Resolución de problemas con la "Metodología Singapur"

Pedro Ramos Alonso
Facultad de Educación
Universidad de Alcalá
pedro.ramos@uah.es

http://masideas-menoscuentas.com/
@MsIdeasMnosCtas

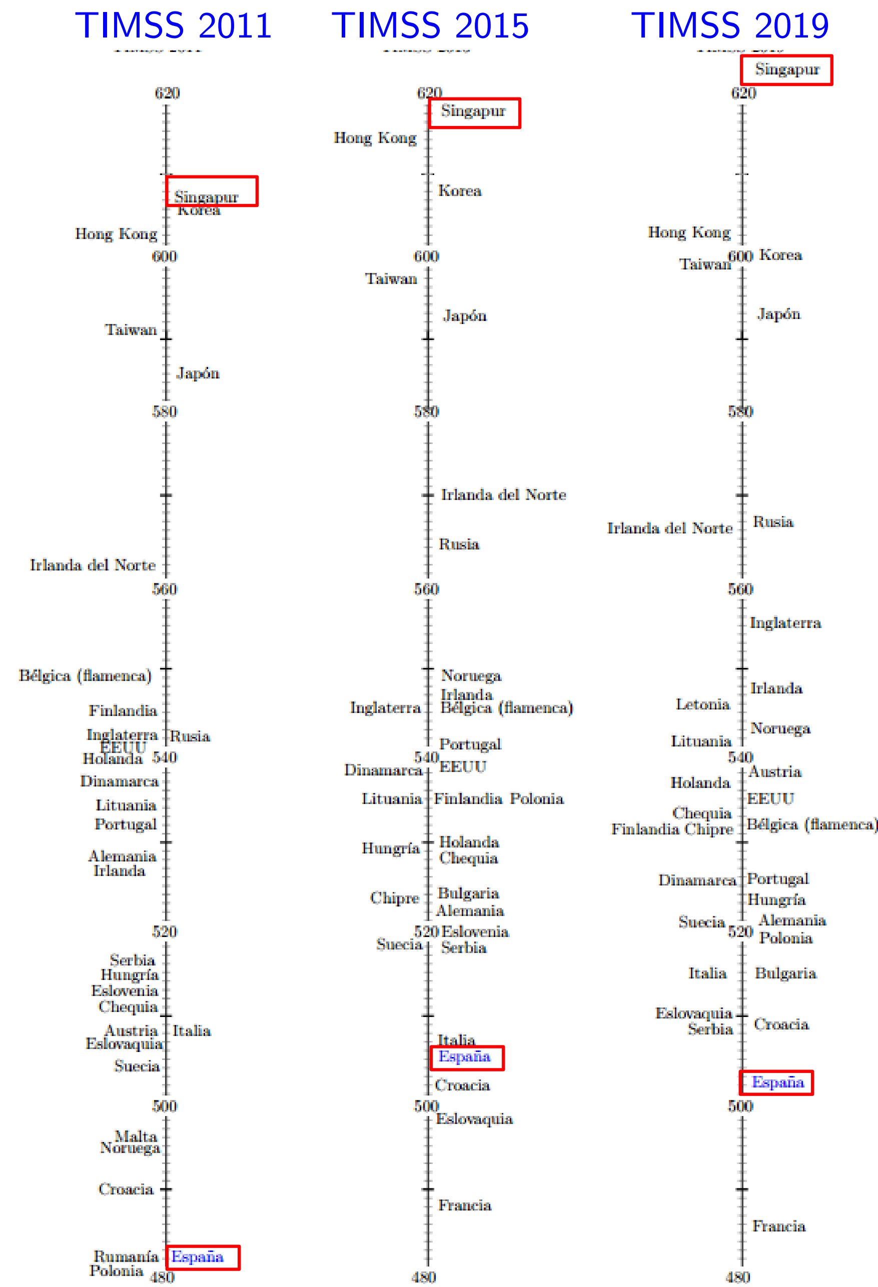
La situación actual en España

* ¿Estamos de acuerdo en que tenemos problemas?

* Información:

  https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/timss/timss-2019.html

* ¿Tenemos un diagnóstico para origen de los problemas?



Un vídeo para reflexionar

* Sobre la enseñanza de las matemáticas en Singapur en los años 70:

  https://youtu.be/3kxs5hOHpbo

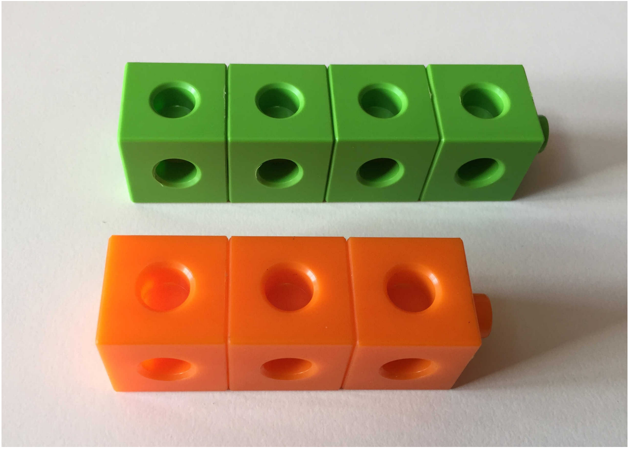
* Sus errores:
  - Exceso de cálculos tediosos.
  - Aprendizaje rutinario de procedimientos, sin entenderlos.
  - Aprendizaje memorístico.

* El desarrollo de lo que conocemos como "matemáticas Singapur" fue la respuesta.

* Basado en ideas occidentales (y bien conocidas en didáctica de las matemáticas).

Fundamentos metodológicos

$\boxed{1}$ El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

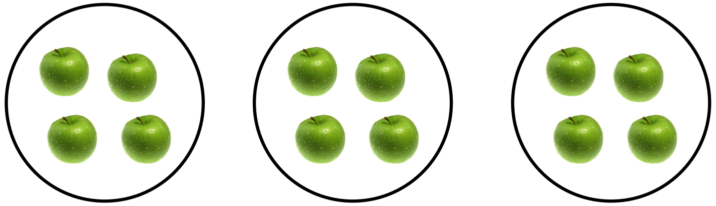
(1)  

Concreta

Fundamentos metodológicos

$\boxed{1}$ El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

¿Cuántas manzanas hay?



(2) Pictórica (gráfica, visual)

Fundamentos metodológicos

$\boxed{1}$ El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

(3)

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 3+2}}{27+5} = 30 + 2 = \boxed{}$$

$$4 \times 3 = 12$$

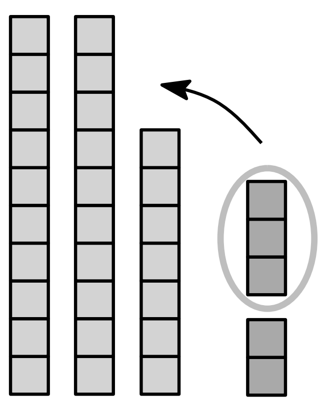
CPA

Abstracta (simbólica)

Fundamentos metodológicos

$\boxed{2}$ El aprendizaje de los procedimientos y la comprensión de los conceptos deben trabajarse en paralelo.

Richard Skemp: Relational understanding and instrumental understanding (1976)



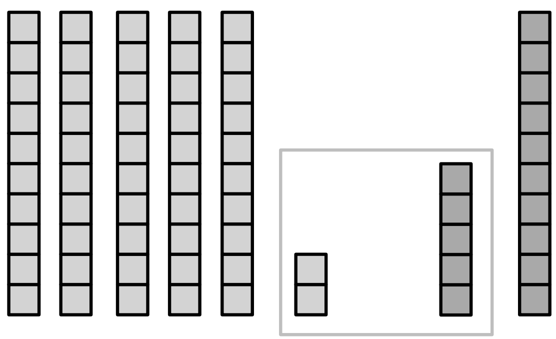
$$27+\underset{\substack{\downarrow\\ 3+2}}{5} = 30+2 = \boxed{}$$

$$\begin{array}{rcc} & {\scriptstyle 1} & \\ & 2 & 7 \\ + & & 5 \\ \hline & 3 & 2 \end{array}$$

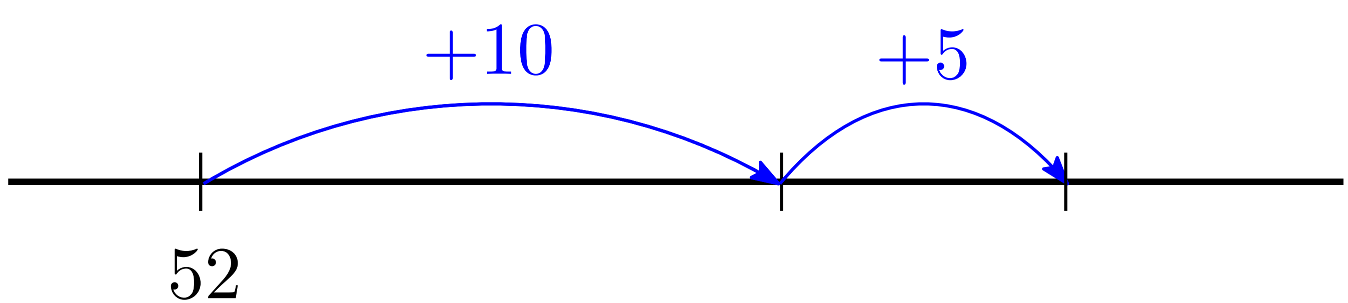
Fundamentos metodológicos

$\boxed{3}$ Variedad en las presentaciones (Zoltan Dienes)

La comprensión de un concepto es mejor si se presenta desde distintos puntos de vista.



$$52 + 15 = \boxed{}$$

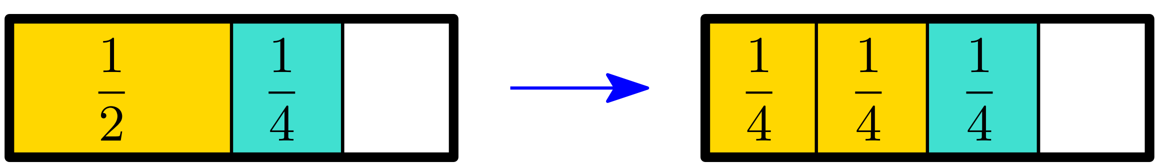


Fundamentos metodológicos

$\boxed{4}$ El andamiaje y la zona de desarrollo próximo (Vygotsky)

En lugar de ir diciendo al alumno “esto se hace así”, se le proponen actividades que estén en su zona de desarrollo próximo.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$



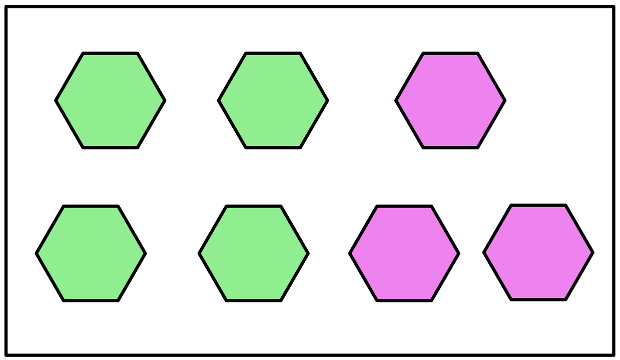
Fundamentos metodológicos (resumen)

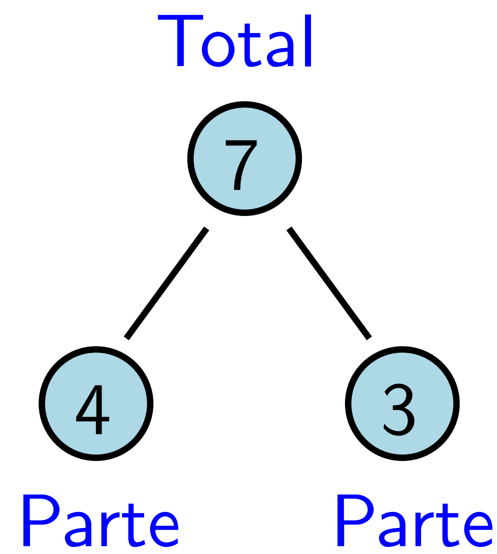
- El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)
- El aprendizaje de procedimientos y la comprensión de los conceptos deben ir en paralelo (Richard Skemp)
- La importancia de la variedad en las presentaciones (Zoltan Dienes)
- El andamiaje y la zona de desarrollo próximo (Lev Vygotski)

Y un elemento adicional:

- La importancia de la verbalización.

Los números conectados



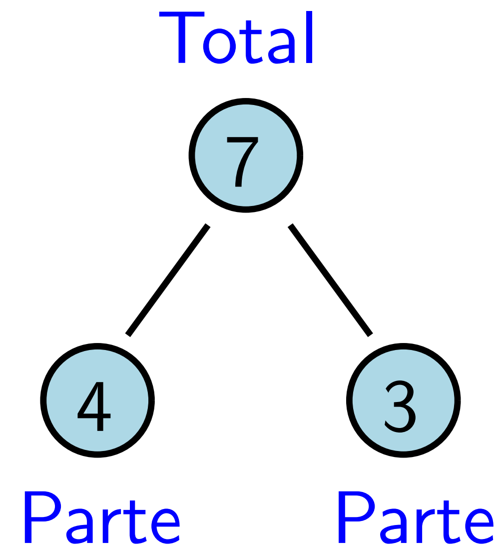


"number bonds"

cuatro y tres son siete

(esto debería ser previo a la suma)

Números conectados y policubos



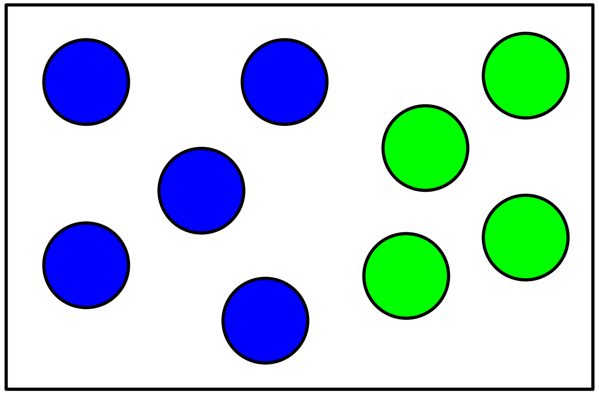
Herramienta virtual (gratuita)

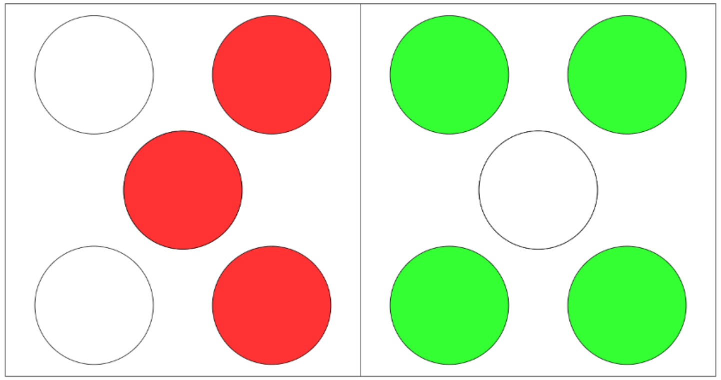
https://www.didax.com/apps/unifix/

Regletas

Descomposiciones numéricas

* Muy importante trabajarlas en profundidad.



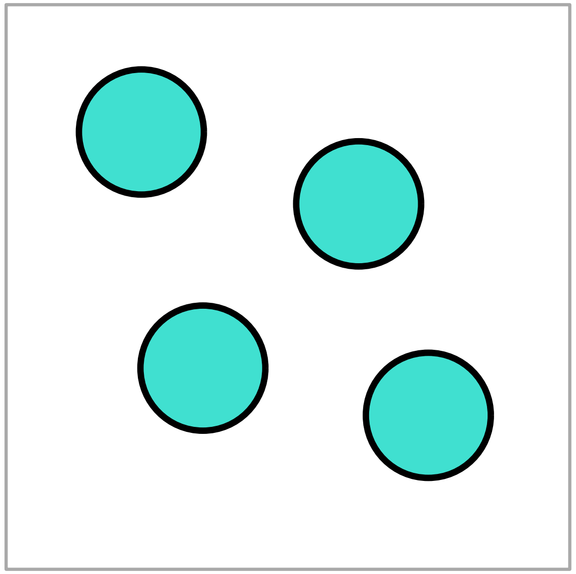


Rejilla húngara

https://mathsbot.com/manipulatives/hungarianFrame

* ¿Otras ideas para trabajar las descomposiciones numéricas?

La subitización



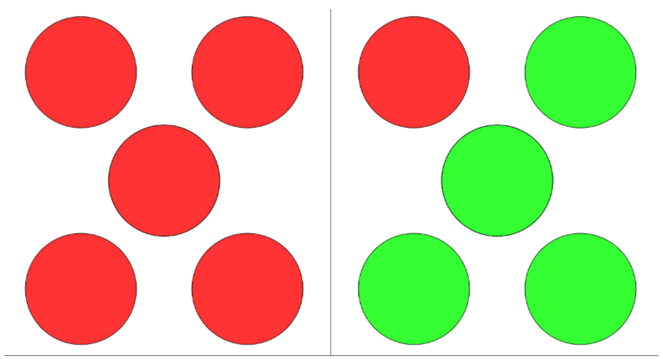
"contar sin contar"

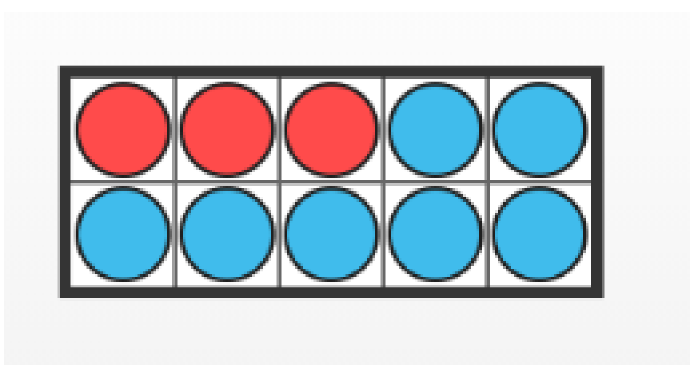
* Es una habilidad que conviene trabajar (con actividades adecuadas a la madurez de los alumnos, por supuesto).

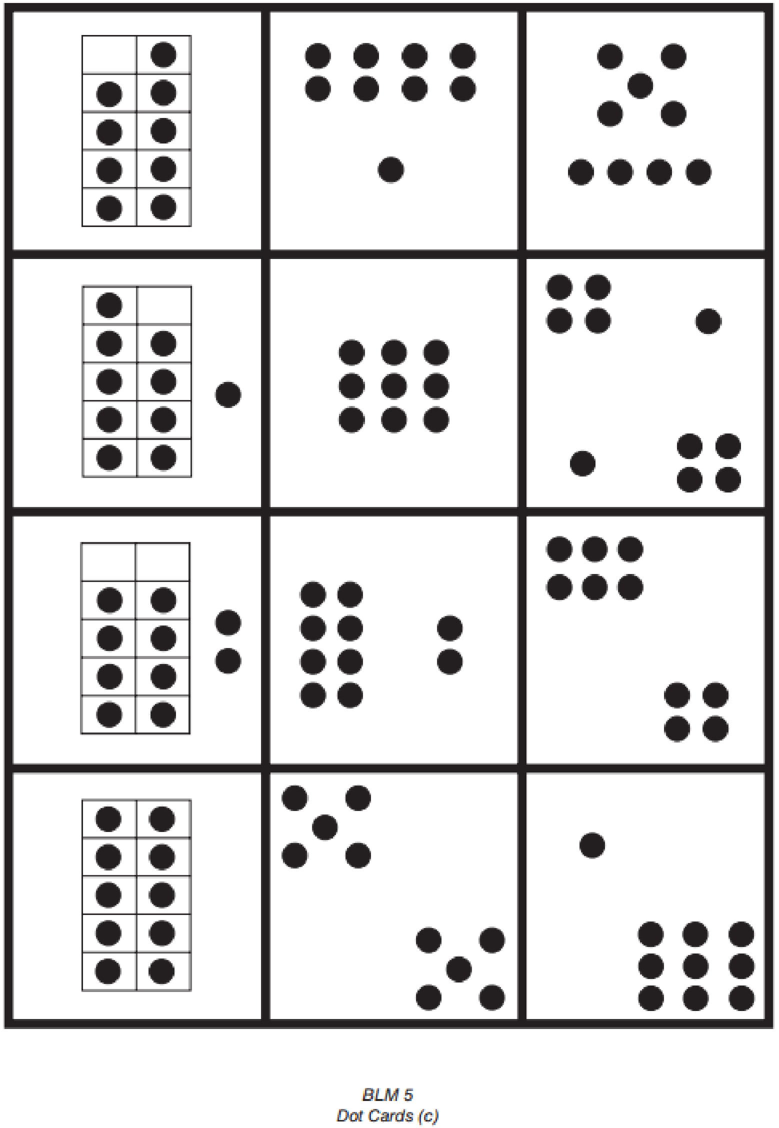
  Y en la "dosis" adecuada

Descomposiciones del 10

* Serán especialmente importantes cuando los números crezcan.







Tarjetas de puntos

https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps

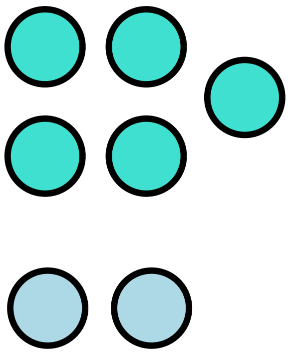
Materiales

policubos

cubos encajables

Primeras preguntas/problemas

1. Alicia tiene 5 caramelos, y Benito tiene 2 caramelos más que Alicia. ¿Cuántos caramelos tiene Benito?
2. Alicia tiene 2 caramelos más que Benito. Benito tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Alicia?



* Preguntas de este tipo ayudan a establecer relaciones del tipo "dos más", "dos menos", que son importantes para desarrollar el sentido numérico.
* Importante: con materiales manipulativos.
* El lenguaje es importante:
  - los términos "anterior" y "posterior".
  - ¿qué preferimos 4 es menor que 7 o $4 < 7$?

Formas de sumar

1. Sumar contando.
   a) contar todo.
   b) contar desde un sumando – el mayor.

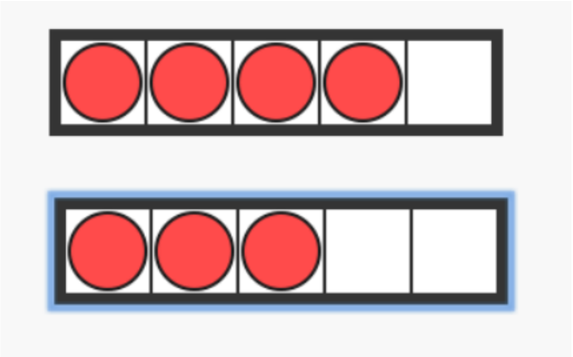
2. Sumar sin contar.

   Fundamental desarrollar estrategias antes de empezar con el algoritmo tradicional.

   Hay que trabajarlo de forma gradual, primero hasta el 10.

Estrategias de iniciación a la suma

* Rejillas numéricas (grupos de 5).



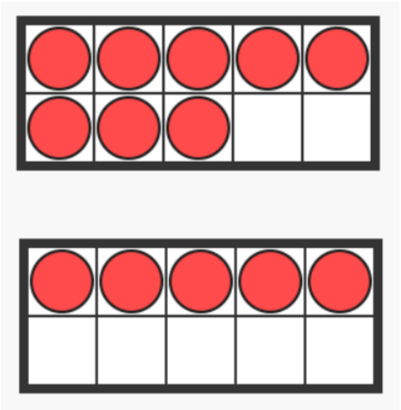
La subitización y la suma sin contar

* ¿Cuántas fichas hay?

Actividad: suma de dos números de una cifra

* Piensa diferentes estrategias para calcular $8 + 5$.

$$8 + 5 = \text{“diez y tres”}$$



https://apps.mathlearningcenter.org/number-frames/

* Una recomendación de lectura sobre psicología del aprendizaje:

  D. T. Willingham: ¿Por qué a los niños no les gusta ir a la escuela?

El número de dos cifras

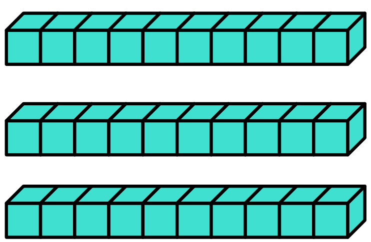
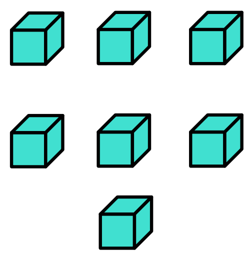
* Bloques de base 10

* Una alternativa online: https://apps.mathlearningcenter.org/number-pieces/

Algoritmos de la suma

- Hay formas muy distintas de presentar el "algoritmo tradicional".

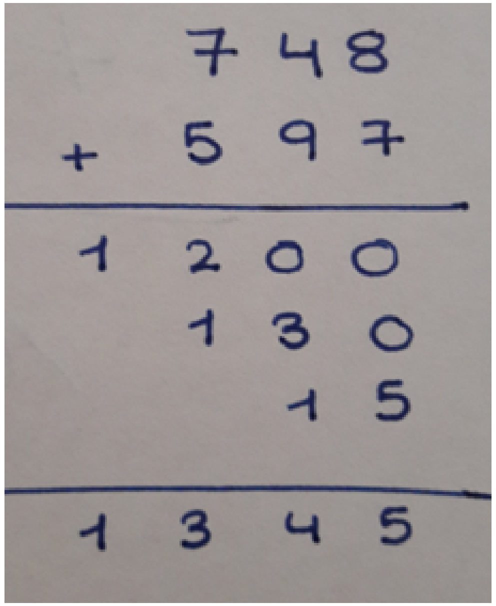
Tabla de valor posicional

decenas	unidades
dieces	unos
	

37

Algoritmos de la suma

* Y hay algoritmos “alternativos”:



ABN

Estrategias tipo “cálculo mental”

Una buena recopilación:

https://twitter.com/ManipulayAprend/status/1611695563027644416

* Temas para la reflexión: ¿ventajas e inconvenientes? ¿Es necesario el estudio de un algoritmo “formal”?

La resta

“De 9 quitamos 3”

1	2	3	4	5	6	~~7~~	~~8~~	~~9~~

$$9 - 3 = \boxed{}$$

“Del 6 al 9 van ...”

1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$9 - 6 = \boxed{}$$

$\ast$ Hay que trabajar los dos significados.

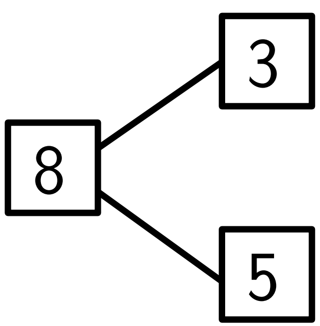
Formas de restar

1. Restar contando.
   a) restar quitando.
   b) contar desde el menor.

2. Restar sin contar.

   Fundamental desarrollar estrategias antes de empezar con el algoritmo tradicional.

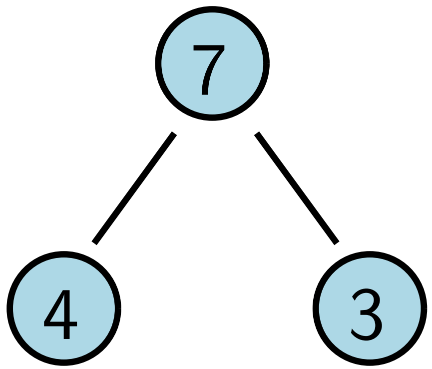
* La conexión con la suma es fundamental.
* Los números conectados son una herramienta muy útil.



$$3 + 5 = 8 \qquad 8 - 5 = 3$$

$$5 + 3 = 8 \qquad 8 - 3 = 5$$

Números conectados - Suma - Resta



$$4 + \square = 7$$

$$7 - \square = 3$$

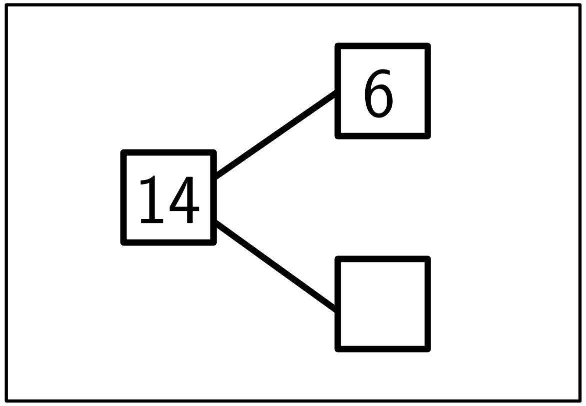
$$7 = 3 + \square$$

$$3 + 4 = \square + 5$$

Actividad

* Piensa estrategias para calcular $14 - 6$ (sin contar).

* Observaciones:
  - Con materiales manipulativos.
  - Restamos quitando (¿qué representamos?)



$$14 - 6 =$$

$$4 \qquad 2$$

"Quitar de 10"

$$14 - 6 =$$

$$4 \qquad 10$$

$$10 - 6 = 4$$

$$4 + 4 = 8$$

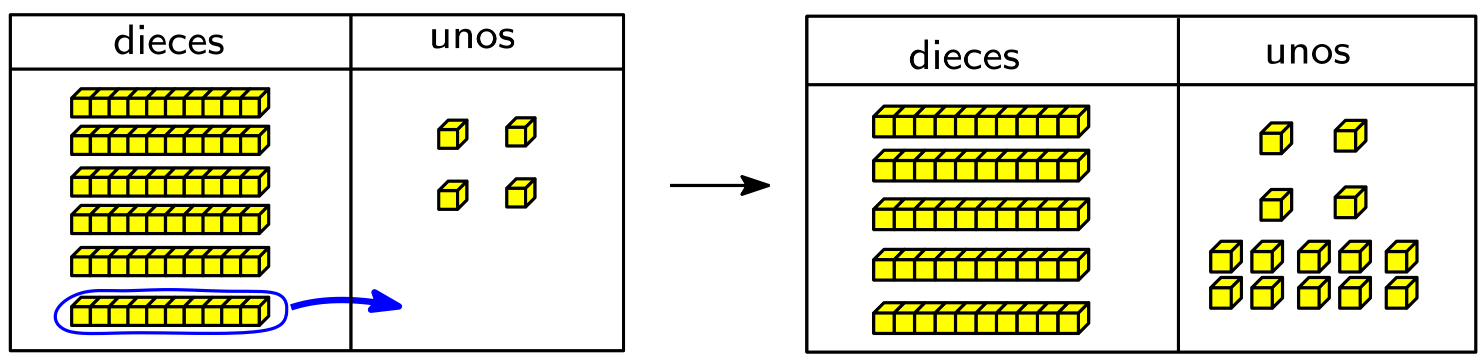
Algoritmos para la resta

El algoritmo tradicional (en España)

$$\begin{array}{r} 6\;4 \\ -\;\;4\;8 \\ \hline 1\;6 \end{array}$$

* Una alternativa (ya bastante extendida en nuestras aulas):

$$\begin{array}{ccc} & 5 & 14 \\ & \cancel{6} & \cancel{4} \\ - & 4 & 8 \\ \hline & & \end{array}$$



* Restamos quitando $\rightarrow$ solo representamos el minuendo.

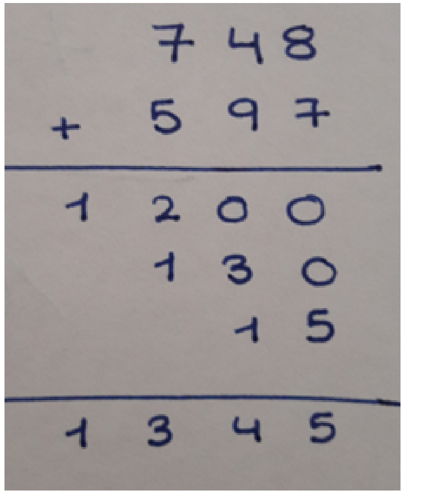
Actividad

* Utiliza los bloques de base 10 para calcular estas restas, haciendo con los materiales los reagrupamientos necesarios.

$$\begin{array}{r} 5\ 3 \\ -\ 1\ 8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\ 0\ 2 \\ -\ 1\ 3\ 7 \\ \hline \end{array}$$

¿Algoritmos alternativos?

* ¿Existe para la resta un análogo de este algoritmo para la suma?



ABN

¿Y el "cálculo mental"? (Cálculo razonado)

* Los números conectados y la recta numérica vacía son excelentes herramientas para desarrollar estrategias de cálculo flexible.

* Piensa diferentes estrategias para calcular:

a) $123 + 45$

b) $98 + 137$

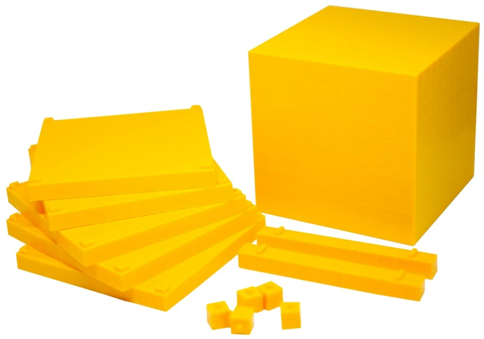
c) $145 - 28$

d) $203 - 106$

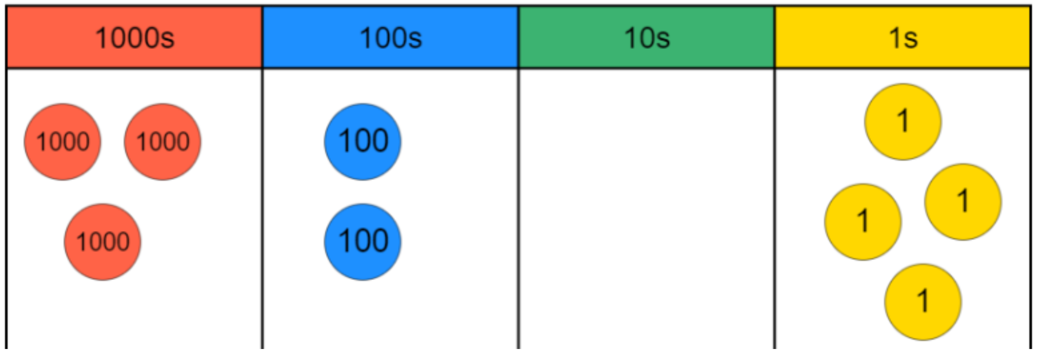
En 3.º, el grupo de mil

* Representar los números de 4 cifras con los bloques de base 10 empieza a ser poco manejable.

  Es prematuro prescindir de un apoyo en la representación (al menos para algunos alumnos).



* Las fichas numéricas (number disks) son una buena alternativa.

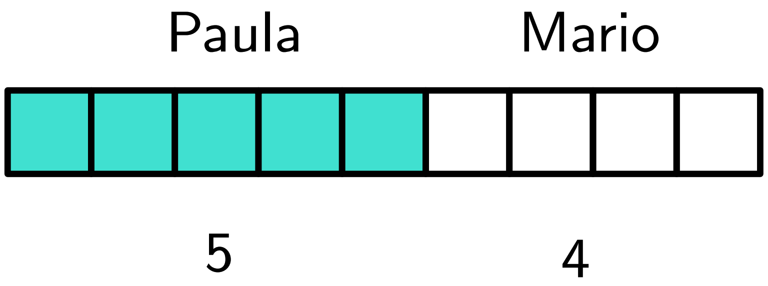


https://mathsbot.com/manipulatives/placeValueCounters

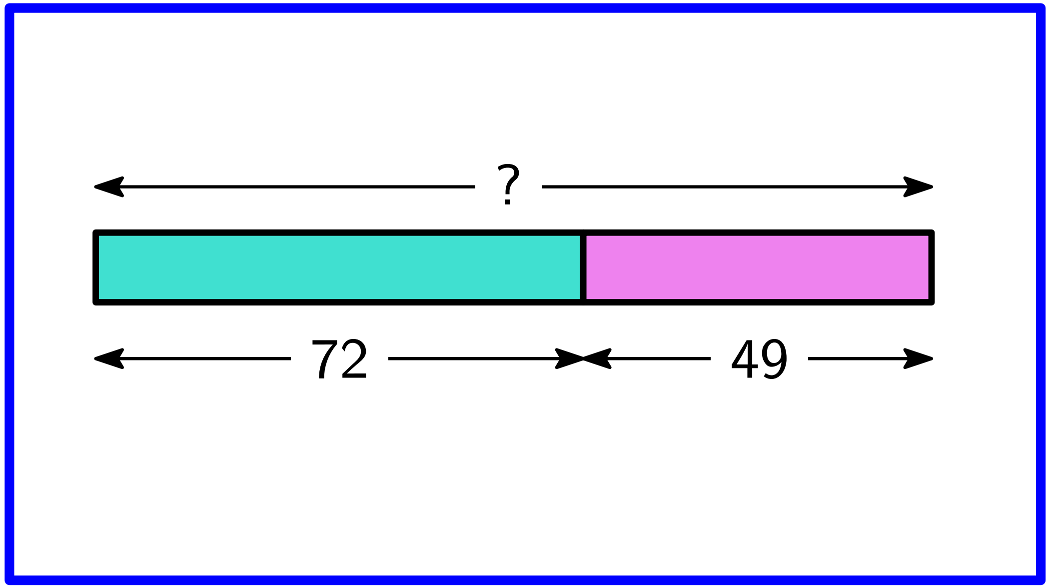
Resolución de problemas

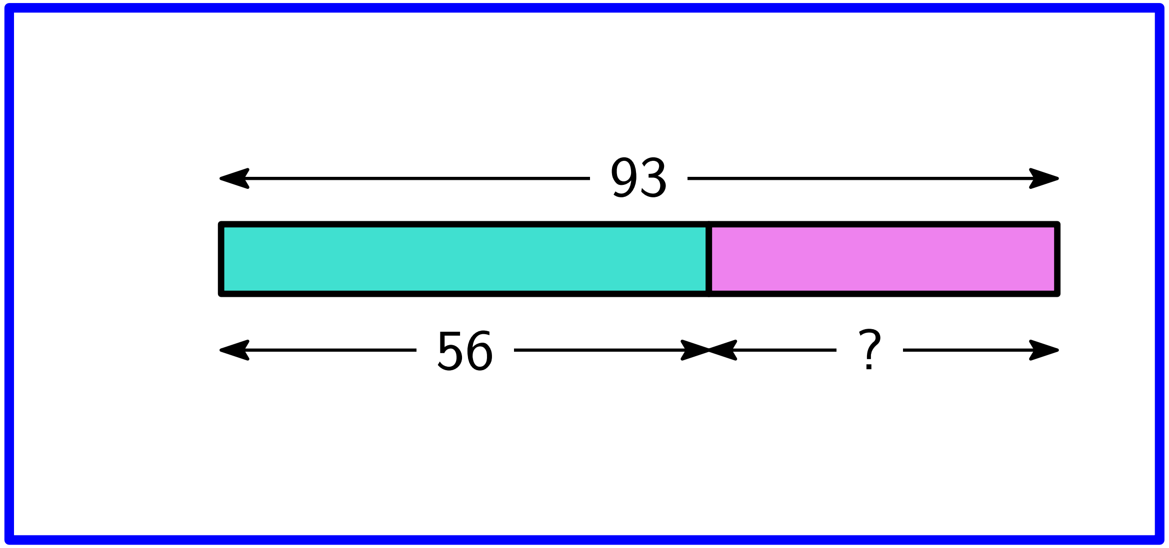
* Y este problema ... ¿es de sumar o de restar?

* Una herramienta muy útil: el modelo de barras.



Partes - Total





Observaciones

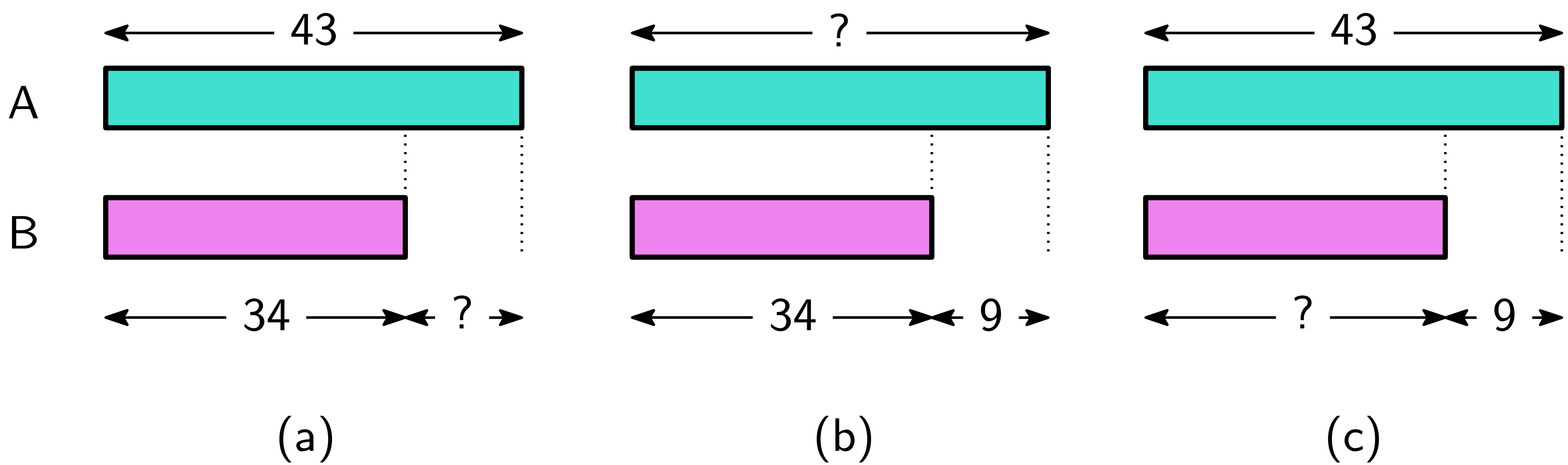
* Para que el modelo sea efectivo hay que introducirlo y trabajarlo adecuadamente.

* En el paso de representar las unidades explícitamente a representarlas con una barra hay una abstracción a la que hay que prestar la atención necesaria.

* En este modelo el alumno se centra en las relaciones, no en los objetos ni en las cantidades descontextualizadas.

* Las cantidades se representan con rectángulos: un rectángulo es un objeto fácil de dibujar, de dividir. Útil para representar números más grandes y mostrar relaciones de proporcionalidad.

Modelo de comparación



* Alicia tiene 17 muñecos y Benito tiene 25 muñecos. ¿Quién tiene más muñecos? ¿Cuántos más?

Dos etapas, dos modelos

* Lucía tiene 43 cromos, que son 9 más de los que tiene Juan. ¿Cuántos cromos tienen entre los dos?

* ¿Cómo se podrían resumir estos dos modelos en uno único?

Problemas

1. Jaime tiene 15 euros más que Lucía y entre los dos tienen 97 euros. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

2. Lisa tenía 128 euros y Pablo tenía 97 euros. Se compraron dos abrigos iguales, y después de pagar Lisa tiene el doble de dinero que Pablo. ¿Cuánto les costó el abrigo?

* Curso introductorio sobre el modelo de barras (en abierto):

https://sites.google.com/view/modelodebarras/home

Dificultades en la resolución de problemas

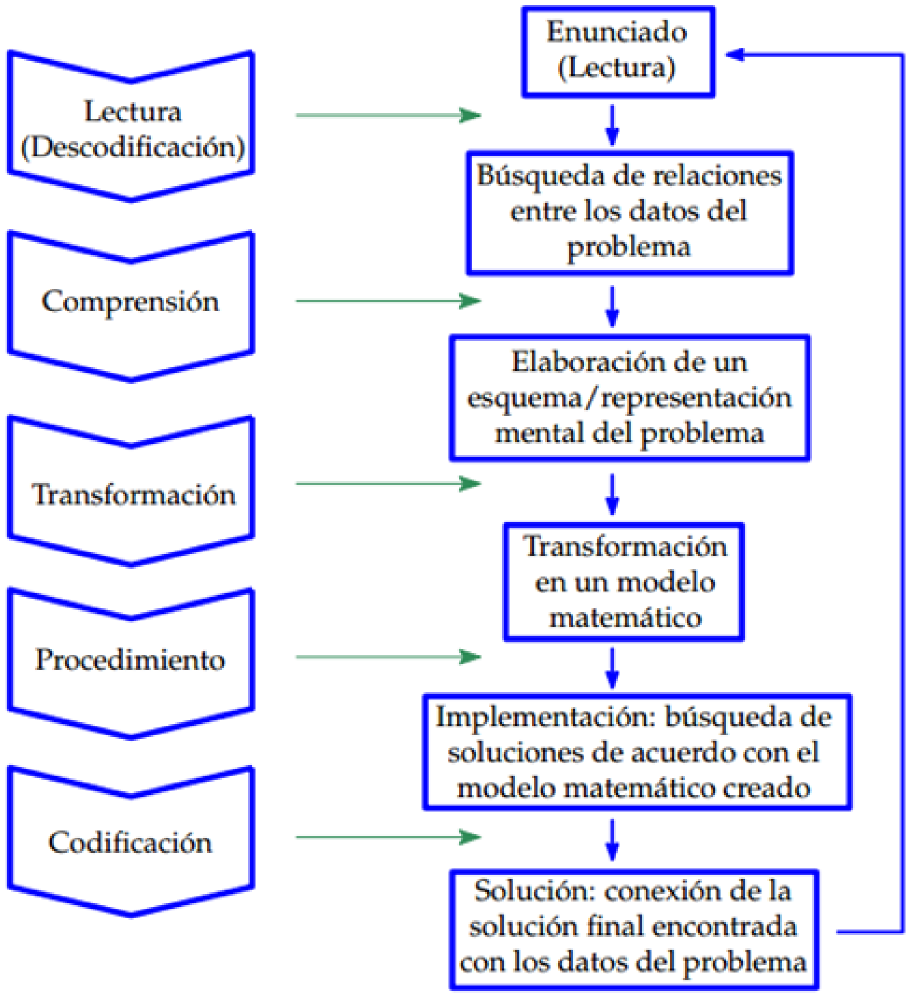


Figura 2.2: Jerarquía de errores de Newman integrada con las fases de resolución de problemas.

Arántzazu Fraile Rey: El desarrollo de actitudes valiosas para la resolución de problemas en Educación Primaria. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá

La multiplicación

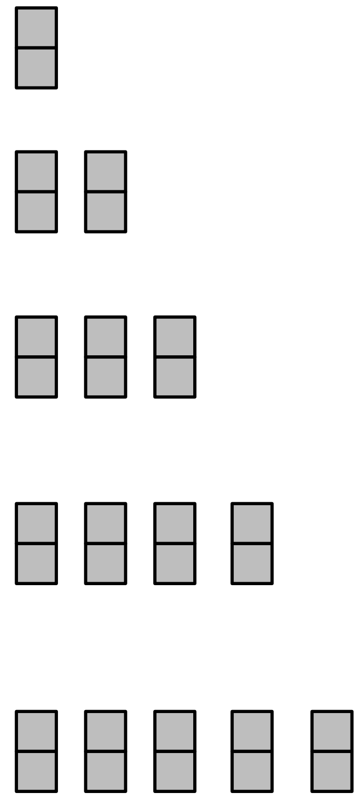
* En la imagen vemos $4 + 4 + 4$ puntos. ¿Cómo escribes esa suma repetida en forma de multiplicación?

Las tablas de multiplicar

* La tabla del 2 si escribimos

$$2 + 2 + 2 = 2 \times 3$$

(dos multiplicado por tres)



2

$2 + 2$

$2 + 2 + 2$

$2 + 2 + 2 + 2$

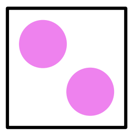
$2 + 2 + 2 + 2 + 2$

* La tabla del 2 si escribimos

$$2 + 2 + 2 = 3 \times 2$$

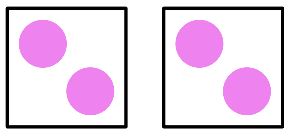
(tres veces dos)

Aprendizaje comprensivo ↔ Memorización



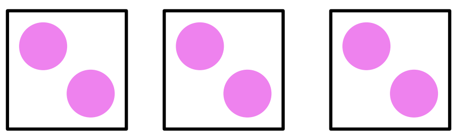
$$1 \times 2 = 2$$

1 grupo de 2 es 2
1 vez 2 es 2



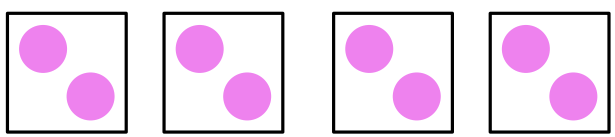
$$2 \times 2 = 4$$

2 grupos de 2 son 4
2 veces 2 son 4



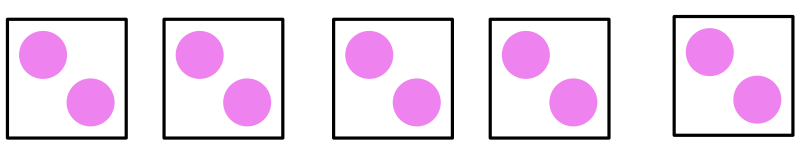
$$3 \times 2 = 6$$

3 grupos de 2 son 6
3 veces 2 son 6



$$4 \times 2 = 8$$

4 grupos de 2 son 8
4 veces 2 son 8



$$5 \times 2 = 10$$

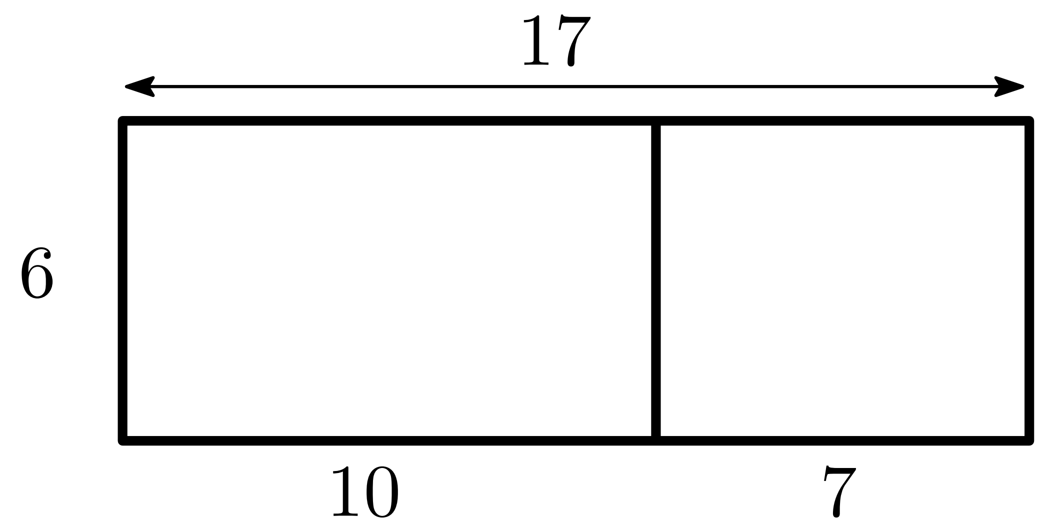
5 grupos de 2 son 10
5 veces 2 son 10

∗ ¿Aprender de memoria o aprender con la memoria?

El modelo de área

* Una excelente ayuda para la comprensión de las propiedades y para la introducción del algoritmo.

$$6 \times 17 = 6 \times 10 + 6 \times 7$$



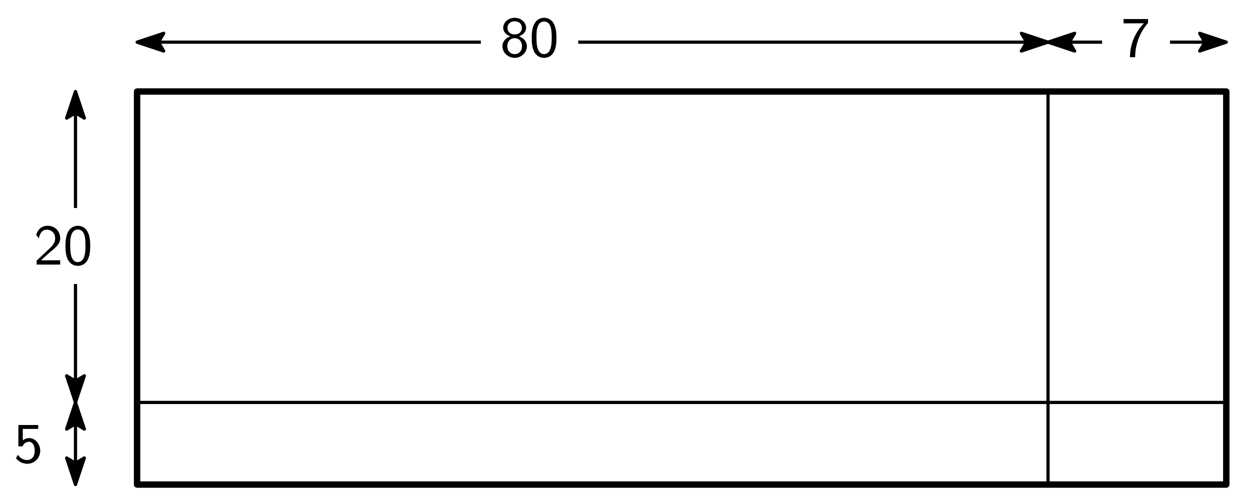
$$\begin{array}{rrr} & 1 & 7 \\ & \times & 6 \\ \hline & 4 & 2 \\ + & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \end{array}$$

Algoritmos de la multiplicación

* ¿Y si queremos multiplicar por un número de dos cifras?

$$\begin{array}{rrrr} & & 8 & 7 \\ & \times & 2 & 5 \\ \hline & & 3 & 5 \\ & 4 & 0 & 0 \\ & 1 & 4 & 0 \\ + \; 1 & 6 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 7 & 5 \end{array}$$

$$(80 + 7) \times (20 + 5) =$$



Modelo de barras - Estructura multiplicativa

* Nos dicen que el peso de Juan es 5 veces el de su perro, y que entre los dos pesan 54 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?

* Alicia tiene el doble de caramelos que Benito. Si le da 18 caramelos, los dos tienen la misma cantidad. ¿Cuántos caramelos tiene Alicia al principio?

La división

* “Dividir es repartir”. ¿Siempre?

1) Luis lleva 20 caramelos al colegio y quiere repartirlos entre 4 amigos. ¿Cuántos caramelos le da a cada amigo?
2) Luis tiene 20 caramelos y hace bolsas con 4 caramelos. ¿Cuántas bolsas puede hacer?

$$20 \div 4 = 5$$

* El segundo significado es la división de agrupamiento.
  Tiene el sentido de “hacer grupos iguales”.
  (No se trabaja lo suficiente en nuestras aulas).
  Relación con medida: ¿cuántas veces “cabe” 4 en 20?

Inventa dos problemas

camisetas

96 euros

16

* En uno de ellos, la división debe tener sentido de reparto; en el otro, de hacer grupos.

La división - Dos significados

* Varias formas de distinguirlas:

  i) piensa en cómo resolvería el problema una persona sin conocimientos matemáticos.

  ii) piensa en las unidades del cociente.

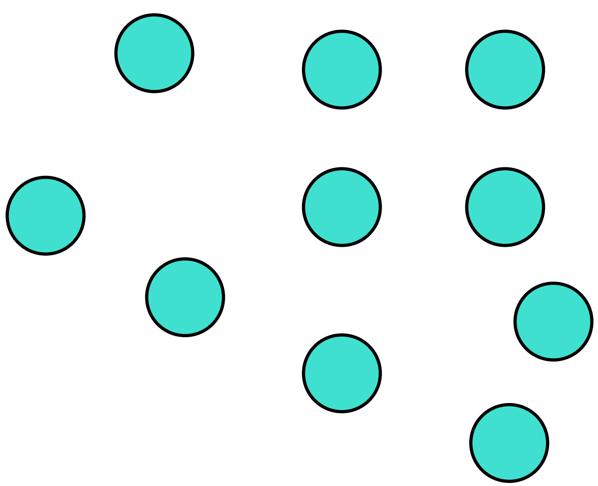
  iii) traduce la división a una multiplicación (leyendo "$\times$" como "grupos de").

Introducción a la división

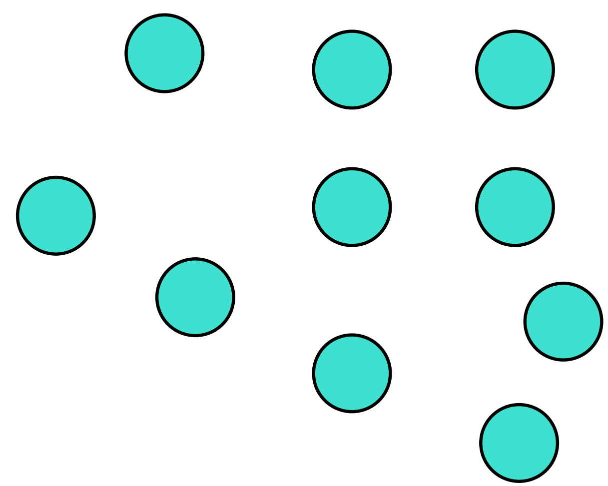
∗ Con los puntos de las figuras:

1. Haz dos grupos iguales.
2. Haz grupos de dos.

$\boxed{1}$

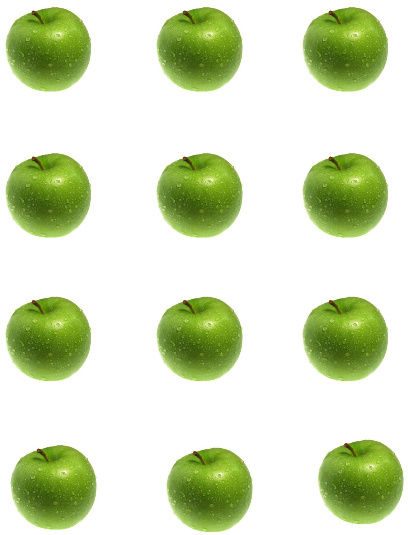


$\boxed{2}$



Multiplicación y división

* Es importante trabajar la relación entre multiplicación y división, como operaciones inversas.



a) Haz 4 grupos iguales. ¿De qué tamaño es cada grupo? (Reparto)

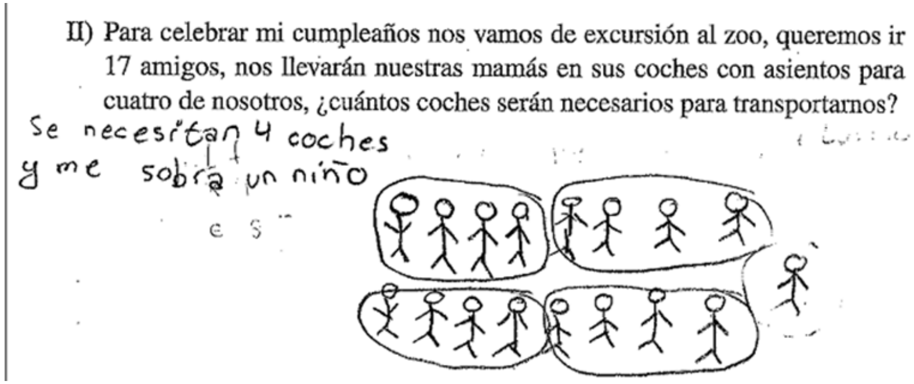
$$12 \div 4 = 3 \;\leftrightarrow\; 12 = 4 \text{ grupos de } 3$$

b) Haz grupos de 4. ¿Cuántos grupos salen? (Agrupación)

$$12 \div 4 = 3 \;\leftrightarrow\; 12 = 3 \text{ grupos de } 4$$

División: el procedimiento y su interpretación

* El error más frecuente en nuestras aulas: nos centramos en el algoritmo, y nos olvidamos de darle significado.


II) Para celebrar mi cumpleaños nos vamos de excursión al zoo, queremos ir 17 amigos, nos llevarán nuestras mamás en sus coches con asientos para cuatro de nosotros, ¿cuántos coches serán necesarios para transportarnos?

Se necesitan 4 coches y me sobra un niño

* Un ejemplo de pregunta de TIMSS (4º de primaria)

La pintura viene en latas de 5 litros. Santi necesita 37 litros de pintura. ¿Cuántas latas debe comprar?

- ○ 5
- ○ 6
- ○ 7
- ○ 8

División con resto

* División entera (con resto, o euclídea)

  Dados dos números naturales D (dividendo) y d (divisor), existen unos únicos números naturales c (cociente) y r (resto) tales que

  $$D = c \times d + r \text{ y } 0 \leq r < d$$

* Idea de cualquier algoritmo de división:

  Aproximar por defecto el dividendo por múltiplos del divisor.

  $$38 = \boxed{} \times 3 + \boxed{}$$

  grupos de   y sobran

$$D = c \times d + r \qquad D = d \times c + r$$

(1) $142 \div 9 \rightarrow$ cociente 15, resto 7

(2) $142 = 15 \times 9 + 7$

Notación:

$$142 \div 9 = 15\, R\, 7$$

15 grupos de 9 y sobran 7

(2) (sobre todo con la verbalización adecuada) ayuda a entender el significado de la división (y de sus resultados, el cociente y el resto)

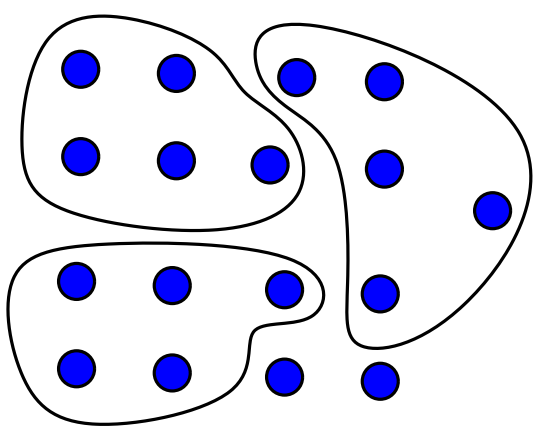
* ¿Qué día de la semana será dentro de un año? ¿Por qué?

* Problema: Un astronauta empezó su viaje un martes a las 9 de la mañana. Si el viaje duró 115 horas, ¿qué día y a qué hora aterrizó?

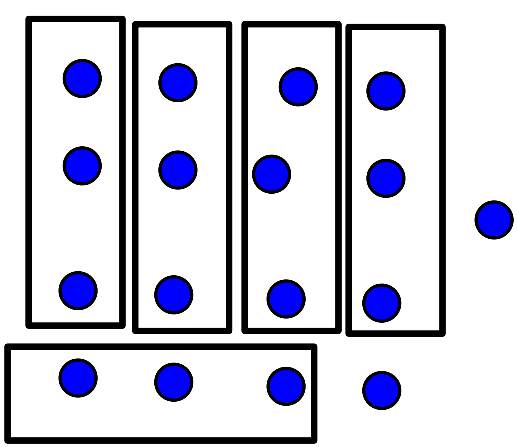
Introducción del algoritmo

* Repartimos 17 caramelos entre 3 amigos.
  1. ¿cuántos caramelos le damos a cada amigo?
  2. ¿cuántos caramelos sobran?

* Con 17 caramelos hacemos bolsas de 3 caramelos.
  1. ¿cuántas bolsas salen?
  2. ¿cuántos caramelos sobran?



$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \cline{2-2} -15 & 5 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

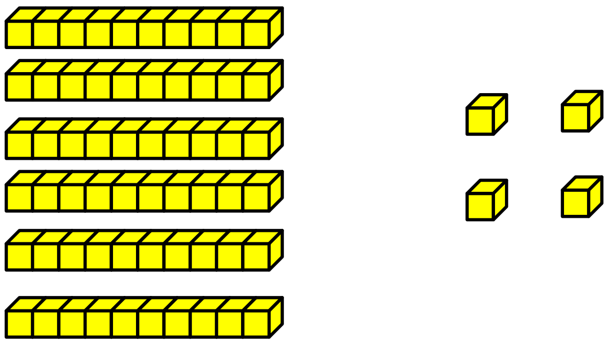


Algoritmo de la división: introducción

* También aquí debemos apoyarnos en los materiales, al principio.

* Queremos hacer la división $64 \div 2$.

  ¿Cómo la interpretamos?



* ¿Y si queremos hacer la división $52 \div 4$?

Algoritmos de división

* Algoritmo tradicional: dos versiones.

Algoritmo "extendido"

$$
\begin{array}{rrr|rr}
6 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ \cline{4-5}
-4 & 6 & & 2 & 7 \\ \cline{1-2}
1 & 8 & 0 & & \\
-1 & 6 & 1 & & \\ \cline{1-3}
 & 1 & 9 & &
\end{array}
$$

Algoritmo "usual"
("comprimido")

$$
\begin{array}{rrr|rr}
6 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ \cline{4-5}
1 & 8 & 0 & 2 & 7 \\
 & 1 & 9 & &
\end{array}
$$

¿Otros algoritmos?

ABN

* Basado en las descomposiciones de números:

$$17 \div 3$$

Algoritmo de los “cocientes parciales”

$$107 \div 8$$

Ejercicio

* Haz estos cálculos con los algoritmos indicados:

  i) $147 \div 6$, descomponiendo y con cocientes parciales.

  ii) $1427 \div 26$, con cocientes parciales.

Problemas

* Queremos repartir 196 € entre tres amigos, de forma que a Alicia le corresponda el doble que a Benito, y a Benito el doble que a Carla. ¿Cuánto dinero le damos a cada uno?

* Alicia tiene el triple de dinero que Benito, y Lucía tiene 16 euros más que Benito. Si entre los tres tienen 186 euros, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

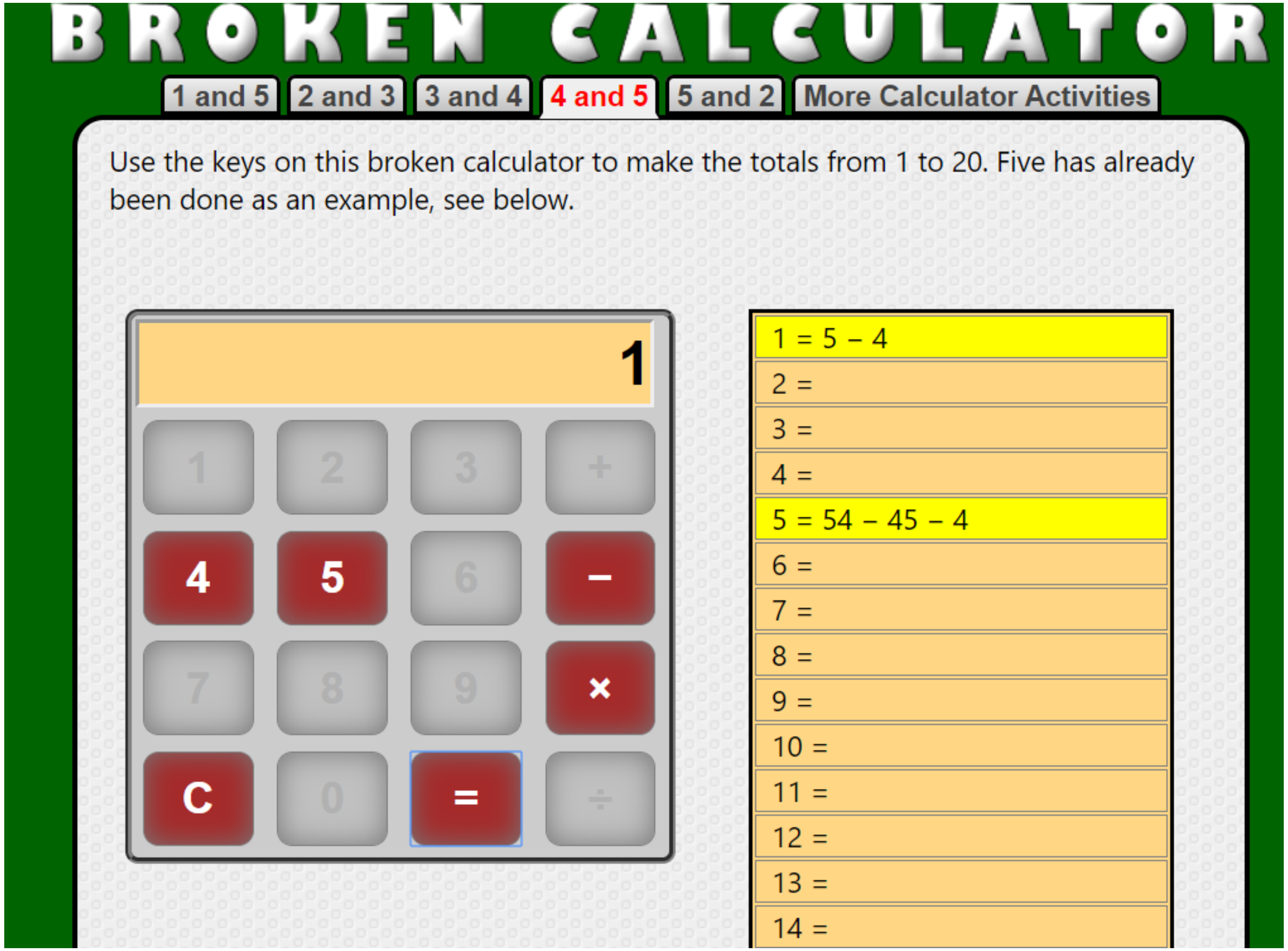
La calculadora (y otros dispositivos)

* Está en el currículo, y habría que integrarla en el aula (también en Educación Primaria).

* Dos aspectos distintos:
  (1) su uso para hacer operaciones “complicadas”, o para comprobar resultados.
  (2) su utilidad en el diseño de actividades de aprendizaje.

Un ejemplo de actividad de aprendizaje

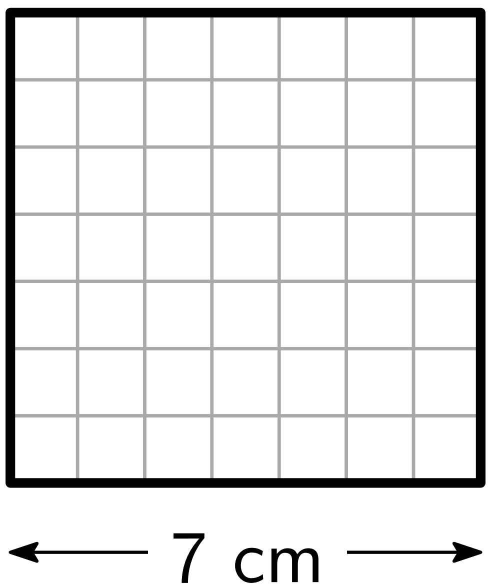
* Calculadoras estropeadas.

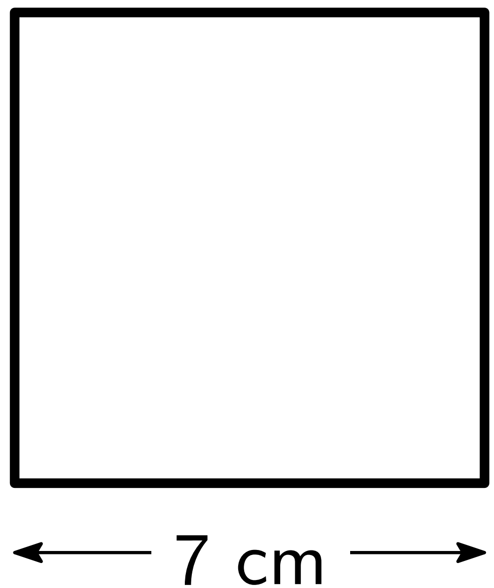


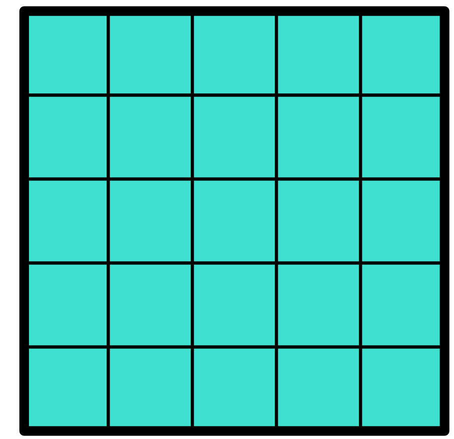
https://www.transum.org/Software/SW/Starter_of_the_day/Students/Broken_Calculator.asp

Potencias

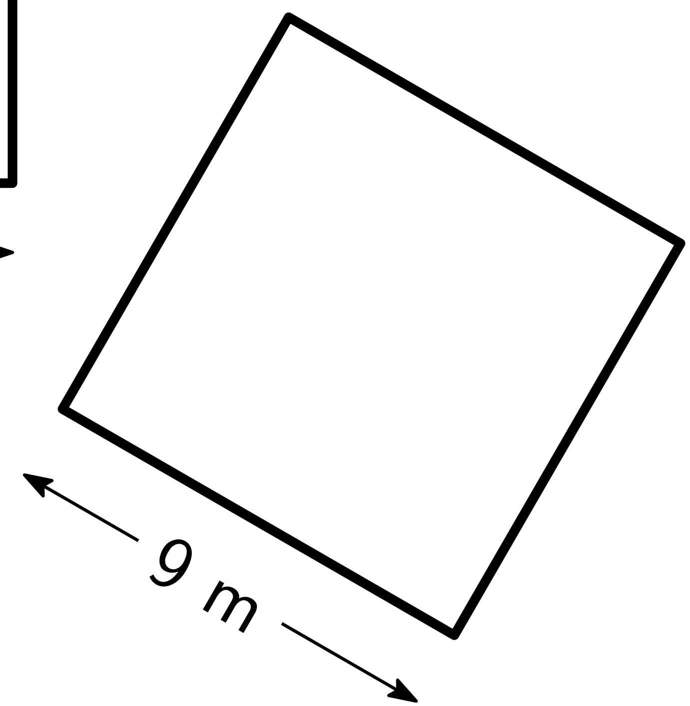
* La conexión con la geometría es fundamental.

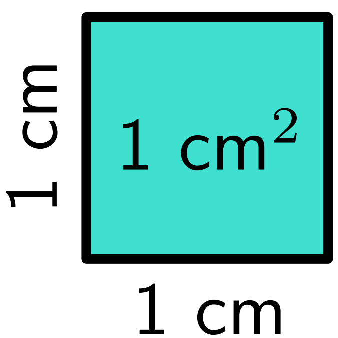






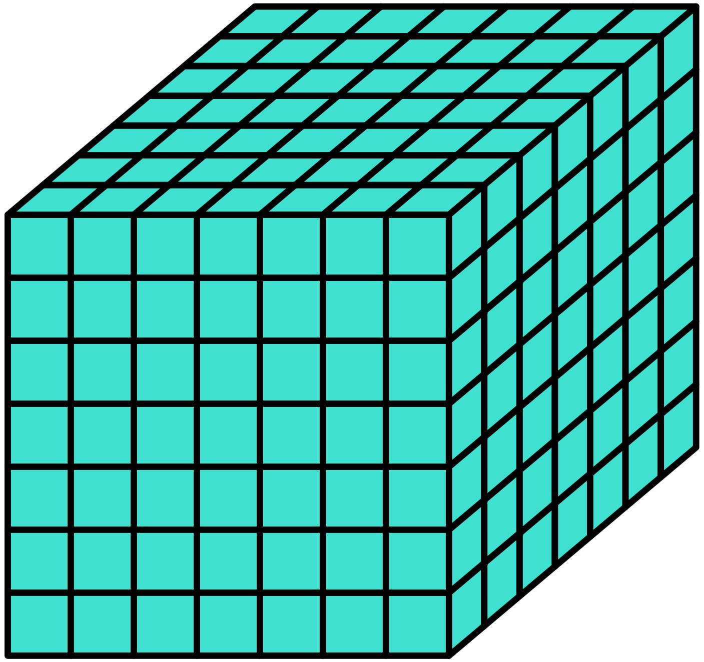
$$5 \times 5 = 5^2$$



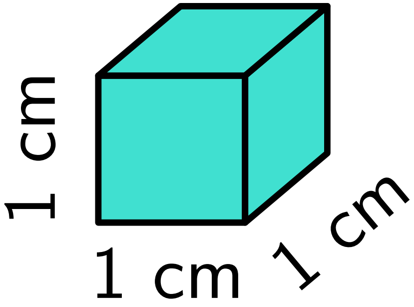


$$1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^2$$

Potencias

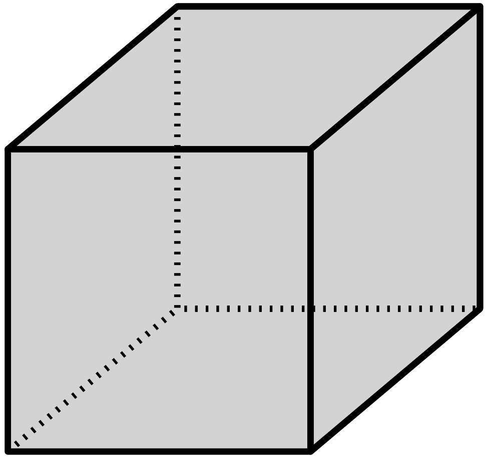


$$7 \times 7 \times 7 = 7^3$$



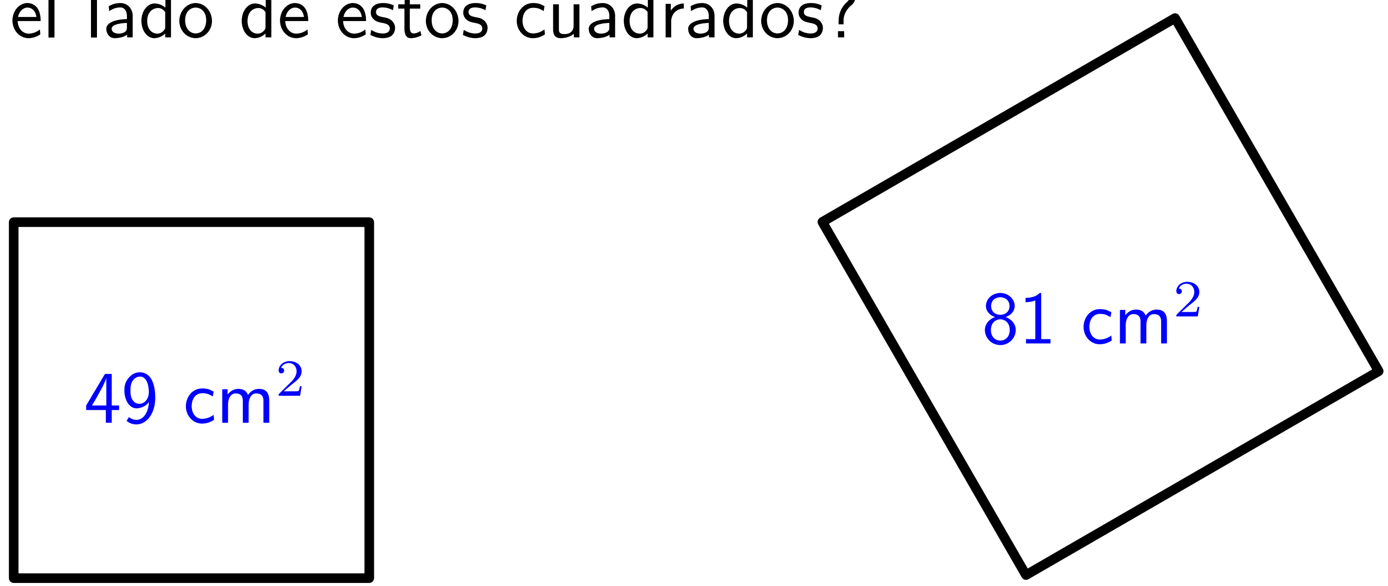
$$\boxed{1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^3}$$

¿V?



Raíces

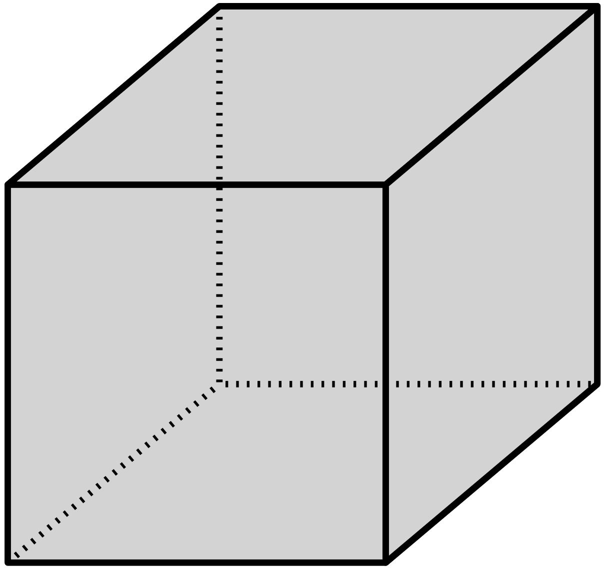
- Estudiar una operación y su inversa de forma conjunta facilita la comprensión.
- $\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$ $(4 \times 4 = 16)$
- De nuevo, la conexión con la geometría ayuda.
- ¿Cuánto mide el lado de estos cuadrados?



Raíces

$*$ $\sqrt[3]{125} = 5$ porque $5^3 = 125$ $(5 \times 5 \times 5 = 125)$.

¿Arista?

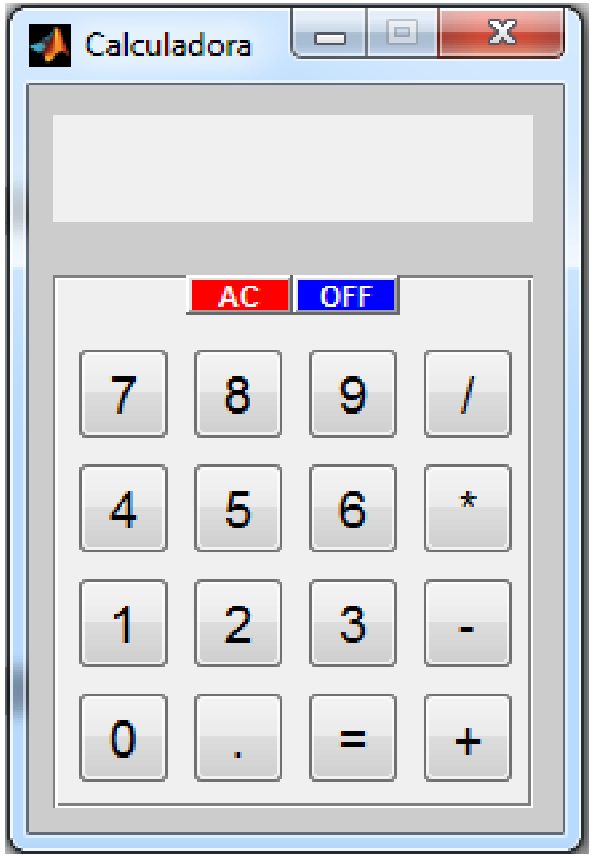


Vol $= 64$ cm^3

Una actividad para la raíz cuadrada

* Con una calculadora como la de la figura, encuentra $\sqrt{325}$ con 2 cifras decimales.

  Repite el ejercicio con $0{,}8$.



Problema

* Problema tomado de la prueba final de primaria de Singapur (PSLE).

* Yolanda preparó refresco y con él llenó dos tipos de botellas, grandes y pequeñas. Con $7{,}2$ l del total de refresco llenó 3 botellas grandes y 5 botellas pequeñas. Sabemos que con el refresco que le sobró le faltaban $0{,}5$ l para rellenar otra botella grande, pero sí pudo rellenar una botella pequeña, tras lo que le sobraron $0{,}3$ l de bebida.

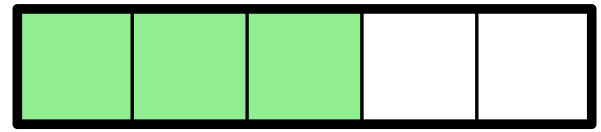
  a) ¿Cuál es la diferencia entre la capacidad de las botellas grandes y las botellas pequeñas?
  b) ¿Cuántos litros de refresco preparó Yolanda?

Problema

* También de la misma prueba.
  (No todos los problemas se resuelven con modelo de barras)
* Alicia compró 150 naranjas y 100 manzanas para sus vecinos. Repartió las naranjas entre los vecinos (por igual) y le sobraron 17 naranjas. También repartió las manzanas, y le sobraron 5. ¿Cuántos vecinos tenía Alicia?

Las fracciones: un objeto, varias interpretaciones

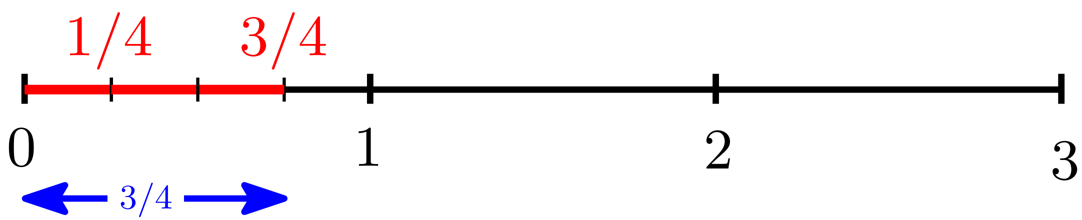
(1) Parte de un todo



Hemos coloreado los $3/5$ de ...

(2) Una cantidad, una medida
(un número, un punto de la recta numérica)

¿ $\frac{3}{4}$?

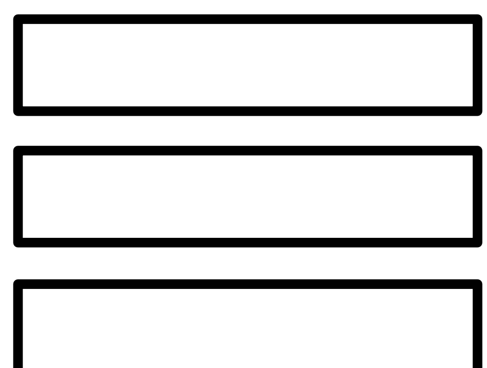


El denominador fija la unidad

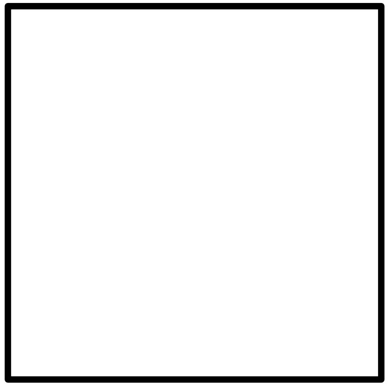
El numerador, cuántas unidades tomo

(3) Un reparto (división)

Queremos repartir 3 chocolatinas entre 5 niños. ¿A cuánto toca cada uno?



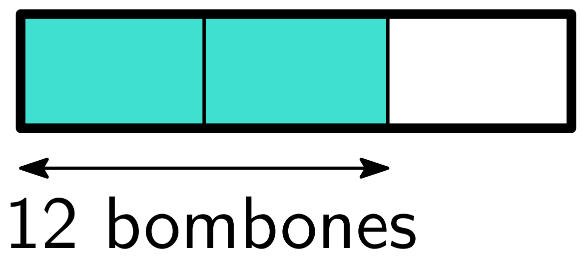
Una actividad



1. Organizamos a los alumnos en grupos.
2. Repartimos hojas en forma de cuadrado.
3. Pedimos que dividan cada papel en 4 trozos iguales, y que busquen todas las soluciones distintas que puedan.

Problemas de fracciones y representación gráfica

* He comido $1/3$ de los bombones de una caja y me quedan 12 bombones. ¿Cuántos bombones tenía la caja?



Una extensión: https://nrich.maths.org/218

* Lucía tenía la misma cantidad de cuentas rojas que azules. Usó $3/4$ de sus cuentas rojas y la mitad de sus cuentas azules para hacer un collar. ¿Qué fracción del total de sus cuentas ha usado para hacer el collar?

Fracciones: terminología básica

$*$ Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

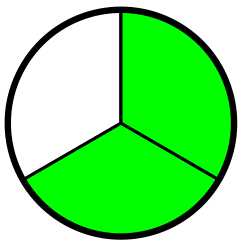
numerador

$\boxed{\text{denominador}}$

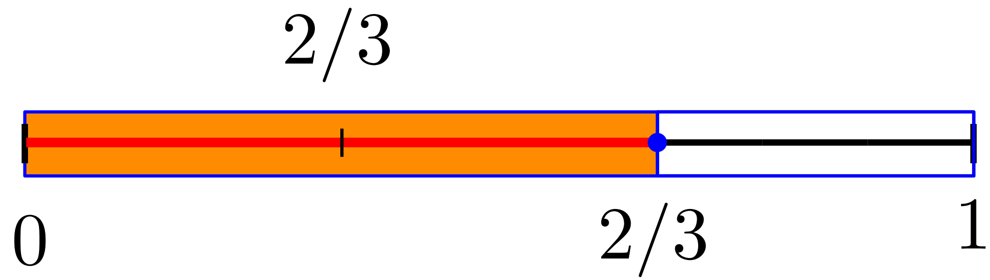
no es un número

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

1 medio $+$ 1 tercio $=$



$2/3$



Parte de un todo

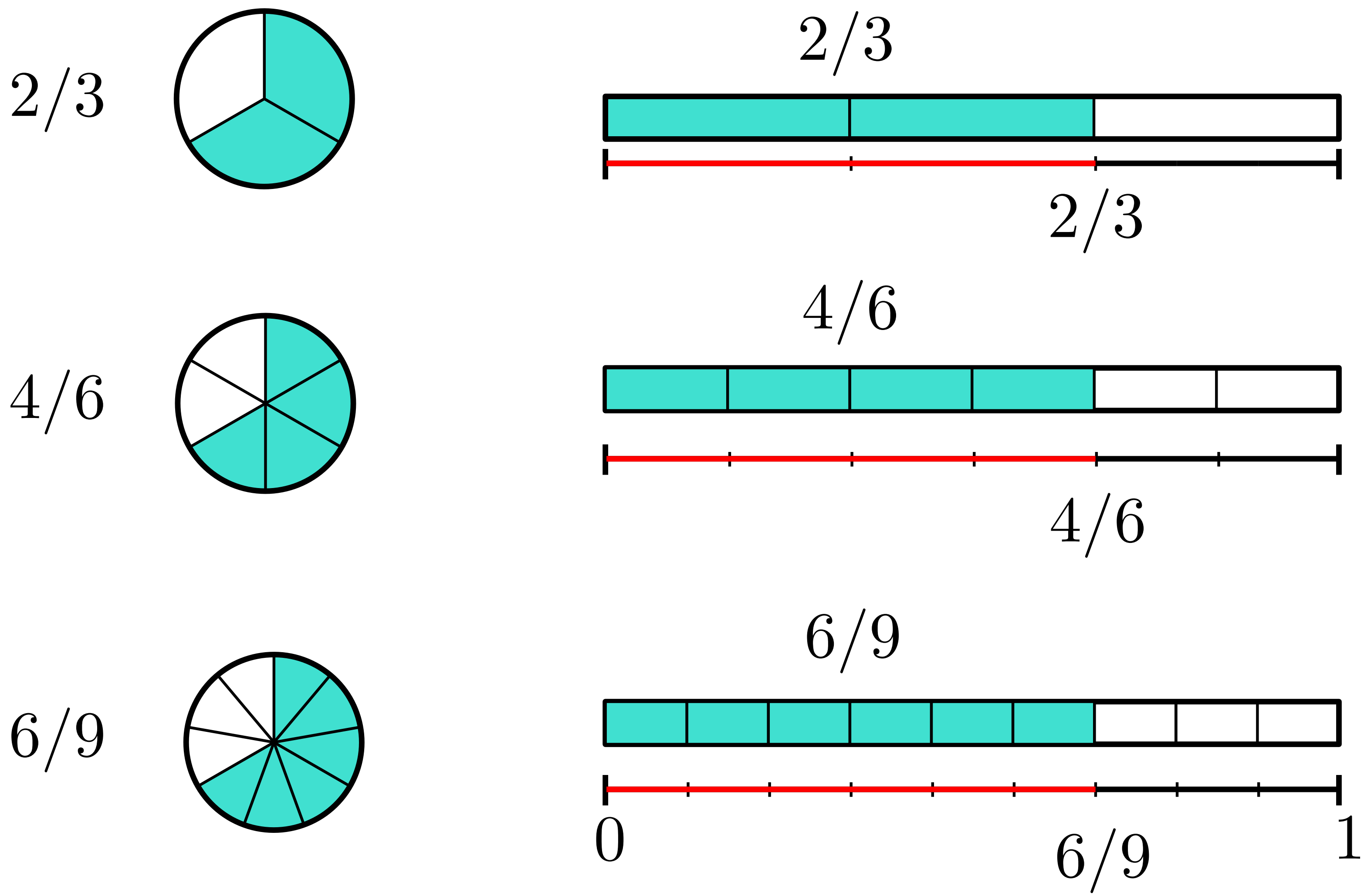
Punto de la recta numérica
Cantidad
Medida

* Las dos (tres) interpretaciones son necesarias, y cada una tiene sus ventajas y sus inconvenientes.

  Cómo combinarlas es un tema importante de didáctica de las matemáticas.

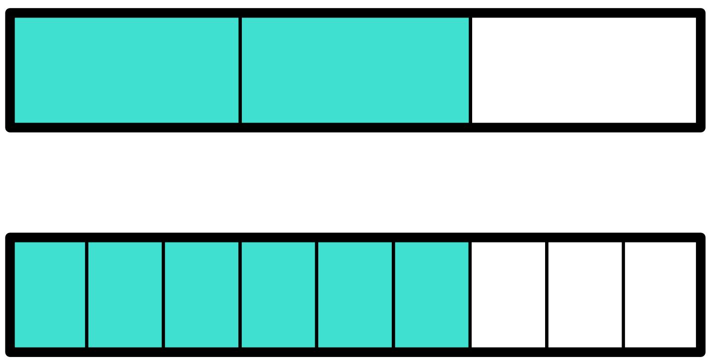
Fracciones equivalentes

* Las fracciones $2/3$, $4/6$, $6/9, \ldots$ representan la misma cantidad. Diremos que son fracciones equivalentes.



Fracciones equivalentes

* Es un concepto básico, y es fundamental que se entienda bien.



$$\frac{2}{3} \xrightarrow{\ \frac{\times 3}{\times 3}\ } \frac{6}{9} \qquad \frac{6}{9} \xrightarrow{\ \frac{:\,3}{:\,3}\ } \frac{2}{3}$$

* Una herramienta muy útil:
  el muro de fracciones (tiras de fracciones).

Muro de fracciones – Tiras de fracciones

1									
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$							
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$						
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$				
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$			
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$		
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Pedro Ramos. Matemáticas Singapur.

Propuestas de actividades

- Fracciones equivalentes: $$\frac{2}{3} =$$

- Comparación de fracciones: $$\frac{4}{5} \qquad \frac{5}{6}$$

- Suma de fracciones: $$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

- Descomposición egipcia: $$\frac{7}{8} = \frac{1}{\square} + \frac{1}{\square} + \frac{1}{\square}$$

https://toytheater.com/fraction-strips/

Modelo de barras y fracciones: resolución de problemas

1. En una hora se llenan $5/8$ de un depósito. ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse el depósito completo?

2. Una barra de 108 cm de largo se partió en dos piezas. Si sabemos que $3/5$ del trozo más grande miden lo mismo que $3/4$ del trozo más pequeño, ¿cuál es la longitud de cada uno de los trozos?

3. Alicia y Benito pagan los gastos de una fiesta a medias. Si sabemos que Alicia ha gastado $2/3$ de su dinero, que Benito ha gastado la mitad del suyo, y que entre los dos tenían 588 €, ¿cuánto dinero han gastado en organizar la fiesta?