálculos que os pueden ayudar a tomar la decisión de qué envase comprar:

	TIPO 1	*TIPO 2*
Precio por paquete		
Precio de 100 gramos		
Precio de 1 kilo		
Cantidad de galletas que corresponden a 1 euro		
Gramos que corresponden a 1 euro		
¿Algún otro cálculo interesante en esta situación?		

- ¿Sería conveniente tener en cuenta alguna otra información para tomar la decisión?
- Decidid de forma razonada qué envase comprar.

PUESTA EN COMÚN

- Exponed vuestros cálculos, razonamientos y conclusiones al resto de la clase cuando se os indique.

SEGUNDA ACTIVIDAD

- Realizad una tabla como la anterior, con al menos cuatro cálculos, adecuándola a cualquiera de los productos que hayáis encontrado de oferta. En vez de TIPO1 y TIPO2 poned SIN OFERTA y CON OFERTA.
- Decidid entre todos si comprar o no la oferta, teniendo en cuenta que a veces no solo debemos considerar el precio de cada unidad. ¿Qué otras cosas tendríamos que valorar dependiendo del producto elegido?

PUESTA EN COMÚN

- Explicad la oferta que habéis elegido, junto con los cálculos, razonamientos y conclusiones al resto de la clase cuando se os indique.

DE UN VISTAZO

DIBUJA LAS IDEAS PRINCIPALES DEL TEMA:

- ✓ Una razón es una relación entre dos cantidades o magnitudes y se expresa escribiendo las cantidades separadas por dos puntos.
- ✓ Dos razones son equivalentes si expresan la misma relación entre magnitudes.
- ✓ Una proporción es una igualdad entre dos razones.
- ✓ Los componentes de una proporción se llaman extremos y medios.
- ✓ En una proporción el producto de extremos es igual al producto de medios.
- ✓ Dos magnitudes son directamente proporcionales si la razón es siempre la misma, aunque varíen las cantidades.
- ✓ Un porcentaje es una razón de una cantidad de una magnitud que se corresponde con 100 unidades de otra magnitud.
- ✓ Los problemas de porcentajes pueden ser de cálculo de porcentaje, aumento o disminución porcentual de una cantidad, cálculo de la cantidad antes de aplicar el porcentaje, aumento o disminución porcentual y cálculo del porcentaje que representa una cantidad respecto a otra.

Llegados al final del tema reflexiona sobre lo que has aprendido. Marca en la siguiente tabla lo que corresponde a cada frase, haz la autoevaluación y revisa de nuevo la tabla.

¿CÓMO LO HAGO?	 Me cuesta hacerlo	 Estoy aprendiendo	 Lo hago bien	 Soy un experto
Entender qué representa una razón				
Escribir una razón múltiple y lo que representa				
Relacionar una razón con una fracción				
Calcular razones equivalentes				
Representar problemas de proporcionalidad en un diagrama de barras				
Calcular el término desconocido en una proporción				
Resolver problemas con razones equivalentes				
Reconocer situaciones de proporcionalidad directa, diferenciándolas de otras situaciones en las que no existe esa relación.				
Comprender el significado de los porcentajes.				
Calcular porcentajes de cantidades dadas.				
Identificar problemas en los que aparecen porcentajes.				
Resolver problemas de porcentajes donde el valor desconocido es una parte				
Resolver problemas de porcentajes donde el valor desconocido es la cantidad inicial.				
Identificar problemas donde aparecen aumentos porcentuales.				
Resolver problemas donde aparecen aumentos porcentuales.				
Identificar problemas donde aparecen disminuciones porcentuales.				
Resolver problemas donde aparecen disminuciones porcentuales.				
Resolver problemas de porcentajes en los que el valor desconocido es el valor que expresa el porcentaje.				

AUTOEVALUACIÓN

A1.

De los siguientes pares de magnitudes, selecciona aquellos entre los cuales hay un relación de proporcionalidad directa:

A. El número de habitantes de una población y el número de días que duran unas determinadas reservas de agua.

B. El número de camisas del mismo modelo que produce una fábrica y el número de botones que utiliza.

C. La edad de una persona y el número de zapato que calza.

D. El número de viajeros que va en un tren y la velocidad que alcanza.

E. El largo de una mesa y su superficie.

F. El peso de una persona y su altura.

A2.

Si dedicamos el mismo tiempo a estudiar cada uno de los 15 temas de un examen y hemos tardado tres horas en estudiar los cinco primeros temas, ¿cuántas horas más necesitaremos para terminar de estudiar?

A3.

José, jugador de balonmano, marca un promedio de 5 goles cada 25 minutos. ¿Cuántos goles deberá marcar en una hora para mantener ese promedio?

A4.

En una churrería cobran la taza de chocolate a 2,20 euros y los churros a 0,80 euros la unidad, pero incrementan esos precios en un 15% por servirlos en la terraza. ¿Cuánto tendremos que pagar si nos tomamos dos tazas de chocolate y seis churros en la terraza de esa churrería?

A5.

En una empresa informática se han fijado el objetivo de que las mujeres representen el 50% de la plantilla, formada actualmente por 14 personas y en la que hay dos mujeres por cada cinco hombres. ¿Cuántas mujeres tendrán que contratar para cumplir el objetivo?

SOLUCIÓN A1:

Solo tienen relación de proporcionalidad directa las magnitudes del apartado B.

SOLUCIÓN A2:

Necesitaremos seis horas más para terminar de estudiar, ya que nos quedan 10 temas y la razón entre el tiempo empleado (en horas) y los temas estudiados es 3:5.

SOLUCIÓN A3:

Deberá marcar 12 goles, ya que la razón entre el número de goles y el tiempo en minutos es 5:25, que simplificada es 1:5, es decir un gol cada 5 minutos. Como una hora tiene 60 minutos, buscamos la razón equivalente 12:60.

SOLUCIÓN A4:

Deberemos pagar 10,58 euros por la consumición en la terraza.

Los chocolates costarían 4,40 €.

Los churros costarían 4,80 €.

En total serían 9,20 €, pero al consumirlos en la terraza nos suben el 15% de 9,20 = 1,38 €.

SOLUCIÓN A5:

Tendrán que contratar seis mujeres más, ya que en la actualidad hay 4 mujeres y 10 hombres y el 50% supone igualar el número de hombres y de mujeres.

ÁLGEBRA

ÍNDICE

PROBLEMAS QUE VAMOS A RESOLVER

1.- MAGIA

Prueba a hacer este truco de magia varias veces y anota el resultado

- *Pensad en un número (sin decirlo)*
- *Multiplicadlo por 2*
- *Sumad 4*
- *Dividid entre 2*
- *Restad el número que habéis pensado*
- *¿Qué os sale?*

Intenta explicar por qué sale siempre el mismo número.

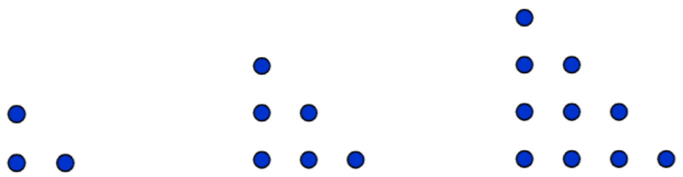
2.- ÁREAS

Dibuja cuadrados en tu cuaderno aprovechando la cuadrícula y calcula su área. Relaciona el lado de los cuadrados que has dibujado con su área. ¿Qué operación realizas para calcularla? ¿Cuál sería el área de un cuadrado de lado 30 cm?

3.- NÚMEROS TRIANGULARES

Describe cómo se forma la siguiente secuencia de números triangulares, ¿cuál el sería cuarto?, ¿y el décimo?, sabrías encontrar la relación entre la posición que ocupan y el número de puntos?

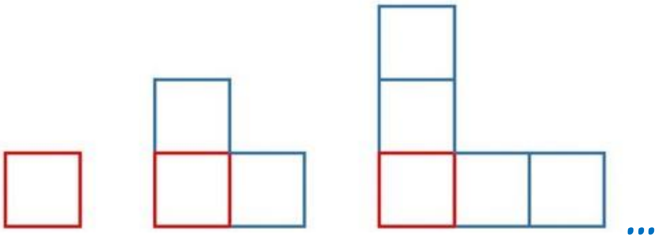
1º 2º 3º



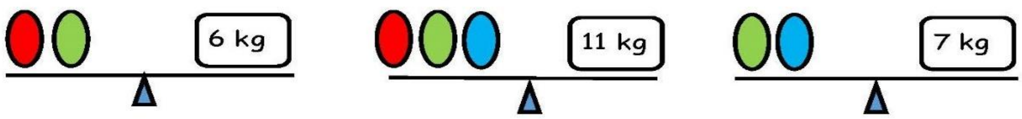
3 **6** **10**

¿QUÉ SABES DE ...?

VEO	PIENSO	ME PREGUNTO



VEO	PIENSO	ME PREGUNTO



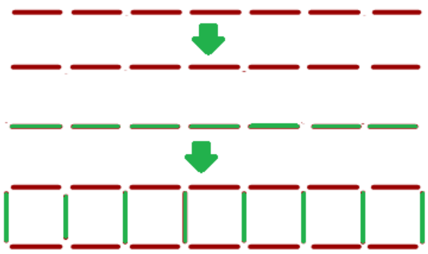
VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

1. PATRONES

RETOS

A) Se han colocado palillos formando la siguiente figura:

Mira cómo han dibujado tres estudiantes la figura anterior, describe cómo la hace cada uno y cuántos palillos hay en cada paso:



Si tuvieran que formar 10 cuadraditos, ¿cuántos palillos necesitarían?

APRENDE Y APLICA

Un patrón es una secuencia de elementos (números, figuras, símbolos) que se construye siguiendo una regla. Por ejemplo, en el reto tienes un dibujo que forma un patrón que podemos describir de diferentes maneras: dibujando un cuadrado o un segmento vertical y añadiendo "C" invertida, o dibujando los segmentos horizontales y luego los verticales. Cada paso da lugar a un elemento del patrón, un ***término***, y repitiendo estos pasos se pueden formar otros términos del patrón. En los problemas iniciales visualizábamos los números triangulares, 3, 6, 10, … de forma geométrica y encontrábamos una operación que permite calcular los siguientes números triangulares: 3= 1+2, 6=1+2+3, 10=1+2+3+4, el siguiente sería 1+2+3+4+5 = 15.

Conociendo la regla de formación del patrón y el número de pasos que se dan, se puede conocer cualquier término. Por ejemplo, en el reto se podría conocer el número de segmentos que forman una figura con un número cualquiera de cuadraditos, o en el problema inicial 3 un número triangular cualquiera, sabiendo en qué posición se encuentra.

PRACTICA

1.1.– Representa en la recta los siguientes números:

1, 4, 7, 10, 13, …

Escribe los dos términos siguientes. Escribe dos términos anteriores al 1. ¿Cuál es la regla que permite obtener un número a partir del anterior?

Haz lo mismo con la secuencia: 3, 7, 10, 14, 17, 21, 24, …

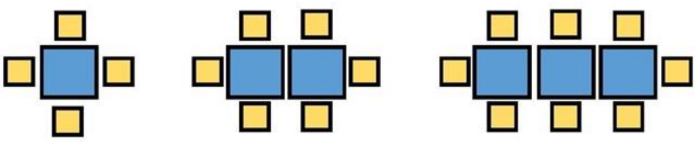
1.2.– En una receta de cocina se usan 5 huevos por cada 2 tazas de harina. Completa la siguiente tabla:

CANTIDAD DE HUEVOS Y TAZAS DE HARINA UTILIZADAS EN UNA RECETA						
Cantidad de Huevos	5	10	15	20	25	30
Cantidad de tazas de harina						

¿Qué regla has utilizado?

¿Cuántas tazas de harina se necesitan para 40 huevos?

1.3.– Ana ha invitado a su cumpleaños a los compañeros de su clase y está pensando cómo colocar las mesas y las sillas. Ha pensado en utilizar mesas cuadradas colocadas como la siguiente figura:



Es decir, si ponemos una mesa podremos poner 4 sillas, con dos mesas seis sillas, etc.

a) ¿Cuántas personas podrán sentarse en 20 mesas? Explica cómo lo has hallado.

b) Si ahora utilizamos mesas rectangulares en las que en una mesa podrán sentarse 6 personas, con 2 mesas 8, con 3 mesas 10… Realiza los mismos cálculos que en el caso anterior y compara los resultados.

1.4.– Inventa un patrón geométrico dibujando las cuatro primeras posiciones y escribe la regla general para obtener cualquier posición. Inventa otro numérico.

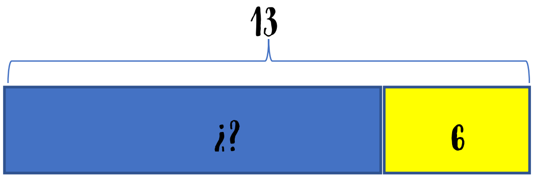
Pásale el patrón a un compañero para que deduzca la regla de formación.

2.- USAMOS LETRAS COMO NÚMEROS.

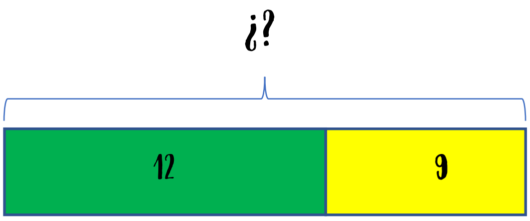
RETOS

A) Expresa la cantidad desconocida (¿?) utilizando operaciones con los datos que ves en cada uno de los siguientes gráficos:

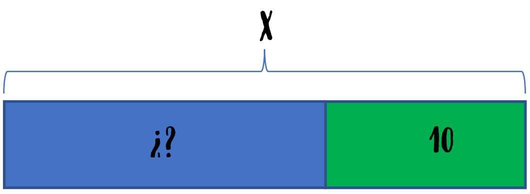
1)



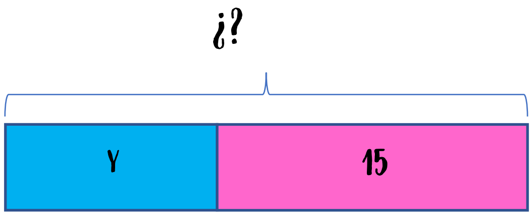
2)



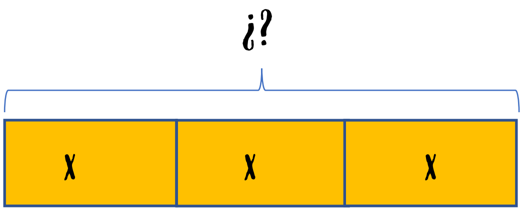
3)



4)

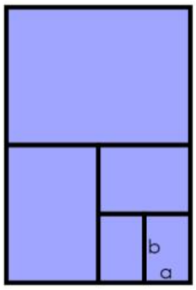


5)

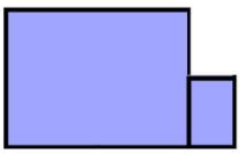


B) Carlos cogió una hoja de papel y la cortó por la mitad. Luego cortó una de esas piezas por la mitad y repitió hasta que tuvo cinco piezas en total.

Llamó *a* al lado más corto y *b* al lado más largo del rectángulo más pequeño.



Ahora Carlos ha colocado el rectángulo más grande y el más pequeño en la posición de la figura. Comprueba que el perímetro es 10a + 4b.



Alicia ha combinado los rectángulos más grande y más pequeño de una manera diferente. Su forma tenía perímetro 8a + 6b. ¿Puedes encontrar cómo podría haberlo hecho?

APRENDE Y APLICA

Denominamos ***Álgebra*** a la rama de las matemáticas que estudia expresiones que incluyen letras (variables o incógnitas), números y operaciones. Cuando necesitamos utilizar expresiones matemáticas en las que aparecen números y variables decimos que estamos utilizando el ***lenguaje algebraico.*** A los números desconocidos, representados por letras, se les llama variables y las expresiones que se utilizan se llaman ***expresiones algebraicas.*** Aprender álgebra es aprender otro idioma que requiere conocer las normas y traducir.

Traducir lenguaje usual a lenguaje numérico

Para poder traducir de lenguaje usual a lenguaje numérico primero debemos tener muy claros ciertos conceptos matemáticos que utilizamos en las operaciones básicas que vemos a diario por ejemplo:

La diferencia entre dos números es el resultado de restar dichos números.

El producto de dos números es el resultado de la multiplicación de dichos números.

El cociente de dos números es el resultado de dividir dichos números.

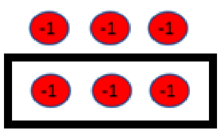
El doble de un número es el resultado de multiplicarlo por dos, el triple por tres, etc.

La mitad de un número es el resultado de dividir dicho número entre dos.

La tercera parte de un número es el resultado de dividir dicho número entre tres. (Lo mismo para la cuarta parte, quinta parte)

Por ejemplo, si Juan tiene 5 euros más que Lola, que tiene 15, Juan tendrá 15 + 5 euros. En este caso se puede calcular el resultado, que será 20 euros.

Podemos representar estas expresiones con discos numéricos. Por ejemplo, la mitad de -6 es -3 como se ve claramente al repartir en dos partes los discos numéricos (recuerda que hemos trabajado con ellos en el tema de números enteros)



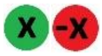
Traducir de lenguaje usual a lenguaje algebraico. En ciertas ocasiones, como hemos visto en el reto, no conocemos el valor del número o números con los que debemos trabajar y, por ello, debemos utilizar letras para referirnos a ellos. Letras distintas representan números distintos (los lados del rectángulo son *a* y *b*, letras distintas representando cantidades distintas).

Podemos representar números desconocidos, positivos y negativos, utilizando discos algebraicos. Los discos algebraicos tienen:

- Una letra en el anverso: 
- Una letra con un signo menos delante en el reverso: 

Con estos discos represento números desconocidos, positivos o negativos. Estos discos cumplen:

3) Si doy la vuelta a un disco obtengo el valor opuesto.
   Así si doy la vuelta a  , obtengo su opuesto: 
   Si doy la vuelta a  , obtengo su opuesto: 

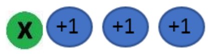
4) Al colocar un disco junto a otro con su valor opuesto el resultado es 0.
    = 0  = 0

Con los discos podemos expresar, por ejemplo,

- la suma de dos números cualquiera **x+y** 
- la diferencia de dos números cualquiera **x-y** (recuerda que restar es sumar el inverso) 
- el doble de un número (o la suma de un número consigo mismo) **2x** 

  Una de las reglas del lenguaje algebraico es que no se escribe el símbolo para la multiplicación y otra es que el número se escribe primero.

También podemos juntar los discos algebraicos con los discos numéricos,   para expresar, por ejemplo,

- La suma de un número y tres unidades **x+3** 
- El doble de un número menos una unidad **2x-1** 

Algunas expresiones no se pueden representar con discos numéricos, es el caso de las divisiones. Por ejemplo, la mitad de un número se escribe $\frac{x}{2}$. Otra de las normas del lenguaje algebraico es que la división se escribe como una fracción.

Al traducir expresiones, lo primero que tenemos que hacer es reconocer el número o cantidad desconocida y escoger la letra que lo va a representar. Por ejemplo, si hay que traducir la expresión: “El número de cromos de Luis, que tiene 3 cromos y compra 5 sobres de cromos si no sabemos cuántos cromos hay en un sobre”

2. USAMOS LETRAS COMO NÚMEROS

La cantidad desconocida es el número de cromos de un sobre y lo llamamos x ,

así que 5 sobres tendrán 5x cromos 

y como tenía 3 cromos, en total tiene 5x+3 

En este apartado las expresiones con las que has trabajado son siempre suma o resta (recuerda que restar es sumar el opuesto) de multiplicaciones o divisiones (recuerda que dividir es multiplicar por el inverso) de números con letras. Los números se llaman coeficientes y las letras variables.

PRACTICA

2.1.- Representa con discos numéricos y algebraicos, y utilizando el lenguaje algebraico después:

a) El doble de la diferencia de dos números.

b) El triple de un número más cuatro unidades.

c) El cuádruple de un número menos dos unidades.

d) El doble de la suma de dos números.

e) La diferencia de los dobles de dos números.

f) El dinero que tiene María si se gasta 3 € pero no sabemos cuánto tenía.

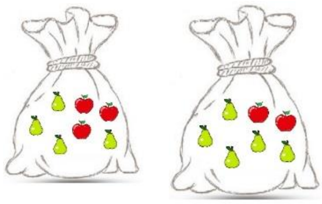
g) Los puntos que tendría un equipo de futbol si ganase los dos próximos partidos, siendo los puntos que tiene ahora algo desconocido.

h) El número de bananas que tienen Stuart y Bob si Stuart tiene 3 bananas y Bob ha comprado cinco cajas de bananas, pero no sabemos cuántas bananas hay en la caja

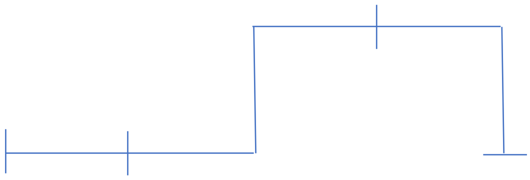
2.2.- Completa la siguiente tabla, señalando primero qué representa las variables que utilizas:

Expresión en lenguaje usual	Variable	Expresión algebraica
El triple de un precio desconocido		
La diferencia de dos números		
Un número que tenga una cantidad cualquiera de decenas y 5 unidades		
Los años de Jorge dentro de un lustro, si no sabemos cuántos tiene ahora		

2.3.– En una bolsa tenemos cuatro peras y tres manzanas, y en otra, cinco peras y dos manzanas. Si el precio de cuna pera es P y el de una manzana es M, ¿cómo calcularías el precio de cada bolsa?, ¿y el precio total?



2.4.– Un estadio de futbol mide de largo el doble que de ancho. Si llamamos *a* a la longitud del ancho, ¿cómo expresas la medida de la línea que delimita el campo?



2.5.– Inventa dos ejemplos de situaciones en las que puedas usar **2x + 3y**

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

3. DAMOS VALORES A LAS LETRAS.

RETOS

A) Para calcular la Tasa Metabólica Basal (cantidad mínima de energía que necesita tu cuerpo para sobrevivir realizando las funciones básicas) se utilizan las siguientes expresiones:

Hombres TMB = 10 P + 6,25 A – 5 E + 5.

Mujeres TMB = 10 P + 6,25 A – 5 E – 161

Donde P representa el peso en Kg, A la altura en cm y E la edad en años. ¿Cuál es tu Tasa Metabólica Basal?

APRENDE Y APLICA.

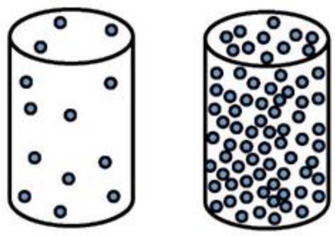
Cuando trabajamos con expresiones algebraicas estamos trabajando con números desconocidos, pero ¿qué pasaría si pudiésemos conocer el valor de esos números? Obtendríamos como resultado un número, que representa el ***valor numérico de la expresión algebraica***.

Para obtener el valor numérico de una expresión algebraica se sustituye cada letra por su valor y se realizan las operaciones. Por ejemplo, para calcular el valor numérico de 3x – 4 cuando x vale dos, que se escribe x=2, se sustituye la x por 2 y se opera. Ten en cuenta que el símbolo de multiplicación no se pone en la expresión algebraica pero sí hay que ponerlo cuando la operación es con números.

$$\overset{2}{\downarrow}$$
$$3x - 4$$
$$3 \cdot 2 - 4 =$$
$$6 - 4 =$$
$$2$$

Fórmulas. Recuerda que en los problemas iniciales expresamos el área de un cuadrado cualquiera con una expresión del tipo $A = L^2$, donde la letra A representa el área del cuadrado y la letra L representa el lado del cuadrado. Esta fórmula se interpreta como “el área de un cuadrado se calcula elevando al cuadrado la medida del lado”. Si te fijas, en la fórmula hay un igual, una letra a un lado y una operación con letras al otro lado. ***Una fórmula es una igualdad de expresiones algebraicas***. Se utiliza para calcular cantidades desconocidas (como el área) a partir de otras conocidas (como el lado). En la parte de áreas y perímetros de figuras geométricas has visto muchas fórmulas. Veamos otros ejemplos relacionados con otras materias:

Ejemplo 1: ¿Cómo se calcula la densidad de un cuerpo?

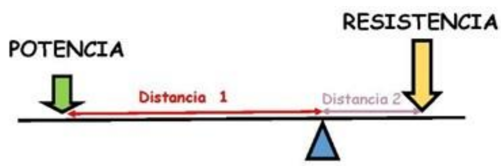


Según habéis visto en vuestro libro de Biología y Geología (incluso quizá también en el libro de tecnología), la fórmula que me permite calcular la densidad de un cuerpo es la siguiente:

$$densidad\ (g/l) = \frac{masa\ (g)}{volumen\ (l)}$$

Como ves, la fórmula significa que para calcular la densidad de un cuerpo hay que dividir su masa, en gramos, entre su volumen, en litros.

Ejemplo 2: En el libro correspondiente a la materia de Tecnología de 1º ESO podemos encontrar la fórmula correspondiente a la ley de la palanca, que dice que la fuerza por su brazo (la distancia de donde se imprime la fuerza al punto de apoyo) es igual a la resistencia por el suyo (distancia de donde está el peso a vencer al punto de apoyo). Si llamamos P a la fuerza, R a la resistencia, p al brazo de la fuerza y r al de la resistencia, la fórmula se escribe así:



$$P\, p = R\, r$$

Esto nos permitiría, por ejemplo, calcular donde poner un punto de apoyo para vencer con una fuerza determinada una resistencia también determinada.

PRACTICA

3.1.– Hemos comprado dos refrescos y cinco chocolates. No sabemos cuánto cuesta un chocolate ni cuánto cuesta un refresco.

a) Ayudándote de los discos, representa esta situación mediante una expresión algebraica.

b) Si el refresco vale 3€ y el café 1€, ¿cuánto pagamos?

c) Si el café vale 2€ y el refresco 4€, ¿cuánto pagamos?

d) ¿Cuánto pagaríamos si el refresco vale 2,5€ y el café 1,5€?

3.2.– Calcula el valor de las siguientes expresiones algebraicas para x = 6 y x = 20.

a) x + 5 b) x – 6 c) 10 + x d) 40 – x e) 4x

3.3.– Mara tiene x años actualmente. Escribe la expresión algebraica:

a) La edad de Mara dentro de 10 años.

b) La edad de Mara hace 3 años.

c) La edad de su madre que tiene 32 años más.

d) La edad de su hermano que tiene 3 años menos.

Ahora calcula el valor de las expresiones anteriores si Mara tiene 13 años en la actualidad.

3.4.– Un estadio de fútbol mide de largo el doble que de ancho. En el ejercicio 2.6. has representado la longitud de la línea con una expresión algebraica.

a) Si el ancho mide 45 metros, ¿cuánto mide la línea?

b) Si el ancho mide 60 metros, ¿cuánto mide la línea?

c) ¿Cuánto mide la línea si el estado mide 100 metros de largo?

Fíjate en que no hace falta calcular y sumar todos los lados cada vez, hemos obtenido una fórmula que permite calcular fácilmente la longitud de la línea sólo conociendo la anchura del campo.

3.5.– Recuerda la fórmula de la densidad que vimos en el apartado anterior. Calcula:

a) ¿Cuál es la densidad de un cuerpo que tiene una masa de 580 g y un volumen de 0,4 l?

b) ¿Cuál es la densidad de un cuerpo que tiene una masa de 0,7 kg y ocupa un volumen de 0,8 l?

4. OPERAMOS CON NÚMEROS Y LETRAS

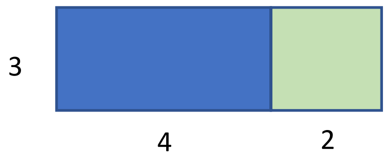
RETOS

A) Entrega un calendario a un amigo y pídele que haga un cuadrado en un grupo de 9 números.

Explícale que el cuadrado debe abarcar 3 por 3 números como en la imagen. Dile a tu amigo que en cuestión de segundos eres capaz de hacer la suma de esos números y dar el resultado. Demuestra que para conseguir el resultado de la suma de los nueve números, tienes que multiplicar el número que quede en el centro del círculo por 9.

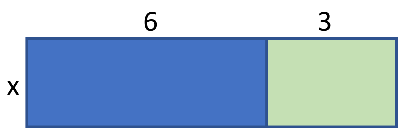
B)

B-1) Observa la siguiente figura:



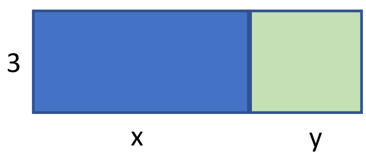
- ★ Calcula el área del del rectángulo grande de dos formas distintas.
- ★ ¿Es posible justificar con este ejemplo alguna propiedad de las operaciones con números?

B-2) Ahora no conocemos las alturas de los rectángulos:



- ★ Calcula el área del del rectángulo grande de dos formas distintas.
- ★ ¿Es posible justificar con este ejemplo alguna propiedad de las operaciones con expresiones algebraicas?

B-3) Ahora no conocemos la base de dos rectángulos.



- ★ Calcula el área del del rectángulo grande de dos formas distintas.
- ★ ¿Es posible justificar con este ejemplo alguna propiedad de las operaciones con expresiones algebraicas?

APRENDE Y APLICA

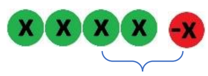
***Suma y resta de expresiones algebraicas*.**

Vamos a introducir las operaciones más básicas con las expresiones algebraicas usando los discos algebraicos. Estas operaciones se hacen para simplificar la escritura o comprobar que dos expresiones representan lo mismo. Comenzamos con la suma o resta de dos expresiones con la misma letra.

Ejemplo 1. ¿Cuánto sería x + 4x? Para calcularlo, representaremos x con un disco algebraico como se muestra en la figura. Para añadir el término 4x, añadimos 4 discos más. Obtendríamos 5 discos.

$$x + 4x = 5x$$

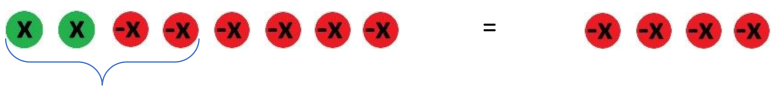
Ejemplo 2: Si queremos calcular 4x – x, ponemos 4 discos para representar 4x, para restar x tomamos el disco opuesto y tenemos en cuenta que un disco positivo y otro negativo se anulan:



$$4x - x = 3x$$

0

Ejemplo 3: ¿Cómo simplificarías 2x – 6x?



0

<u>OJO</u>: 2x – 6x
es lo mismo que
2x + (-6x)

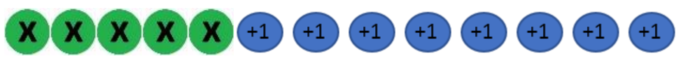
Ejemplo 4: ¿Cómo simplificaríamos la expresión -2x-3x? Para representar la expresión algebraica -2x cogemos dos discos -x y después añadiríamos otros tres discos de -x más, tal y como se muestra en la siguiente figura:

Por tanto, obtendríamos el resultado de $-2x - 3x = -5x$.

Ejemplo 5: Para sumar $2x+3$ y $3x+5$:

$$(2x+3) + (3x+5) = 2x+3+3x+5$$

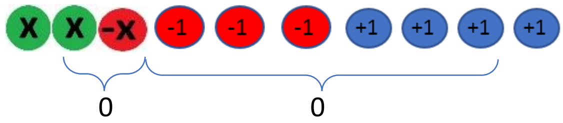
El resultado es 5x + 8, pues juntamos por un lado los discos de x y por otro los de los números:



Ejemplo 6: Para sumar $2x-3$ y $-x+4$:

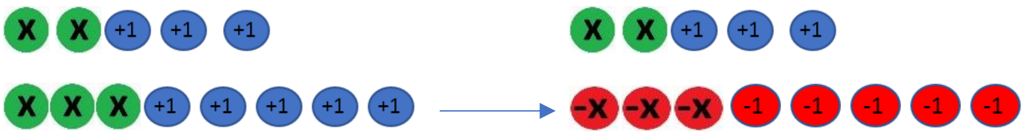
$$(2x-3) + (-x+4) = 2x-3-x+4$$

El resultado es x + 1, pues juntamos por un lado los discos de x y por otro los de los números y quitamos discos que se anulan:

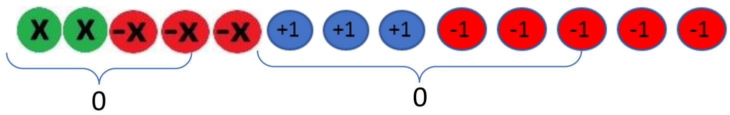


Ejemplo 7: Para restar $2x+3$ y $3x+5$ se suma a $2x+3$ el opuesto de (se dan la vuelta a los discos)

$$(2x+3) - (3x+5) = 2x+3-3x-5$$

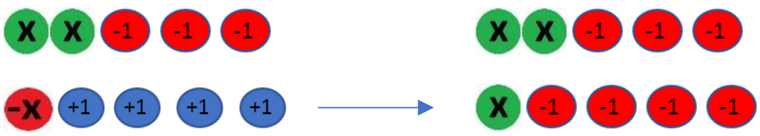


Obteniendo - x - 2 al anularse discos opuestos:



Ejemplo 8: Para restar $2x-3$ y $-x+4$ se hace como en el ejemplo anterior:

$$(2x-3) - (-x+4) = 2x-3+x-4$$



Obteniendo 3x - 7 ya que en este ejemplo no se anula ninguno.

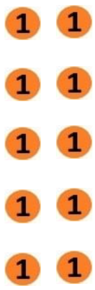
Ejemplo 9: ¿Qué representa la expresión 2x + 3y + 1? Como se puede comprobar empleando discos algebraicos, la expresión no puede ser simplificada.

Ejemplo 10: ¿Cómo realizarías la siguiente operación 2x + 3y – 4x + (-2y)?

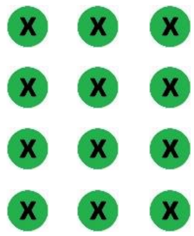
$$2x + 3y + (-4x) + (-2y) \quad = \quad 2x - 4x + 3y - 2y$$

Obtendríamos entonces -2x + y.

Propiedad distributiva. Recuerda que una multiplicación con dos factores se puede representar usando un rectángulo como en la figura:



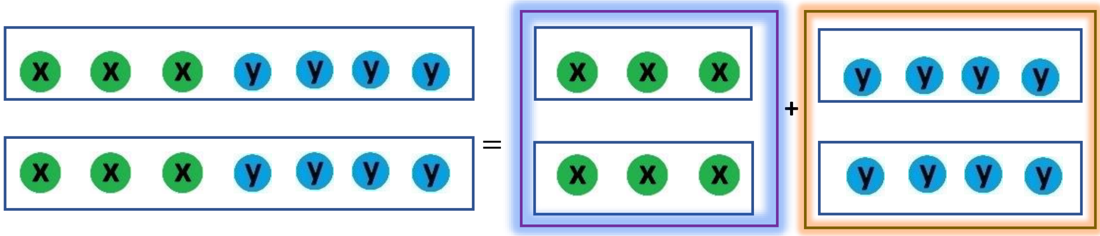
$= 5 \cdot 2$ y también



$= 4 \cdot 3x$

Así, si tuviéramos que hacer el producto $2(3x+4y)$, podríamos formar la figura de la izquierda, duplicando la representación de $3x+4y$. Si reorganizamos como en la izquierda obtenemos

$$2\,(3x + 4y) \quad = \quad 2(3x) + 2(4y) \quad = \quad 6x + 8y$$



Luego también en las expresiones algebraicas se verifica la propiedad distributiva, lo que permite multiplicar un número por una expresión. Por ejemplo:

$$3(2x+1)-2(x+2) = 3(2x)+3\cdot1-2x-2\cdot2 = 6x + 3 - 2x - 4 = 4x - 1$$

PRACTICA

4.1.– Simplifica las siguientes expresiones:

a) 4x + 5x b) 7x – 2x c) 2x + 1 + x + 2 d) 6n – 2 + 5 -2n
e) 3y + 5 - 5y - 3 f) 6x + 2x + 5x -7x g) 3x + 2x + x -11x h) 4x + 8x - 5x + 2x

4.2.– Simplifica:

a) 6x – (-3x) b) 3x – 6x c) -6x – 3x d) 6x – (-3x)

d) -3x + (-6y) – 4x – (-3y) e) -7y + (-2x) – (-2y) + (-5x) f) 6x + (-3z) + 5 – (-4z) + (-x) - 4

4.3.– Utiliza la propiedad distributiva para eliminar el paréntesis:

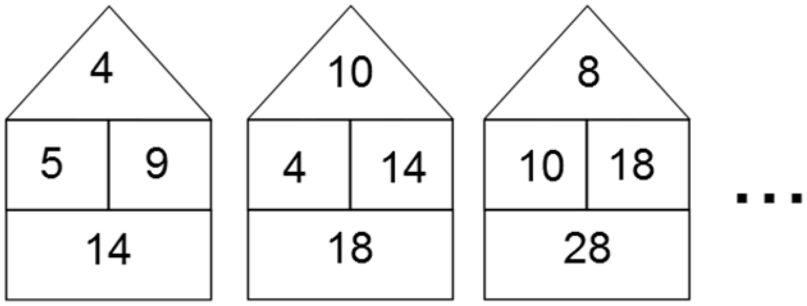
a) $2(x+3)$ c) $-3(2x-1)$
b) $3(2x+4y-2)$ d) $-3(x+y+1)$

4.4.– Aquí hay un conjunto de cinco expresiones: (x + y) (x + 2 y) (x - 2 y) (x + 4 y) (2x + 3y)

Elige cualquier par de expresiones y suma múltiplos de cada una. ¿Puedes encontrar una manera de obtener una respuesta de 5 x + 8y?

LA CASETA DE PLAYA

Una "Caseta de la playa" se genera a partir de sus dos números centrales. ¿Podéis averiguar la regla para obtener los números del tejado y el suelo?

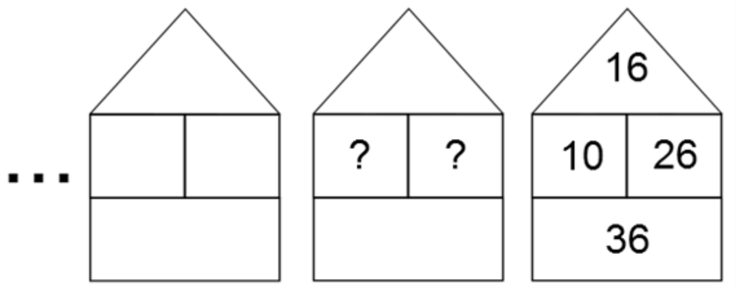


a) Estas casetas forman una secuencia. ¿Podéis ver cómo se forma la segunda caseta a partir de la primera? ¿Y cómo se forma la tercera a partir de la segunda?

b) ¿Podéis dibujar las siguientes casetas en la secuencia? ¿Observasteis algún patrón interesante?

c) Haced algunas secuencias de casetas empezando con vuestros propios números. ¿Estas secuencias siguen patrones similares?

d) Si tenéis una caseta en el medio de una secuencia, ¿Podéis encontrar las casetas que vienen antes de esta? Aquí tenéis un ejemplo para probar:



e) Si conocéis cualquier par de números de una caseta, ¿Puedes averiguar los otros dos?

f) ¿Podéis encontrar una secuencia de casetas donde dos casetas consecutivas tienen el mismo número en el tejado?

g) Si conocéis los números en una caseta, ¿Cómo puedes calcular los números de la cuarta caseta a su derecha? ¿O de la décima? ¿o de la 100?

h) Si conoces los números de una caseta, ¿puedes calcular los números de la sexta caseta a su izquierda? ¿O de la 12? ¿o de la 100?

DIBUJA LAS IDEAS PRINCIPALES DEL TEMA:

- ✓ Un ***patrón*** es una serie de ***elementos*** que se obtienen siguiendo una ***determinada regla***
- ✓ Las ***expresiones algebraicas*** son expresiones con números, letras y operaciones.
- ✓ Las ***expresiones algebraicas*** se usan para representar cantidades desconocidas llamadas ***variables***.
- ✓ En las expresiones algebraicas cuando se sustituyen las letras por valores concretos se obtiene el ***valor numérico*** de la expresión.
- ✓ Las expresiones algebraicas se pueden ***sumar*** juntando expresiones iguales.
- ✓ Las expresiones algebraicas se pueden ***restar*** sumando la expresión opuesta.
- ✓ Las expresiones algebraicas se pueden ***multiplicar por números*** utilizando la ***propiedad distributiva***.

Llegados al final del tema reflexiona sobre lo que has aprendido. Marca en la siguiente tabla lo que corresponde a cada frase, haz la autoevaluación y revisa de nuevo la tabla.

¿CÓMO LO HAGO?	Me cuesta hacerlo	Estoy aprendiendo	Lo hago bien	Soy un experto
Identifico patrones				
Entiendo el concepto de variable como número desconocido				
Traduzco de lenguaje usual a lenguaje numérico				
Traduzco a lenguaje algebraico textos y enunciados				
Calculo el valor de una expresión algebraica				
Sumo y resto expresiones algebraicas				
Utilizo la propiedad distributiva para multiplicar una expresión algebraica por un número				
Explico de forma ordenada y clara los pasos que sigo para resolver un problema matemático				
Expreso las dificultades que tengo a la hora de resolver un problema matemático				
Trabajo en equipo para resolver problemas matemáticos				
Diseño o pienso un plan para resolver un problema matemático, aunque el plan después no funcione				
Doy sentido a los resultados tras resolver un problema matemático				
Explico de forma ordenada y clara los pasos que sigo para resolver un problema matemático				
Expreso las dificultades que tengo a la hora de resolver un problema matemático				

A1. Luis tiene canicas de varios colores (rojas, verdes, blancas y azules) y todas las del mismo color tienen el mismo peso. Vamos a llamar r al peso, en gramos, de cada canica roja.

Expresa en utilizando r las siguientes expresiones:

a) El peso de una canica verde, que pesa 5 gramos más que una canica roja.

b) El peso de una canica blanca, que pesa 3 gramos menos que una canica roja.

c) El peso de una canica azul, que pesa el doble que una canica blanca.

d) Si en total Luis tiene dos canicas rojas, diez verdes, cuatro blancas y una azul, el peso total de las canicas es …

e) Hemos pesado una canica roja y ha pesado 8 g. Calcula el peso de todas las canicas de Luis.

A2. Paula tiene tres hermanos, que son Ana, Berta y Carlos. Ana tiene el doble de años que Paula, Berta tiene 2 años más que Ana y Carlos tiene los años que Paula tenía hace cinco años.

a) Si llamamos x a la edad de Paula. Expresa en función de x las edades de sus hermanos.

b) Si Paula tiene 6 años, ¿cuánto suman las edades de los cuatro hermanos?

A3. En los ejercicios 1 y 2 anteriores hemos traducido del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico y ahora vamos a hacer lo al contrario.

Invéntate enunciados que correspondan con las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x - 1.$

b) $4a$

c) $x + (x + 1)$

d) $t + 5 = 2t + 1$

A4. Simplifica:

a) $3x + 12x$

b) $10t - 7t$

c) $5 + 4x$

d) $3x - 2y + 4 - 2y - 3$

A5. Aplica la propiedad distributiva:

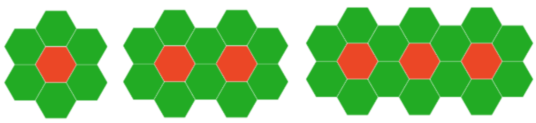
a) $5 \cdot (x + 1)$

b) $2(\mathrm{a} + \mathrm{b})$

c) $-5(3\mathrm{x} - 5\mathrm{y})$

d) $-2(2x + 3y - 5)$

A6. Observa la siguiente secuencia



Dibuja las figuras 4 y 5. ¿Cuántos hexágonos verdes y cuántos rojos contiene cada figura?, ¿Cuántos hexágonos rojos y cuántos verdes tendrá la figura 10? Explica cómo llegas a deducirlo.

Solución A1:

a) $r + 5$
b) $r - 3$
c) $2 \cdot (r - 3)$
d) $2r + 10 \cdot (r + 5) + 4 \cdot (r - 3) + 2 \cdot (r - 3)$
Si operamos en esta expresión, se obtiene: $2r + 10r + 50 + 4r - 12 + 2r - 6 = 18r + 32$
e) $2 \cdot 8 + 10 \cdot 13 + 4 \cdot 5 + 10 = 16 + 130 + 20 + 10 = 176$ gramos pesan todas las canicas de Luis.
También podríamos haber sustituido la r por 8 en la expresión $18r + 32$, de modo que serían $18 \cdot 8 + 32 = 144 + 32 = 176$.

Solución A2:

a) Ana $2x$, Berta $2x + 2$ y Carlos $x - 5$.
b) Si Paula tiene 6 años (es decir $x = 6$) entonces Ana tiene 12 años, Berta 14 y Carlos 1 año. De modo que las edades de los cuatro suman 33 pues 6 + 12 + 14 + 1 = 33.

Solución A3: Para este ejercicio hay infinidad de respuestas posibles. Algunas de estas respuestas podrían ser las siguientes:

a) $3x - 1$. Le restamos una unidad al triple de un número.
b) $4a^2$. El área de cuatro cuadrados.
c) $x + (x + 1)$. La suma de dos números consecutivos.
d) $t + 5 = 2t + 1$. Si a un número le sumamos cinco unidades se obtiene lo mismo que si al doble de dicho número le sumamos una unidad.

Solución A4:

a) $3x + 12x = 15x$
b) $10t - 7t = 3t$
c) $5 + 4x = 5 + 4x$
d) $3x - 2y + 4 - 2y - 3 = 3x - 4y + 1$

Solución A5:

a) $5x + 5$
b) $2a + 2b)$
c) $-15x - 15y$
d) $-4x - 6y + 10$

Solución A6:

El número de hexágonos rojos es la sucesión 1, 2, 3, 4, 5. Como aumenta de uno en uno la figura 10 tendrá 10 también. Los verdes comienzan en 6 y van aumentando 4 cada vez, así que son 6, 10, 14, 18, 22, … En la figura 10 habrá aumentado 4 9 veces por lo que tiene 6+4·9=42.

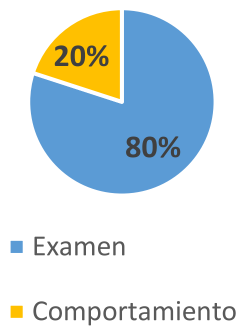
ECUACIONES

ÍNDICE

PROBLEMAS QUE VAMOS A RESOLVER

1.– Pilar, la profesora de Lengua, calcula la nota de sus alumnos utilizando la siguiente fórmula:

$$0{,}8 \cdot \textbf{EXAMEN} + 0{,}2 \cdot \textbf{COMPORTAMIENTO} = \textbf{NOTA}$$



a) SI obtuviste un 6 en el examen y un 8 en el comportamiento ¿Cuál será tu nota en la asignatura?

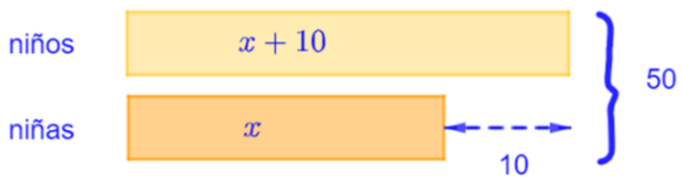
b) Para aprobar la asignatura ¿Qué calificación debes sacar en el examen si tienes un 9 en comportamiento?

c) Javier sacó un 7,5 en el examen de Lengua ¿Qué nota de comportamiento necesita para obtener un 8 en la asignatura?

d) Utiliza los porcentajes de una de tus asignaturas para calcular qué nota debes obtener esta evaluación para aprobar.

2.– La suma de cuatro números impares consecutivos es de 64. ¿Cuáles son esos números?

¿QUÉ SABES DE ...?



VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

$7 + y = 13$, $2y = 12$

VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

1. IDENTIDADES Y ECUACIONES.

RETO

A) Encontrar el valor que verifique la igualdad:

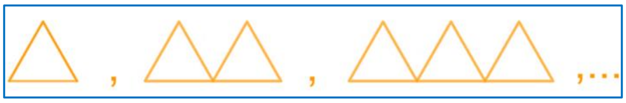
1) $\square + 4 = 5$

2) $2 \cdot \square - 1 = 3$

3) $\square + 1 = 2 \cdot \square - \square + 1$

4) $\square + 6 \cdot \square = 7 \cdot \square$

B) Observa el patrón de los palillos:



1 unidad, 2 unidades, 3 unidades,...

a) Completa la tabla:

Nº de unidades	1	2	3	4	5	6	7
Nº de palillos	3	6					

b) Sin dibujar, escribe el número de palillos necesarios para realizar el caso de 9 unidades y el de 25 unidades.

c) Si el número de unidades es n, ¿podemos saber cuántos palillos necesitamos?

d) Si tengo 99 palillos, ¿cuántas unidades tendré?

APRENDE Y APLICA

Una <u>igualdad</u> está formada por dos expresiones separadas por el signo =. Puede ser <u>numérica</u>, si sólo intervienen números, y <u>algebraica</u>, si intervienen números y letras. Las igualdades numéricas pueden ser ciertas o falsas.

Por ejemplo, tenemos que $2^2 - 1 = 3$ es una igualdad numérica cierta, mientras que $3 + 2 = 6 + 1$ es una igualdad numérica falsa. Y tenemos también las igualdades algebraicas como hemos visto antes, por ejemplo $3a + a = 4a$ y $3b + 1 = 10$.

Una <u>identidad</u> es una igualdad algebraica que es cierta para cualquier valor de las letras. Por ejemplo, si tenemos la expresión $3x + x = 4x$, da igual el valor que le demos a la x, ya que se va a cumplir siempre la igualdad. Por tanto, es una identidad.

x	x	x	x

3x+x

x	x	x	x

4x

Una <u>ecuación</u> es una igualdad algebraica que no es cierta para todos los valores de las letras.

Por ejemplo, si tenemos la expresión 2x + 5 = 9, esta igualdad sólo será cierta si la x toma el valor 3. En cualquier otro caso, será una igualdad numérica falsa. Por tanto, es una ecuación.

x	X	5
	2x+5	
	9	
	9	

La igualdad a + 2a = 3a es cierta para cualquier valor que se dé a la letra a:

	Valor de la izquierda	Valor de la derecha	¿Son iguales las dos partes?
Para a= 1	1 + 2·1 = 3	3·1 = 3	SÍ
Para a = 2	2 + 2·2 = 6	3·2 = 6	SÍ
Para a = -5	-5 + 2·(-5) = -15	3·(-5) = -15	SÍ

¿Puedes entonces deducir si es una ecuación o una identidad?

La igualdad c + 2 = 9 no es cierta salvo para c = 7:

	Valor de la izquierda	Valor de la derecha	¿Son iguales las dos partes?
Para c = 1	1 + 2 = 3	9	NO
Para c = -2	-2 + 2 = 0	9	NO
Para c = 7	7 + 2 = 9	9	SÍ

¿Puedes entonces deducir si es una ecuación o una identidad?

PRACTICA

1.1.– Diferencia entre las siguientes igualdades algebraicas cuáles son identidades y cuáles ecuaciones:

a) 6a = 5a + 3
b) 13 – 2x = 6 – 3x
c) b + 1 = b + 1
d) 7 – 3c = 4 – 3c + 3
e) 5y – 1 = 2y – 4 + 3y
f) 3m + 4 = 2m + 4 + m

1.2.– Escribe ahora tú, tres ecuaciones y tres identidades y explica por qué lo son cada una de ellas.

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

2.ECUACIONES EQUIVALENTES

RETO

A) Relaciona de entre estas ecuaciones las que tienen la misma solución.

7 + x = 13
a + 2 = 9
m – 4 = 4
13 = 9 + n

$\frac{x}{2} = 2$
2c = 12
y + 1 = 1
3w – 2 = 19

B) Averigua cuál de los siguientes números es solución de las siguientes ecuaciones:

ECUACIÓN	POSIBLES SOLUCIONES	SOLUCIÓN	ECUACIÓN	POSIBLES SOLUCIONES	SOLUCIÓN
3y + 7 = y – 3	2, -1, -5		$a^2 - 2 = -1$	-1, -10, 1	
x + 2 = 4x – 1	1, -2, -3		-b – 3 = 7 + b	2, 4, -5	

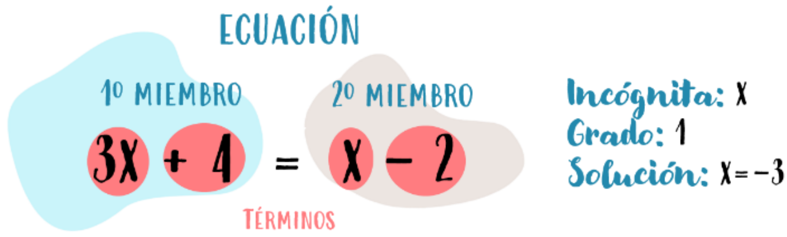
¿Cuáles de ellas tienen la misma solución?

APRENDE Y APLICA

Los miembros de una ecuación son las expresiones algebraicas que hay a cada lado de la igualdad.

Los términos de una ecuación son los sumandos que forman los miembros.

Las incógnitas de una ecuación son las letras que aparecen en los términos cuyos valores son desconocidos.



El grado de una ecuación es el del término de mayor grado.

La solución de una ecuación son los valores numéricos de las incógnitas que hacen cierta la igualdad.

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución. Si tenemos la ecuación d + 2 = 8, y la ecuación 2d + 4 = 16, tenemos que en las dos la solución será d = 6.

PRACTICA

2.1.- Completa la siguiente tabla:

ECUACIÓN	PRIMER MIEMBRO	SEGUNDO MIEMBRO	TÉRMINOS	INCÓGNITA	GRADO
$x + 4 = 14$					
$4 + a^2 = 5$					
$3y = 21$					
$m - 2 = 4$					
$4 - x^2 = 0$					
$3 = d + 3$					

2.2.- La ecuación $3x + 2 = 5$ tiene como solución $x = 1$. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones son equivalentes a esta?

a) $3y + 10 = 20$ c) $4m - 1 = 3m + 3$ e) $\frac{x}{3} = 4$ g) $4k = k + 6$

b) $2a = 2$ d) $n - 1 = 2n - 2$ f) $5 = t + 4$ h) $12w - 3w + 10 = 5w + 18$

2.3.- Para cada una de estas ecuaciones, escribe una ecuación equivalente y halla su solución:

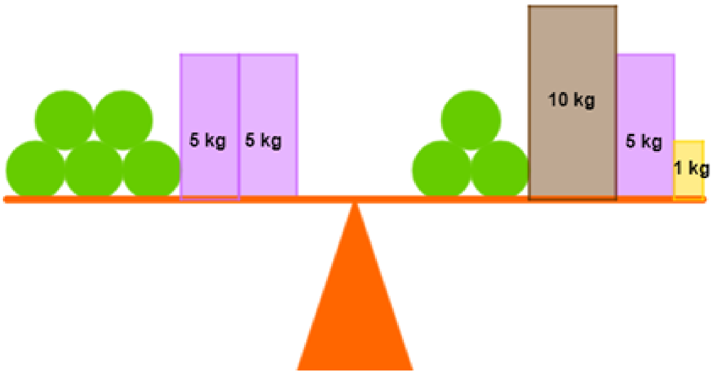
ECUACIÓN	ECUACIÓN EQUIVALENTE	SOLUCIÓN
$y + 4 = 14$		
$5 + a = 4$		
$3x = 21$		
$m - 2 = 4$		
$4 - w = 0$		
$3 = b + 3$		

3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

RETO

A) Inventa un enunciado de un problema que se adapte a esta ecuación $6x - 1 = 4x + 3$, e intenta resolverla.

B) Esta balanza está en equilibrio. Todas las bolas pesan igual. Ten en cuenta que las operaciones que hagas con la balanza deben mantenerla en equilibrio.



- ¿Cuánto pesará cada bola?
- Dibuja en diversas balanzas los pasos que das
- ¿Podrías escribir con símbolos todo lo que has hecho?

APRENDE Y APLICA

***Resolver** una ecuación es encontrar su solución, si ésta existe.* Puede haber casos en los que las ecuaciones no tienen solución, por ejemplo $3c - 1 = 3c$. Esta ecuación no tiene solución.

El álgebra es como un puzzle en el que partimos de una expresión del tipo "$x - 2 = 4$" y queremos terminar con algo de la forma "$x = 6$".

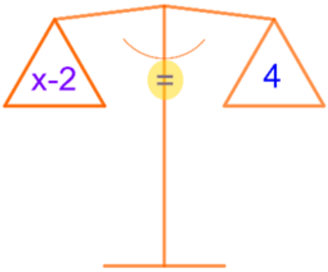
Pero en vez de decir **"*obviamente* x = 6 ",** buscamos la solución siguiendo estos pasos:

- Piensa qué **necesitaríamos quitar** para dejar **"x = ..."**
- Elimínalo **haciendo lo opuesto de lo que tenemos** (sumar es lo opuesto a restar).
- Debes realizar cada acción **en ambos lados de la igualdad.**

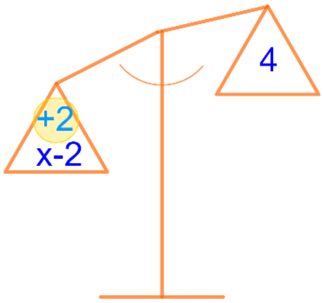
Por ejemplo: **$x - 2 = 4$**

Queremos quitar "-2"	**Hacemos lo opuesto:** "sumar 2":	En **ambos lados**:	Queda ...	***¡Tenemos la solución!***
$x - 2 = 4$	$\begin{array}{r} x\ -2 = 4 \\ +2 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{rcr} x\ -2 & = & 4 \\ +2 & & +2 \\ \hline 0 & & 6 \end{array}$	$x + 0 = 6$	$x = 6$

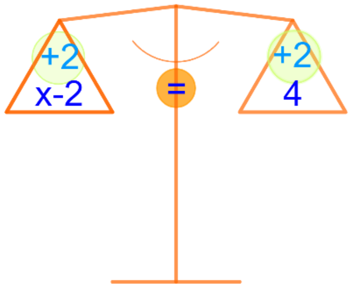
¿Por qué sumamos 2 en ambos lados? → Para *"mantener la balanza en equilibrio"...*



En equilibrio



Suma 2 al lado izquierdo
¡No está en equilibrio!



Suma 2 al lado derecho
Otra vez en equilibrio

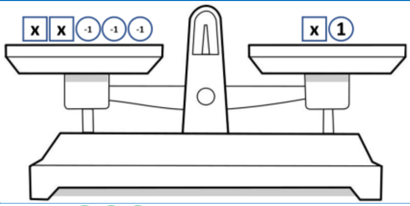
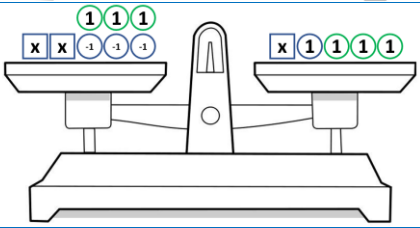
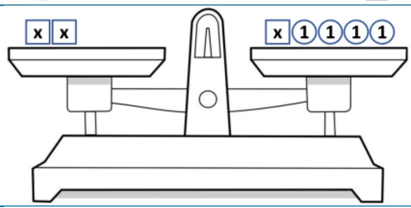
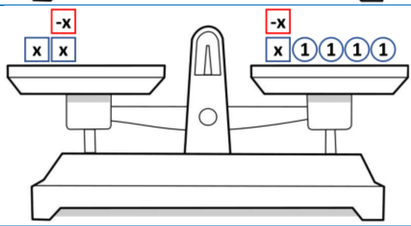
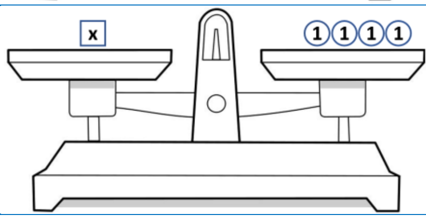
Recuerda: Para mantener el equilibrio, tenemos que hacer lo mismo a los dos lados del "="

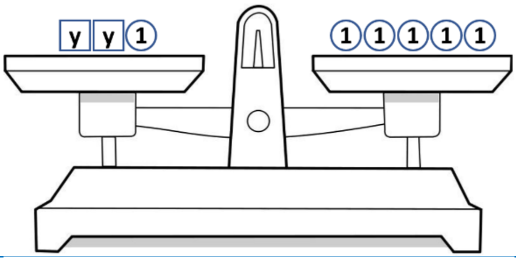
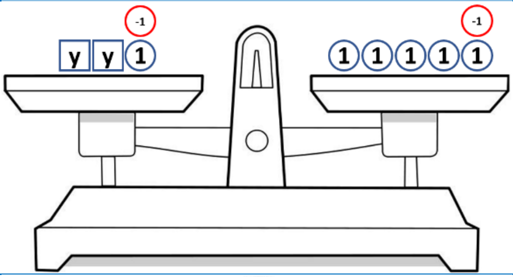
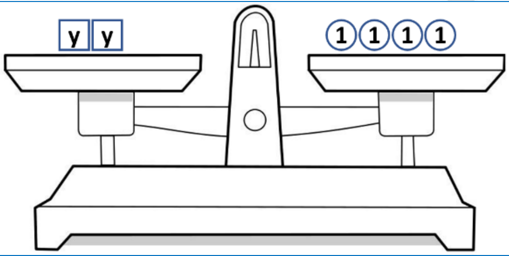
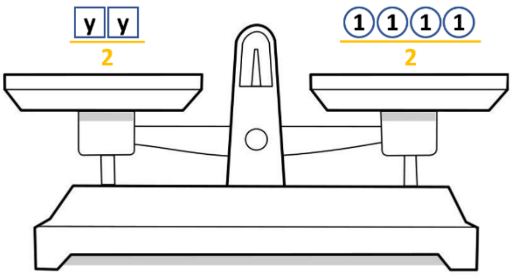
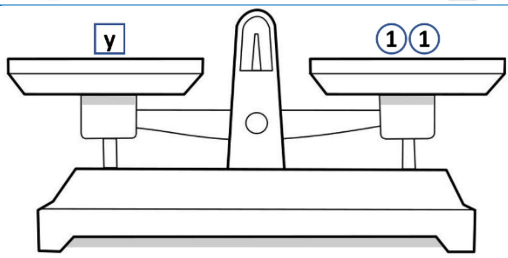
Para resolver una ecuación, tendremos que obtener ecuaciones equivalentes teniendo en cuenta las siguientes propiedades:

- Si se ***suma o se resta*** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.
- Si se ***multiplican o se dividen*** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

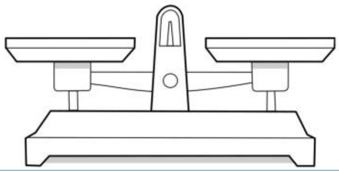
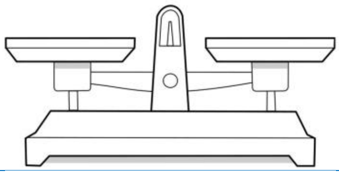
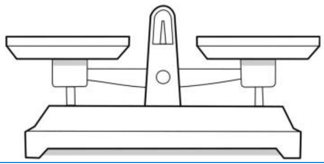
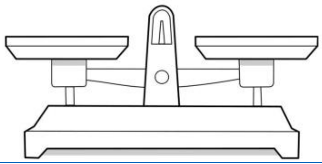
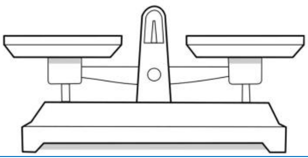
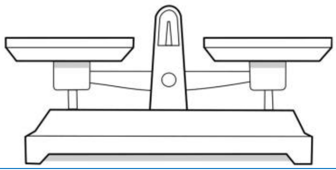
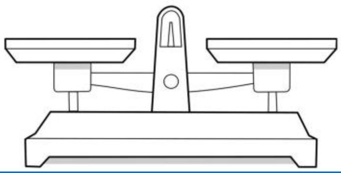
Puedes practicar ejercicios con las balanzas aquí: Equality Explorer (colorado.edu)

https://es.mathigon.org/polypad/8nkXtAkEr2gqA?s=03

$2x - 3 = x + 1$		
$2x - 3 = x + 1$		
$2x - 3 + 3 = x + 1 + 3$	Suma 3 en ambos lados	
$2x = x + 4$		
$2x - x = x + 4 - x$	Resta **x** en ambos lados	
$x = 4$		

2y + 1 = 5		
2y + 1 = 5		
2y + 1 **− 1** = 5 **− 1**	Para quitar +1 usamos -1	
2y = 4		
$\frac{2y}{\mathbf{2}} = \frac{4}{\mathbf{2}}$	Para quitar “multiplicar por 2” dividimos entre 2	
***y* = 2**		

Completa ahora tú las balanzas:

3a – 3 = a + 1		
3a – 3 = a + 1		
3a – 3 **+ 3** = a + 1 **+ 3**	Suma 3 en ambos lados	
3a = a + 4		
3a **– a** = a + 4 **– a**	Resta **a** en ambos lados	
2a = 4		
$\frac{2a}{2} = \frac{4}{2}$	Dividimos entre 2	
***a* = 2**		

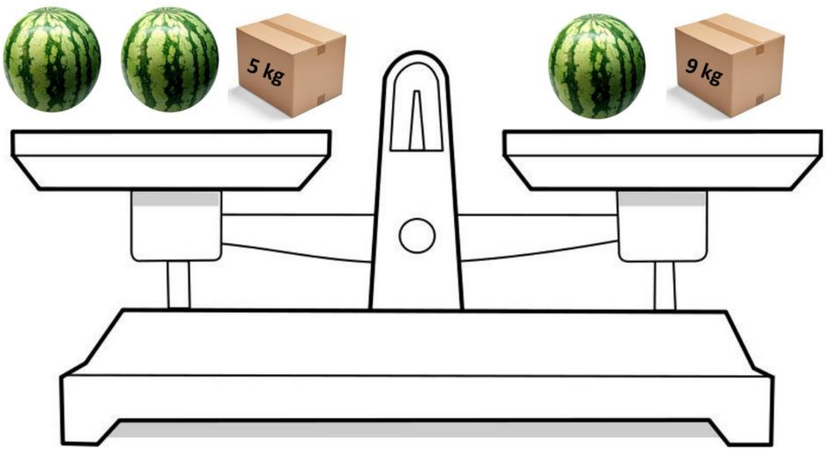
PRACTICA

3.1.– Rellena los huecos para completar la igualdad:

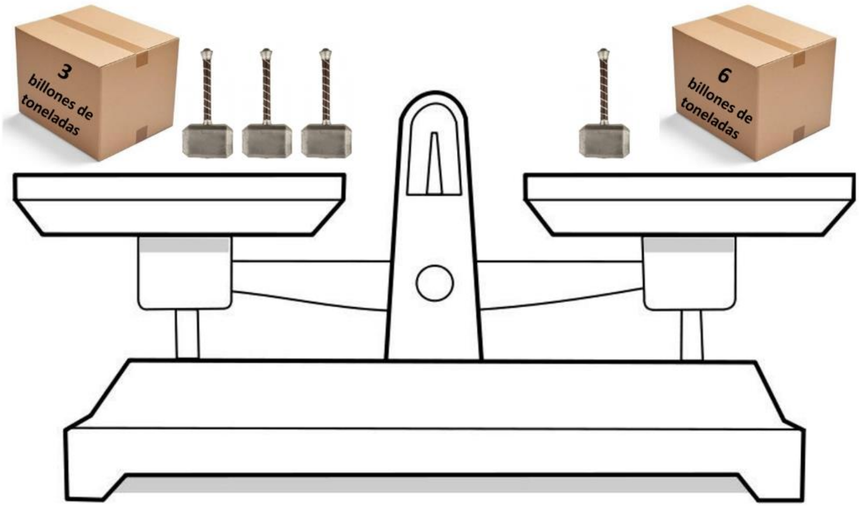
$\square + 3 = 9$	$21 - \square = 13$	$2 \cdot \square = 16$	$2 \cdot \square + 2 = \square + 7$
$\square - 6 = 14$	$\square + 3 = 9$	$\frac{\square}{4} = 5$	$3 \cdot \square - 4 = \square + 8$

3.2.– Observa las siguientes balanzas:

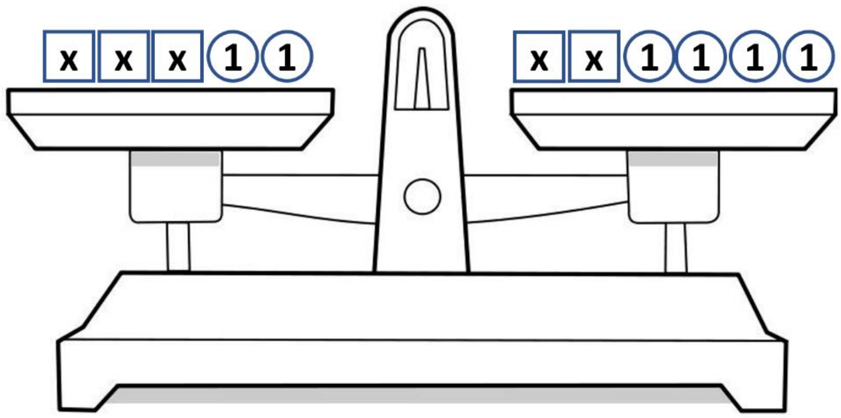
a) ¿Cuánto pesa una sandía?



b) ¿Cuánto billones de toneladas pesa el martillo de Thor?



c) Calcula el valor de x :



d) Asocia cada expresión algebraica a una de las balanzas anteriores:

Ecuación	$2a + 5 = a + 9$	$3 + 3b = b + 6$	$3x + 2 = 2x + 4$
Balanza			

e) En las expresiones anteriores ¿Qué representa la incógnita?

3.3.– Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado, indicando todos los pasos que haces:

$a + 3 = 12$ $\quad$ $b + 4 = -8$

$c - 3 = 6$ $\quad$ $d - 14 = -1$

$4e = 20$ $\quad$ $3f = -27$

$-6h = 42$ $\quad$ $-9k = -36$

$8m + 2 = 66$ $\quad$ $3n - 5 = 16$

$7p + 5 = -23$ $\quad$ $2q - 7 = -19$

$3 - 2s = 25$ $\quad$ $13 - 3t = -20$

$4w + 3 = -7/3$ $\quad$ $3x - 0.9 = 0.81$

3.4.– Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado, indicando todos los pasos que haces:

$8z - 5z = z + 8$ $\quad$ $3w + w + 4 = 2w + 10$

$12a - 7 + a - 5 = 11a - 10 + a$ $\quad$ $18b + 15 + 5b - 9 - 7b = 9b - 8$

$10c + 1 - 7c = 5c - 5 + 4c$ $\quad$ $2 - 13d = 6d + 1 + d - 9$

$3 + x = 9x - 6 + 7x - 4 - x - 1$ $\quad$ $2y - 5 - 7y + 1 = 4y - 6y + 11$

$1 - (1 - a) = 3$ $\quad$ $-(-b + 5) = 4$

$2c - 5\cdot(2 - c) = -(3c - 1)$ $\quad$ $-[-(d - 3) + 4] = 5$

$2\cdot(e + 3) - 6\cdot(5 + e) = 3e + 4$ $\quad$ $5\cdot(2f - 1) + 3\cdot(f - 2) = 10f - 5$

$x - 2\cdot(x - 2) = 3$ $\quad$ $4 \cdot (y - 2) + 3 = 1 - 3 \cdot (2 - y)$

3.5.– Encuentra el error al resolver las siguientes ecuaciones, y reescribe bien la solución:

$3X + 4 = 2X - 1$ $3X - 2X = 2X - 1 + 4 - 2X$ $X = +3$	$6X - 2 + X = -3 + 4X + 2$ $6X - 2 + X - 4X + 2 = 4X - 3 + 2 + 2 - 4X$ $3X = 1$ $3X/3 = 3/1$ $X = 3$
$3X - 3 = -3 - X$ $3X + X - 3 + 3 = -3 + X + 3 - X$ $4X = 0$ $X/4 = 0/4$ $X = 4$	$-X + 2X - 1 = 3 + 4X - 2$ $-X + 2X - 4X - 1 + 1 = 3 - 2 + 1 + 4X - 4X$ $-2X = 2$ $X = 2 + 2 = 4$

3.6.– Escribe una ecuación para cada una de las siguientes soluciones:

a) a = 1 $\quad$ b) b = - 2 $\quad$ c) c = 3 $\quad$ d) d = -5 $\quad$ e) e = 10 $\quad$ f) x = 0

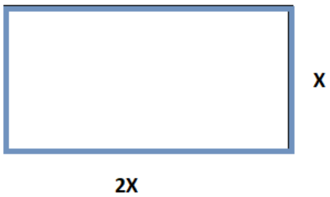
4. RESOLICIÓN DE PROBLEMAS DE ECUACIONES

RETO

A) Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 7.

B) En una granja hay 50 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 120 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay en la granja?

C) Tienes un rectángulo de base el doble de su altura y de perímetro 100 cm. ¿Cuáles son sus dimensiones?



APRENDE Y APLICA

PASO 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema. Lee el enunciado cuidadosamente y anota todos los datos del problema que vas a necesitar. Hazte un esquema o dibujo para terminar de entenderlo. Pregúntate: ¿Qué te piden?

PASO 2: Identifica la incógnita. Mira a ver qué te pide el problema y utiliza una incógnita para la cantidad que tengas que resolver o a una de las que tengas que calcular.

PASO 3: Plantea la ecuación con los datos que nos da el problema. Con los datos que nos ha dado el problema escribe la ecuación que haga que el problema tenga sentido.

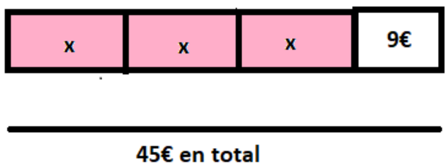
PASO 4: Resuelve la ecuación. Utiliza el método visto anteriormente para resolver la ecuación que te ha salido.

PASO 5: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Una vez que hayas resuelto la ecuación y tengas el resultado, vuelve a leer el problema y mira a ver si esa es la solución que nos piden y si es razonable. Puede que no tenga sentido la solución que hemos obtenido. Por ejemplo, si obtenemos resultados negativos al calcular una distancia o un área.

Saul compró por Internet 3 cajas de bombones. Los gastos de envío eran 9 € y en total pagó 45 €. ¿Cuánto costaba cada caja?

Llamamos **x** al precio de una caja de bombones. Entonces 3 cajas cuestan 3 veces x.
3 veces **x** más 9 € es 45 €:

$$3x + 9 = 45$$

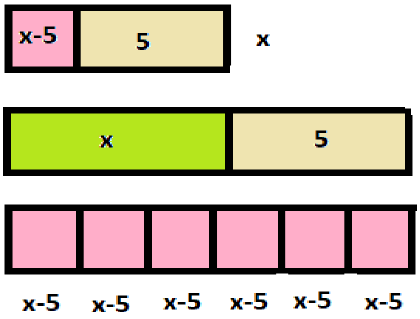


¡Resolvemos la ecuación!

La ecuación inicial es:	$3x + 9 = 45$
Restar 9 a ambos lados:	$3x + 9 - \mathbf{9} = 45 - \mathbf{9}$
Simplificar:	$3x = 36$
Dividir por 3:	$3x\ \mathbf{/3} = 36\ \mathbf{/3}$
Simplificar:	$\mathbf{x = 12}$

Tenemos que cada caja costó **12 €**

¿Cuál es el número entero que al sumarle 5 resulta un número seis veces mayor que el que resulta al restarle 5?



Llamamos **x** al número que queremos calcular. Entonces tenemos una barra de x que al sumarla 5, es lo mismo que seis veces x – 5.

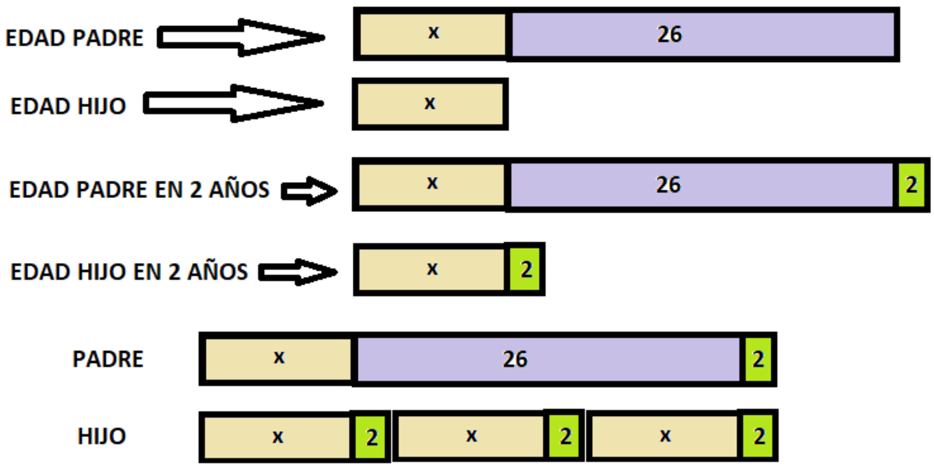
$$x + 5 = 6\cdot(x - 5)$$

¡Resolvemos la ecuación!

La ecuación inicial es:	$x + 5 = 6\cdot(x - 5)$
Quitamos paréntesis:	$x + 5 = \mathbf{6x - 30}$
Restamos 5 a ambos lados:	$x + 5 \mathbf{- 5} = 6x - 30 \mathbf{- 5}$
Restamos 6x a ambos lados:	$x \mathbf{- 6x} = 6x - 35 \mathbf{- 6x}$
Simplificar:	$-5x = -35$
Dividimos por -5:	$\frac{-5x}{\mathbf{-5}} = \frac{-35}{\mathbf{-5}}$
Simplificar:	$\mathbf{x = 7}$

Tenemos que el número es **7**.

Un padre tiene 26 años más que su hijo. Cuando pasen dos años la edad del padre será triple que la del hijo. ¿Qué edades tienen hoy el padre y el hijo?



Llamamos **x** a la edad del hijo.
Llamamos **x + 26** a la edad del padre.
Cuando pasen dos años:
El hijo tendrá **x + 2**
El padre tendrá **x + 26 + 2 = x + 28**

Tres veces la edad del hijo es igual a la edad del padre

$$3\cdot(x + 2) = x + 28$$

¡Resolvemos la ecuación!

La ecuación inicial es:	$3\cdot(x + 2) = x + 28$
Quitamos paréntesis:	$\mathbf{3x + 6} = x + 28$
Restamos 6 a ambos lados:	$3x + 6 \mathbf{- 6} = x + 28 \mathbf{- 6}$
Simplificar:	$3x = x + 22$
Restamos x a ambos lados:	$3x \mathbf{- x} = x + 22 \mathbf{- x}$
Simplificar:	$2x = 22$
Dividimos entre 2 a ambos lados:	$\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{22}{\mathbf{2}}$
Simplificar:	$\mathbf{x = 11}$

La edad del hijo será **11 años** y el padre tiene **37 años**.

PRACTICA

4.1.– Si al doble de un número le sumas 6 obtienes 18. ¿De qué número se trata?

4.2.– Halla las edades de tres hermanos sabiendo que suman 60 años, que los dos pequeños se llevan dos años, y que el mayor tiene tantos años como los otros dos juntos.

4.3.– Tengo 30 monedas de 1€ y 2€, que valen en total 42€. ¿Cuántas monedas tengo de cada clase?

4.4.– Si un triángulo isósceles tiene un perímetro de 40 cm, y su lado desigual mide 8 cm menos que sus lados iguales, ¿cuánto miden sus lados?

4.5.– El patio de un colegio es rectangular, el doble de largo que de ancho, y su perímetro es de 600 m. Si se quiere poner una valla que cuesta a 2€ el metro en el lado más largo, y 1€ en el lado corto, ¿cuánto habrá que pagar?

4.6.– Si Pablo tiene 10 años y su madre 36, ¿cuántos años deben pasar para que la edad de la madre sea el doble de la de su hijo?

4.7.– Inventa un problema para cada solución:

A) $x = 5$

B) $x = 12$

Cuadrados mágicos

- Forma grupos de 3 o 4 alumnos.
- En el siguiente cuadrado escribe los números del 1 al 9 de forma que la suma de sus filas, sus columnas y en diagonal, sea 15.

- Con el mismo cuadrado, intenta escribir con lenguaje algebraico lo que valdría cada celda si todas las sumas tienen que ser las mismas.
- Ahora en el siguiente cuadrado, escribe los números del 1 al 16 de forma que la suma de las filas y de las columnas sea 34.

- En el mismo cuadrado, intenta generalizar con el lenguaje algebraico de forma que cada fila y columna sumen lo mismo.
- Busca en internet cuadrados mágicos famosos, y quién los creó.
- Hay que explicar los pasos seguidos en el grupo para resolver la actividad.

Solución de la actividad

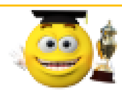
De un vistazo

Dibuja las ideas principales del tema:

- ✓ Diferenciar entre identidad y ecuación.
- ✓ Partes de una ecuación: miembros, términos, incógnitas, grado y solución.
- ✓ Ecuaciones equivalentes.
- ✓ Resolución de ecuaciones de primer grado.
- ✓ Resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado.

EVALÚA Y AFIANZA

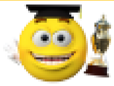
Llegados al final del tema reflexiona sobre lo que has aprendido. Marca en la siguiente tabla lo que corresponde a cada frase, haz la autoevaluación y revisa de nuevo la tabla.

¿SOY CAPAZ DE HACERLO?	 No soy capaz	 Sólo a veces. Aún me cuesta	 En general creo que sí sería capaz	 Sin ninguna duda. ¡Puedo con ello!
Reconocer lo que es una igualdad algebraica				
Distinguir entre identidad y ecuación				
Reconocer los miembros de una ecuación				
Reconocer los términos de una ecuación				
Identificar el grado de una ecuación				
Reconocer cuál es la incógnita de una ecuación				
Entender lo que es la solución de una ecuación				
Escribir ecuaciones equivalentes a una dada				
Entender qué es resolver una ecuación				
Resolver ecuaciones sencillas, entendiendo los pasos				
Resolver ecuaciones con paréntesis, entendiendo los pasos				
Identificar en un problema los datos conocidos y los datos que hay que hallar				
Reconocer la incógnita en los datos de un problema				
Saber escribir en el lenguaje algebraico la ecuación que resuelve el problema				
Inventar problemas en los que se usen ecuaciones				
Explicar la solución de los ejercicios y problemas				
Comprobar la solución del problema				
Ser capaz de resolver problemas de geometría				
Ser capaz de resolver problemas de números				
Ser capaz de resolver problemas de edades				
Ser capaz de resolver problemas con precios				
Explicar de forma ordenada y clara los pasos que sigo para resolver un problema matemático				
Expresar las dificultades que tengo a la hora de resolver un problema matemático				

¿SOY CAPAZ DE HACERLO?	No soy capaz	Sólo a veces. Aún me cuesta	En general creo que sí sería capaz	Sin ninguna duda. ¡Puedo con ello!
Razonar o argumentar las decisiones que tomo al resolver un problema				
Motivarme para enfrentarme a los problemas matemáticos				
Trabajar en equipo para resolver problemas matemáticos				
Diseñar o pensar un plan para resolver un problema matemático, aunque el plan después no funcione				
Dar sentido a los resultados tras resolver un problema matemático				
Expresar problemas cotidianos en lenguaje matemático cuando veo que las matemáticas pueden ayudar a resolverlos				
Reconocer problemas cotidianos que pueden ser resueltos utilizando las matemáticas				

¿ME SIENTO, ME VEO O PIENSO ASÍ?	En absoluto.	De vez en cuando, pero en general no.	Con bastante frecuencia.	Casi siempre.
Comprendo las matemáticas				
Estoy deseando aprender nuevas cosas en matemáticas				
Hacer matemáticas es fácil para mi				
Las matemáticas están en todas partes de nuestra vida cotidiana				
Las matemáticas me confunden				
Las matemáticas me cuestan mucho				
Las matemáticas son aburridas				
Saber matemáticas me será útil en el futuro				
Me encantan las matemáticas				
Uso las matemáticas en otras asignaturas				
Se me dan bien las matemáticas				
Me lo paso bien resolviendo pasatiempos o retos matemáticos				

AUTOEVALUACIÓN

¿ME SIENTO, ME VEO O PIENSO ASÍ?	 En absoluto.	 De vez en cuando, pero en general no.	 Con bastante frecuencia.	 Casi siempre.
Mucha gente usa matemáticas en su trabajo				
No es necesario saber matemáticas				
No necesitaré nunca saber matemáticas cuando deje de estudiar				
Puedo resolver problemas difíciles de matemáticas				
Reconozco si mis respuestas en matemáticas tienen sentido				
Resolver problemas de matemáticas es divertido				
Resuelvo problemas de matemáticas por mi cuenta solo por gusto				
Saber matemáticas es útil				
Odio las matemáticas				
Me lo paso bien jugando a juegos matemáticos				
Solo uso matemáticas en clase de matemáticas				
Soy muy buena /o en matemáticas				
Me lo paso bien estudiando matemáticas				
Uso matemáticas fuera de la clase de matemáticas				

AUTOEVALUACIÓN

A1. Lee la siguiente información y responde a las siguientes preguntas:

"Los precios de alquiler de material en la estación de esquí son":

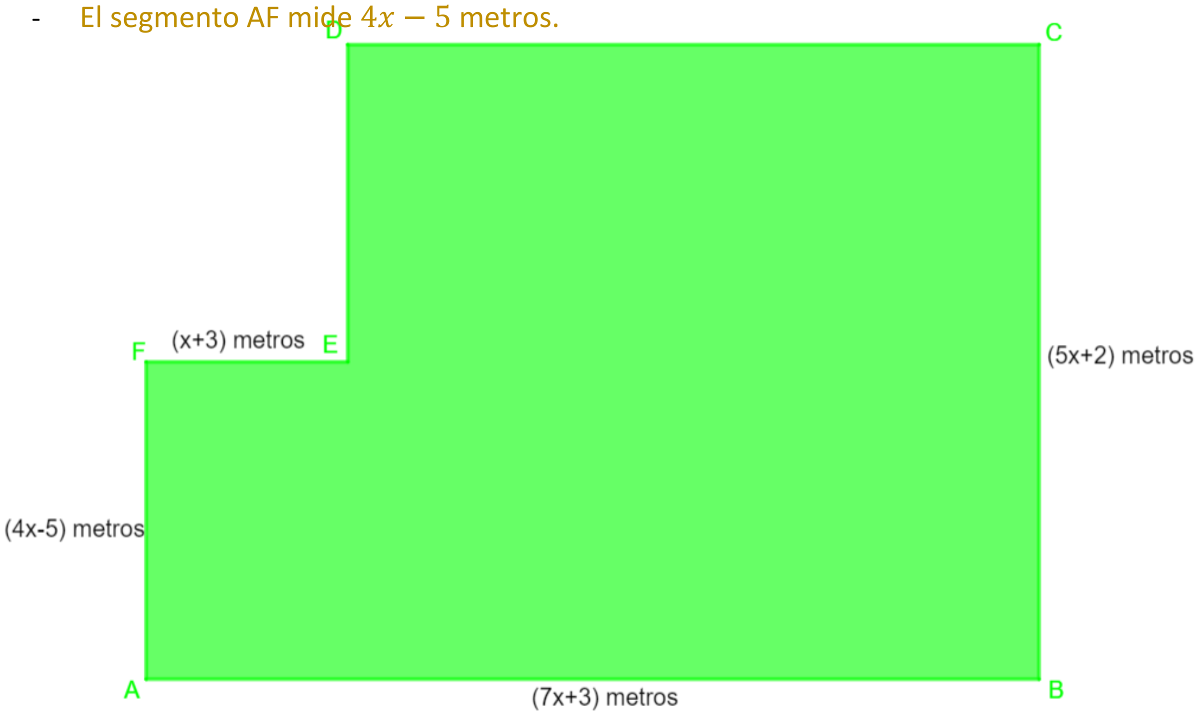
	Individual	Familia
Alquiler para los primeros 2 días	25€	90€
Alquiler para cada día a mayores	6€	20€

PREGUNTAS:

1. ¿Cuánto pagará Carmen por alquilar material 6 días?
2. Escribe una fórmula para saber cuánto tiene que pagar una persona por alquilar material n días, con $n > 2$. ¿Y una familia?
3. ¿Es posible que una familia de 3 personas pague menos eligiendo la forma de pago individual? ¿Y una de 4?
4. Si no quiero gastarme más de 79€, ¿cuántos días podré alquilar el material?

A2. Sergio quiere vallar su jardín, y necesita calcular cuántos metros de valla debe comprar.

- La pared AB mide $7x + 3$ metros.
- El segmento EF mide $x + 3$ metros.
- El segmento BC mide $5x + 2$ metros.
- El segmento AF mide $4x - 5$ metros.



PREGUNTAS:

1. Halla una expresión, en función de x, para la medida del segmento CD.
2. Halla una expresión, en función de x, para la medida del segmento DE.
3. Sergio sabe que el segmento BC es el doble que el segmento AF. Escribe su ecuación correspondiente, y halla el valor de x.
4. Calcula los metros de valla que Sergio necesita, es decir, el perímetro de su jardín.
5. Si el precio del metro de valla vale 2€, ¿cuánto se gastará en poner la valla de su jardín?

A3. Jaime y Mónica tienen que resolver la siguiente ecuación:

$$4x - 5 = 3x - 6$$

- Jaime dice que primero va a restar 3x a ambos lados de la igualdad, y después sumará 5 a ambos lados de la igualdad.
- Mónica afirma que directamente sumará 5-3x a ambos lados de la igualdad.

¿Obtendrán el mismo resultado? ¿Por qué?

AUTOEVALUACIÓN

SOLUCIÓN A1:

1. $25 + 6 \cdot 4 = 25 + 24 = 49$€
2. Individual = $25 + 6\cdot(n - 2) = 25 + 6\cdot n - 12 = 6\cdot n + 13$

   Familiar = $90 + 20\cdot(n - 2) = 90 + 20\cdot n - 40 = 20\cdot n + 50$
3.

FAMILIA DE 3 MIEMBROS		FAMILIA DE 4 MIEMBROS	
Individual	Familiar	Individual	Familiar
$3\cdot(6\cdot n + 13) =$ $18\cdot n + 39$	$20\cdot n + 50$	$4\cdot(6\cdot n + 13) =$ $24\cdot n + 52$	$20\cdot n + 50$

   Si la familia es de 3 miembros es mejor elegir el individual, mientras que si es de 4 miembros, es mejor el familiar.
4. Resolvemos la ecuación $6\cdot n + 13 = 79$, y nos da $n = 11$ días.

SOLUCIÓN A2:

1. La medida de CD es: $(7x + 3) - (x + 3) = 6x$
2. La medida de DE es: $(5x + 2) - (4x - 5) = x + 7$
3. Tenemos que resolver la ecuación: $7x + 3 = 2\cdot(4x - 5)$. La solución es $x = 13$.
4. El perímetro será: $P = (7\cdot13 + 3) + (5\cdot13 + 2) + (6\cdot13) + (13 + 7) + (13 + 3) + (4\cdot13 - 5)$ $= 94 + 67 + 78 + 16 + 47 = 302$ metros.
5. Para calcular el precio será: Precio = 2€/m · 302 m = 604€.

SOLUCIÓN A3: La solución es la misma porque se puede hacer en dos pasos o en uno:

JAIME	MÓNICA
$4x - 5 = 3x - 6$	$4x - 5 = 3x - 6$
$4x - 5 - 3x = 3x - 6 - 3x$	$4x - 5 + 5 - 3x = 3x - 6 + 5 - 3x$
$x - 5 = -6$	$x = -1$
$x - 5 + 5 = -6 + 5$	
$x = -1$	

ISBN: 978-8-49718-727-5

ISBN: 978-8-49718-726-8