MATEMÁTICAS 1º ESO

LIBRO 2

Junta de Castilla y León

Matemáticas 1º ESO

Programa experimental para la mejora del razonamiento y la enseñanza de las Matemáticas.

Libro 2.

Junta de Castilla y León

Este documento es una publicación de la Consejería de Educación de Castilla y León.

Citar esta publicación así:

Consejería de Educación de Castilla y León. Matemáticas 1º de ESO, 2023. Programa Experimental para la mejora del razonamiento y la enseñanza de las Matemáticas. Libro 1.

Texto finalizado en julio de 2023.

Autores:

ALIENDE CORNEJO, BEATRIZ
ALONSO MESA, PABLO
ALONSO SANTAMARÍA, DIEGO
ARCONADA CUADRADO, LUISA MARÍA
BERGES IBÁÑEZ, LAURA
BLÁZQUEZ MARÍN, MARIA SONSOLES
BOAL FERNÁNDEZ, LAURA
BRAVO DE DIEGO, M. PINAR
BRITA-PAJA HOYOS, MARIA ÁNGELES
CARBAJO OLEA, CÉSAR
CASTRILLO MATEOS, ABEL
CEA MANUEL, RAQUEL
CUBERO DE LA FUENTE, JUAN ANTONIO
DEL RÍO MÉNDEZ, PILAR
DE ÁVILA DE LOS RÍOS, LUIS ÁNGEL
DE LA HERMOSA GARCÍA RAYO, ELISA RUIZ
DE LAS CUEVAS GIL, FERNANDO
DOMÍNGUEZ VICENTE, MARÍA ELENA
FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ, JOSÉ IGNACIO
FERNÁNDEZ FLOREZ, ANA MARÍA
FERRERO ÁLVAREZ, MARÍA JESÚS
GALLO DOMINGO, ISABEL
GARCÍA GONZÁLEZ, Mª CARMEN
GARCÍA LEMA, ANA
GARCÍA MARTÍN, JAVIER
GARCÍA MORAL, BEATRIZ
GARNACHO PASTOR, ANA
GÓMEZ CENDRERO, ISABEL
GÓMEZ PAREDES, JOSÉ MARÍA
GONZÁLEZ BUSTO, ANA MARÍA
GONZÁLEZ DE LEÓN, MANUEL
GONZÁLEZ LÓPEZ, RAQUEL
HERNÁDEZ FRAILE, MERCEDES
HERRERO PÉREZ, JUAN LUIS
HERRERO SÁNCHEZ, DANIEL
IGLESIAS GONZÁLEZ, DOLORES
IGLESIAS RODRÍGUEZ, MARÍA JOSÉ
JIMÉNEZ JIMÉNEZ, RUBÉN
LORENZO CARTÓN, MARTA
MARTÍN JUNCO, PABLO
MEDINA PORTALES, M. VICTORIA
MEILÁN RODRÍGUEZ, Mª VICTORIA
MONTERRUBIO PÉREZ, Mª CONSUELO
MORALEJO GUTIÉRREZ, MARÍA DE LA VEGA
ORZÁEZ HERNÁNDEZ, JOSÉ DANIEL
PEÑA PÁRAMO, MARTA
PILA COBO, MARTA
PONTÓN OCA, ANA MARÍA
RAMOS ALONSO, PEDRO
ROBLES SAHAGÚN, JAIRO
RODRÍGUEZ GARCÍA, VERÓNICA
RODRÍGUEZ HERNÁNDEZ, MERCEDES
RODRÍGUEZ PÉREZ, MANUEL
ROLDÁN ARTEAGA, ANA CARMEN
SAGRADO FERNÁNDEZ, JAVIER
SÁNCHEZ BELZA, JULIO
SANTA OLALLA TOVAR; JOSÉ MARÍA
SANTAMARÍA GALLEGO, AMAYA
SANTANDER GARCÍA, DAVID
SANZ SANZ, JOSÉ LUIS
SERNA DEL POZO, MANUEL
SOTO DE ROA, RUBÉN
TOVAR HERNANDO, LUCIANA C.
VEGA FERRERAS, ALICIA
VIADAS ALIENDE, MARTA
ZAMARRO SANZ, M. ARÁNZAZU
ZAPATERO MARTÍN, MARÍA

Asesoramiento:

UNIVERSIDAD DE BURGOS:
DE LAS HERAS GONZÁLEZ, Mª PILAR
HERNANDO ARNÁIZ, ENRIQUE

UNIVERSIDAD DE LEÓN:
CARRIEGOS VIEIRA, MIGUEL
DE CASTRO GARCÍA, NOEMÍ
MUÑOZ CASTAÑEDA, ÁNGEL LUIS
SUÁREZ CORONA, ADRIANA
TROBAJO DE LAS MATAS, MARÍA TERESA

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA:
CÁCERES GARCÍA, MARÍA JOSÉ
CHAMOSO SÁNCHEZ, JOSÉ MARÍA
GONZÁLEZ ASTUDILLO, MARÍA TERESA
MOLINA GONZÁLEZ, MARTA
RODRÍGUEZ SÁNCHEZ, MERCEDES
SÁNCHEZ BARBERO, BEATRIZ

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID:
ARCE SÁNCHEZ, MATÍAS
CONEJO GARROTE, LAURA
CUIDA GÓMEZ, MARÍA ASTRID
MARBÁN PRIETO, JOSÉ MARÍA
MAROTO SÁEZ, ANA ISABEL
PALOP DEL RÍO, BELÉN

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ DE HENARES:
RAMOS ALONSO, PEDRO

Revisión de la maquetación:

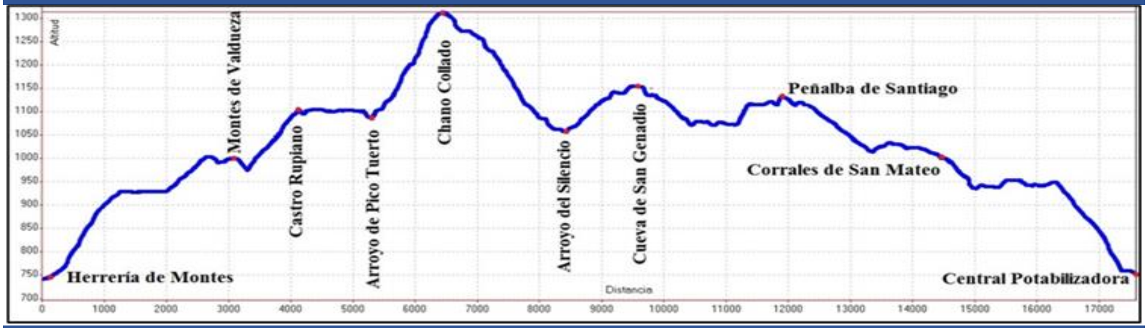
LOBO DE LUCAS, JUAN LUIS
SERRANO CABALLERO, MANUEL ERNESTO
MANJARRÉS GOBERNADO, LAURA
GARCÍA DAVÍA, MARÍA ANTONIA
VALERO TEJEDOR, ISABEL
MERINO DONCEL, MARÍA
ALONSO SANZ, ERNESTO
RUIZ NÚÑEZ, ROSA MARÍA
SANTA OLALLA TOVAR, JOSÉ MARÍA

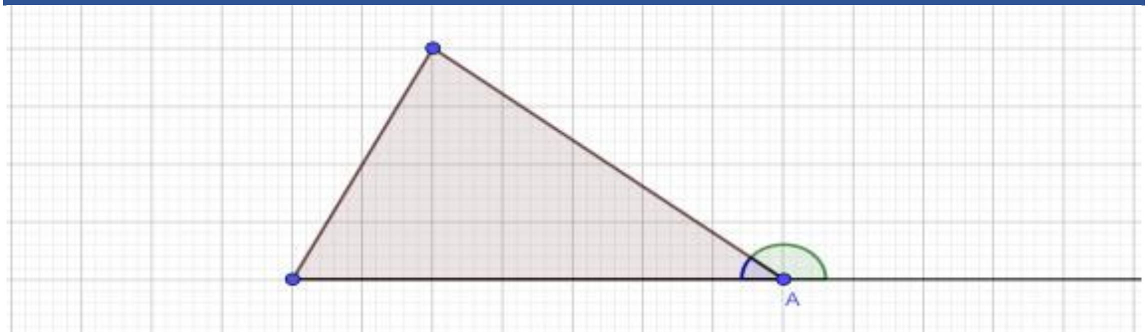
Fecha de publicación: diciembre de 2023

ISBN: 978-84-9718-728-2

ISBN OBRA COMPLETA: 978-84-9718-726-8

Índice





Ángulo exterior e interior a un polígono. ¿Qué propiedades tienen?

Arquitecto diseñando un edificio.

Eratóstenes enseñando en Alejandría. Pintura de Bernardo Strozzi. (1635). Wikipedia.

INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES

Símbolos utilizados en las herramientas matemáticas

RETOS Problemas iniciales que sirven como introducción de los contenidos del apartado.

APRENDE Y APLICA Explicación de los contenidos del apartado

Idea principal. Explicación y ejemplos de un concepto matemático.

Procedimiento. Explicación y ejemplos de un procedimiento matemático.

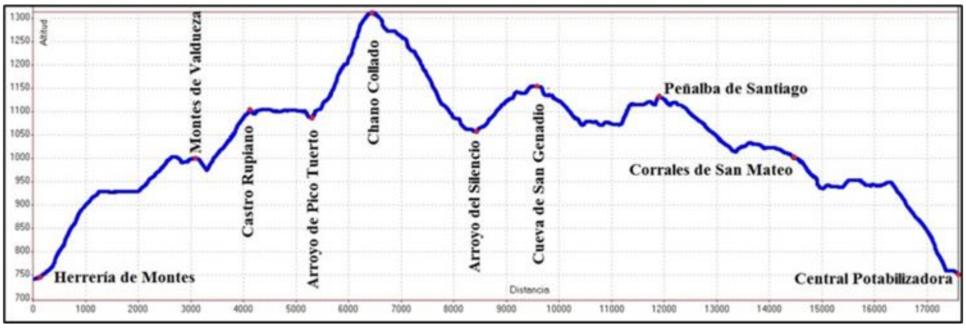
PRACTICA Ejercicios y problemas para practicar lo aprendido en el apartado.

ÍNDICE

1.- Nos vamos de senderismo al Bierzo

Cuando realizamos una ruta solemos encontrar al principio de la ruta un panel informativo con gráficos como los que te mostramos a continuación. Obsérvalos detenidamente y contesta a las preguntas que te proponemos.

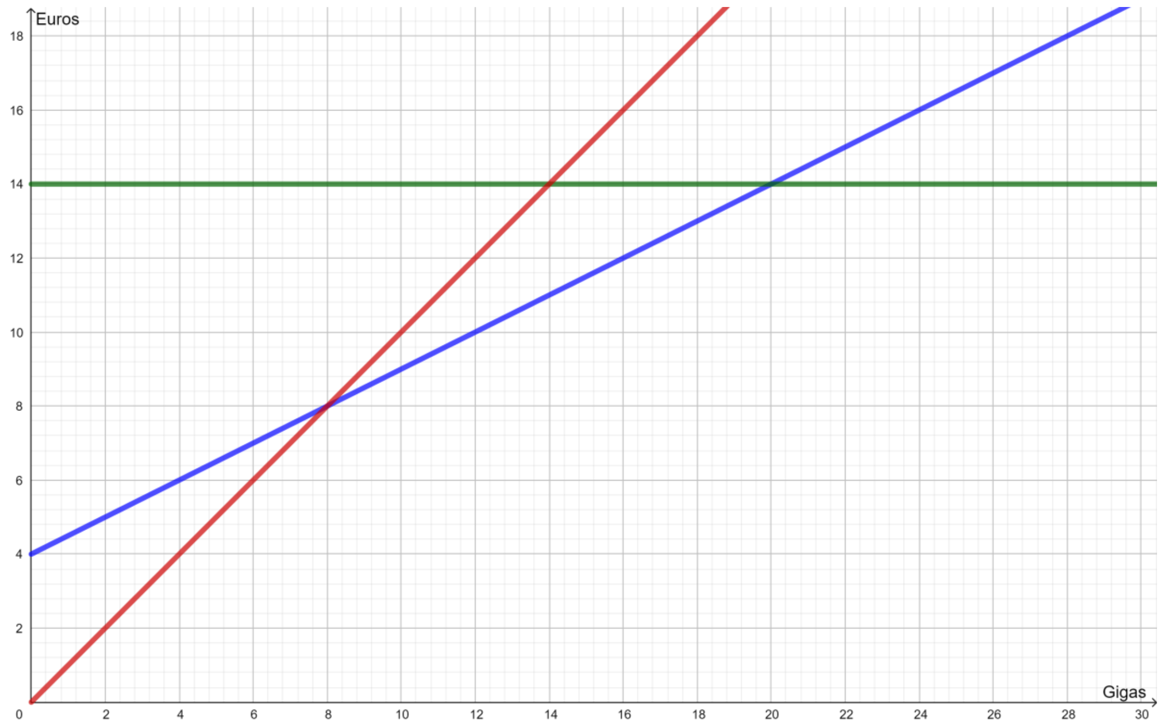
Perfil de la ruta



a. ¿Cuántos kilómetros tenemos que recorrer para alcanzar el punto más alto?
b. ¿Cuánto metros descendemos desde Chano Collado hasta el arroyo del silencio?
c. ¿A qué altitud está Peñalba de Santiago?
d. ¿Cuántos arroyos cruzamos?
e. ¿Dónde podríamos tomar algo?

2.- Comparación de tarifas de móviles

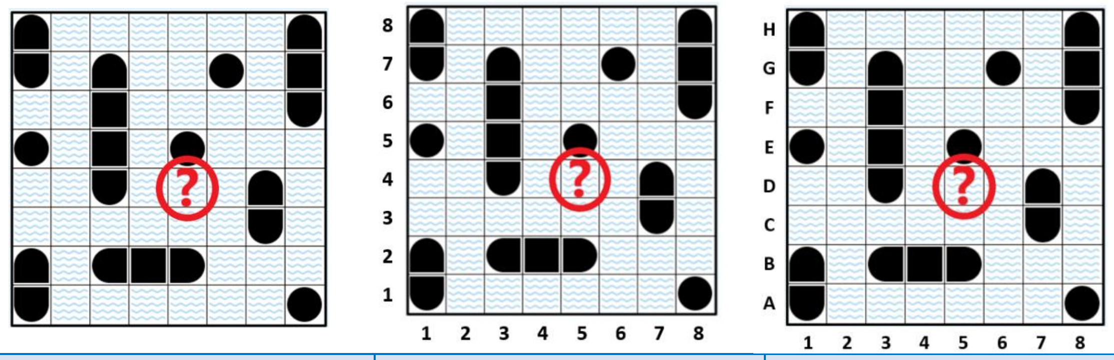
La gráfica representa el coste mensual de los datos consumidos según tres tarifas diferentes:



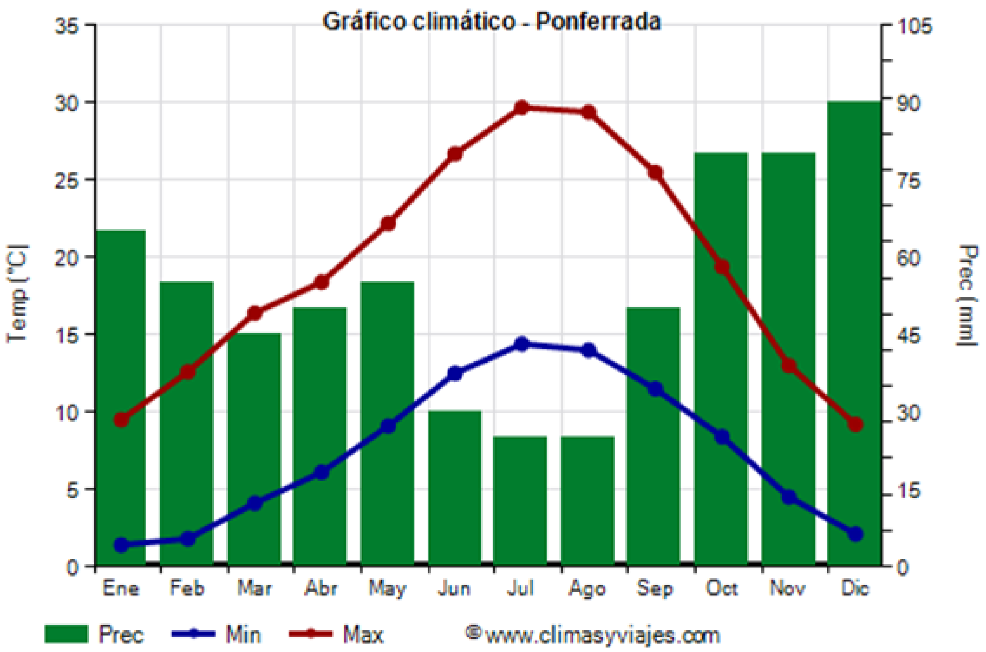
Observa la gráfica y responde a las siguientes cuestiones:

a. ¿Cuál de las tres tarifas te cobra un coste fijo por disponer de datos móviles? ¿Cuál es dicho coste fijo?
b. A parte de dicho coste fijo, ¿cuánto cuesta cada giga con esa tarifa?
c. ¿Cuánto me cobran si consumo 7 gigas con cada tarifa? ¿Y si consumo 12 gigas?
d. ¿Cuántos datos tengo que consumir para que la tarifa azul sea la más rentable?
e. ¿Qué tarifa interesa más contratar si consumo un número muy elevado de gigas?
f. ¿Qué tarifa me cobra más por giga consumido?

¿QUÉ SABES DE ...?



VEO	PIENSO	ME PREGUNTO



VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

1. COORDENADAS

RETO 1

En el ajedrez se utiliza un sistema de coordenadas, llamado **notación algebraica**, para facilitar la comunicación con otros jugadores y poder escribir partidas o jugadas. Es el "lenguaje del ajedrez".

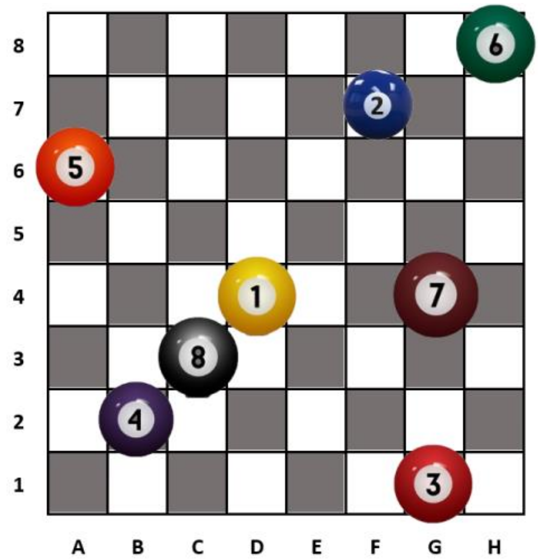
A las casillas del tablero se les llama **escaques.**

Tienes que dejar siempre una casilla blanca abajo a la derecha. Al empezar una partida, las piezas blancas se colocan en las filas 1 y 2 y las piezas negras en las filas 7 y 8.

Puedes entrenar la identificación de las coordenadas, utilizando el código QR o el vínculo https://lichess.org/training/coordinate#find

a) Localiza las coordenadas de las 8 bolas de billar en el tablero de ajedrez.

BOLA	
1	D4
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	



b) ¿A qué posición llegamos si desplazamos la bola 1 dos unidades a la izquierda y 4 posiciones hacia arriba?

c) ¿Qué desplazamiento tendríamos que hacer con la bola 2 para golpear a la bola 7?

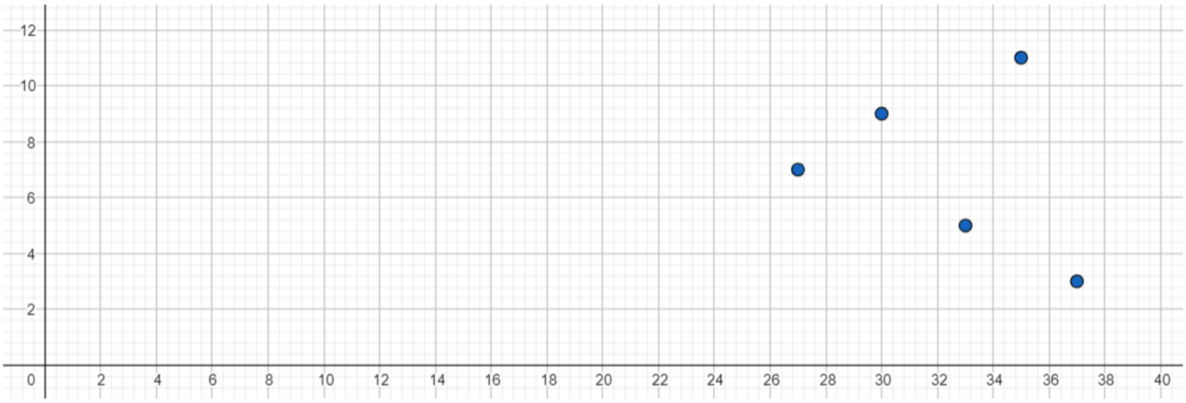
d) Queremos tener una y solo una bola en cada fila y en cada columna del tablero, pero solo nos dejan cambiar una de las bolas a la casilla que queramos. ¿Qué bola moverías y a qué posición?

e) ¿Se te ocurren otras situaciones en las que necesites identificar la posición de un objeto a través de información con números o con números y letras?

RETO 2

Isabella, una jovencita italiana, ha tenido últimamente varios novietes… pero como ella es muy exigente, todos le duraron poco tiempo.

En la imagen se muestra la relación entre la edad del chico y los días que duraron juntos. Deduce, a partir de las de las pistas, quién es cada chico y por qué dejó a cada uno.

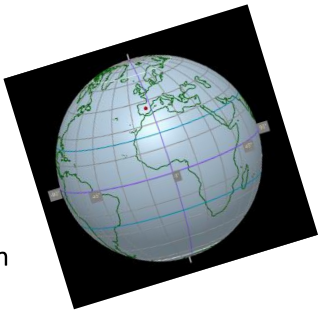


a. Al que dejó porque no se tomaba en serio su trabajo tiene 3 años más que el que le duró 9 días.
b. Splinter, al que aguantó solo 3 días, tiene 2 años más que el que no sabía cocinar.
c. El que no sabía cocinar le duró 4 días más que el que le miró el móvil sin permiso.
d. Raphael, al que no dejó por no tomarse en serio su trabajo, tiene 2 años menos que el que se gastaba todo en videojuegos.
e. Michelangelo no tiene 30 años.
f. A Donatello y Leonardo los dejó, a uno porque le miró el móvil sin permiso y a otro por celoso, pero no sabemos si en ese orden.
g. Leonardo no tiene 27 años.

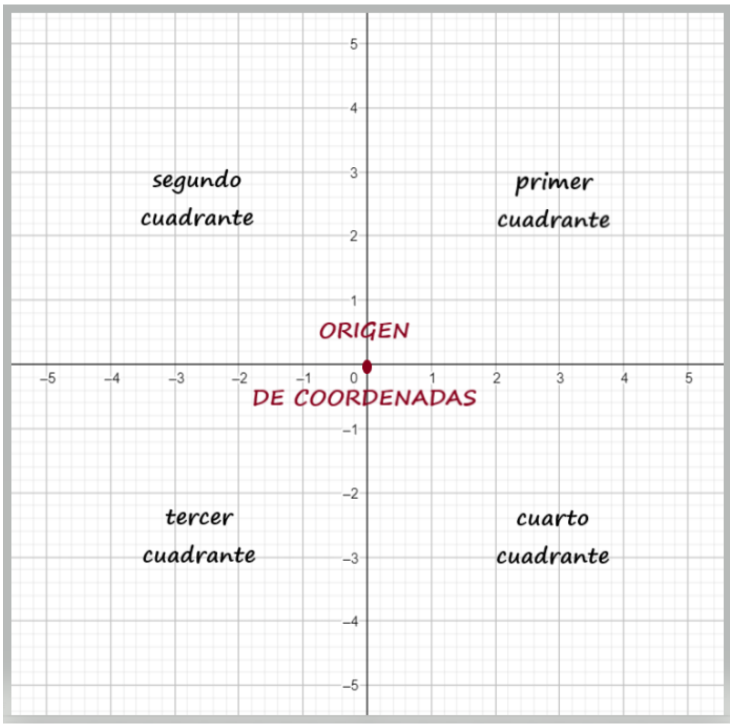
Nombre del noviete	Edad	Días de noviazgo	Razón de la ruptura
	27		
	30		
	33		
	35		
	37		

APRENDE Y APLICA

En la vida cotidiana utilizamos sistemas de referencia para medir y comunicar posiciones. Utilizamos convenios para referirnos a las casillas del tablero de ajedrez, la localización de un punto del planeta mediante su latitud y longitud, códigos de números y letras para encontrar el coche en el aparcamiento del centro comercial… ¿Se te ocurren más ejemplos?



El sistema de referencia cartesiano es el más utilizado en matemáticas para ubicar cualquier punto del plano. Consiste en dos rectas numéricas perpendiculares entre sí a las que llamaremos EJES DE COORDENADAS. El punto en el que se cortan es el ORIGEN DE COORDENADAS y es el cero para los dos ejes, quedando dividido el plano en cuatro regiones llamadas CUADRANTES.



No siempre usaremos todos, en muchas ocasiones nos será suficiente el primer cuadrante porque no necesitaremos trabajar con números negativos. Pero en otras ocasiones, sí.

Podemos usar escalas diferentes para cada eje, pero tendremos que ser cuidadosos en respetar la misma escala durante todo el eje, todo el tiempo. Trozos diferentes significarán medidas diferentes.

1.- COORDENADAS

Las coordenadas nos sirven para representar e identificar puntos del plano. Si queremos referirnos a un punto, podemos nombrarlo con una letra mayúscula. Vamos a usar, por ejemplo, la letra A. A nuestro punto llamado A le asignaremos dos números, pero en esta ocasión será necesario un orden. Por eso decimos que las coordenadas de un punto son UN PAR ORDENADO de números y los escribimos juntos dentro de un paréntesis y separados por una coma.

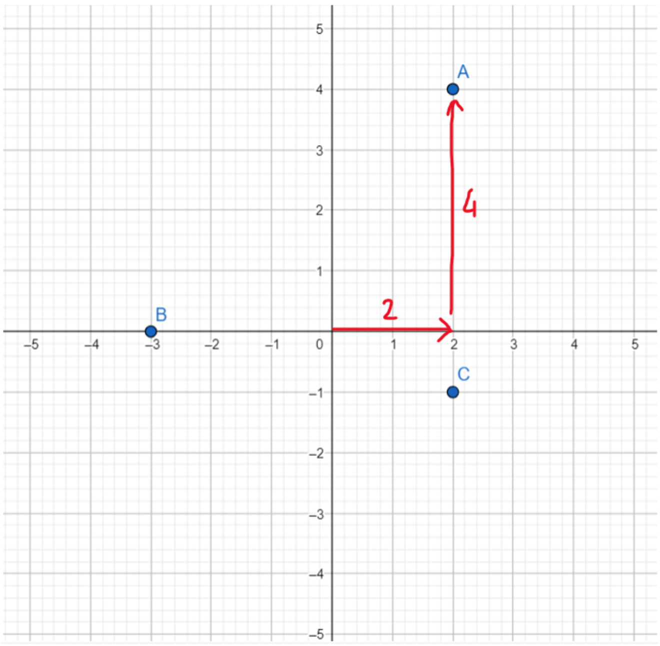
El primer número indica lo que nos hemos desplazado desde el origen hasta la vertical del punto EN HORIZONTAL. Si es hacia la derecha, la cantidad será positiva y si es hacia la izquierda, negativa.

El segundo número indica lo que nos hemos desplazado desde el origen hasta la horizontal del punto EN VERTICAL. Si es hacia arriba, la cantidad será positiva y si es hacia abajo, negativa.

El origen de coordenadas suele usar la letra O y como no hay desplazamientos a ningún lado, sus coordenadas son cero las dos. Lo escribimos así: el origen de coordenadas es el punto O(0,0).

Localiza las coordenadas de los puntos A, B y C:

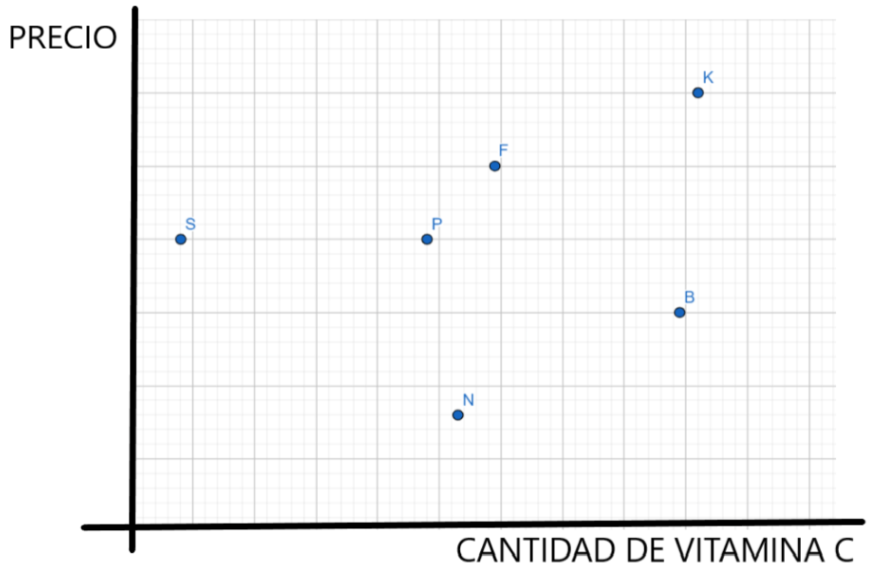
El punto A tiene coordenadas $(2,4)$, porque primero nos desplazamos desde el origen de coordenadas 2 unidades hacia la derecha hasta su vertical y luego subimos 4 unidades hasta el punto.



El punto B tiene coordenadas $(-3,0)$, porque nos desplazamos únicamente 3 unidades hacia la izquierda, pero luego ni subimos ni bajamos.

El punto C tiene coordenadas $(2,-1)$ porque nos desplazamos dos unidades hacia la derecha desde el origen y luego bajamos una unidad.

Puntos que contienen información: En el siguiente gráfico cada punto representa un alimento rico en vitamina C relacionando la cantidad que contiene de ella por cada 100 mg con el precio por kilogramo. Los alimentos son: naranja, kiwi, sandía, piña, fresa y brócoli.



a) ¿Qué alimento es más caro? *El kiwi, porque está por encima del resto en la variable precio* ¿Y más barato? *La naranja, porque está por debajo del resto en la variable precio.*

b) ¿Qué alimento tiene más vitamina C? *El kiwi, porque está más a la derecha que el resto en la variable cantidad de vitamina C.* ¿Y cuál tiene menos? *La sandía, porque está más a la izquierda que el resto en la variable vitamina C.*

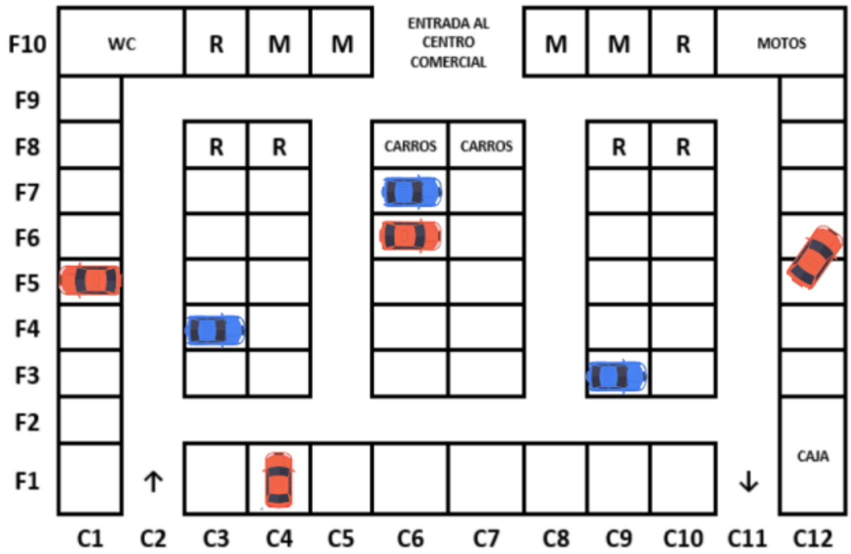
c) Hay dos alimentos con el mismo precio, pero si a mí no me gusta la piña y tuviera que comprar la misma cantidad de vitamina C en sandías, ¿puedes estimar cuantos kilogramos de sandía tendría que comprar para igualar la vitamina C de un kilogramo de piña? *Unos 5 o 6 kilogramos, que son las veces que la coordenada horizontal de la piña contiene a la coordenada horizontal de la sandía.*

d) ¿Cuáles son los dos alimentos más eficientes? *El brócoli y las naranjas, porque contienen bastante vitamina C y son baratos* ¿Y el que menos? *La sandía, porque siendo barata, hay que comer mucha para igualar el aporte de otros alimentos.*

e) ¿Qué representaría una recta que pase por el origen y por el punto que representa a las naranjas? *Todos los alimentos que se situaran en esa recta tendrían la misma proporción de vitamina C por euro pagado. Serían "igual de eficientes".* ¿Se te ocurre una manera de VER quién gana entre el brócoli y las naranjas?

PRACTICA

1.1.- En la siguiente imagen tienes representado el plano del aparcamiento de un centro comercial. Para identificar cada plaza se utiliza el número de fila y el número de columna en el que está ubicada.



a) Vamos a aparcar en la plaza más cercana a la entrada del centro comercial que queda libre, pegada a los carros. Márcala con una X e indica su ubicación dejando por escrito fila y columna.

b) Indica de la misma manera la posición de las plazas reservadas para personas con minusvalía, la de las plazas reservadas y las dos que está ocupando el vehículo mal aparcado.

c) Acaban de llegar vehículos a las plazas (F3, C3), (C10, F5), (C8, F10). Márcalos en el plano. ¿Importa mucho el orden en el que demos la información?

d) ¿Puedes aparcar en la plaza (C5, F2)? ¿Por qué?

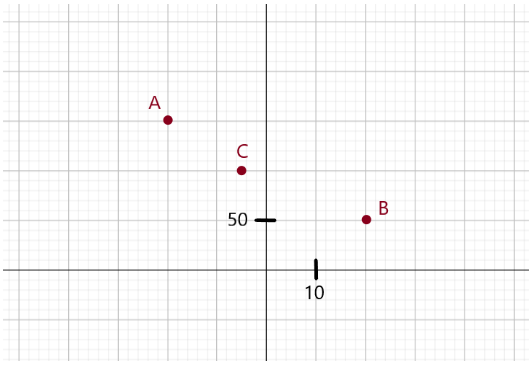
e) ¿Cuántas plazas disponibles quedan en la tercera fila? ¿Y en la séptima columna? ¿Hay alguna columna sin plazas de ningún tipo?

1.2.- Representa los siguientes puntos en el plano de coordenadas siguiente y únelos siguiendo el orden alfabético:

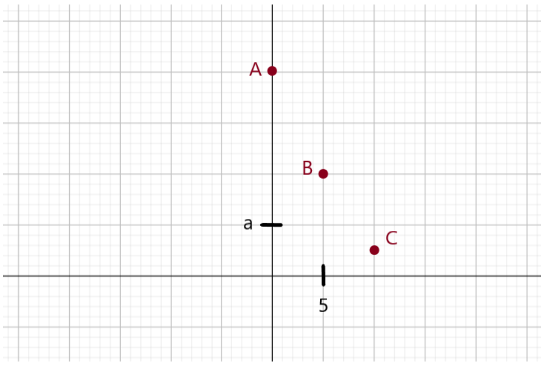
$I(-1,-1)$	$F(-3,5)$	$C(-3,-3)$
$E(1,5)$	$A(-1,3)$	$H(1,-3)$
$G(5,-3)$	$B(-3,1)$	$D(1,1)$

1.3.- Da las coordenadas de los puntos representados en los siguientes ejes, prestando mucha atención a las escalas utilizadas:

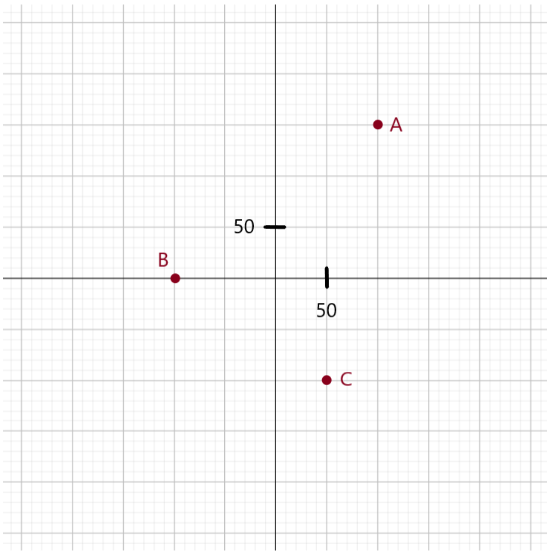
a) Gráfica 1:



b) Gráfica 2.



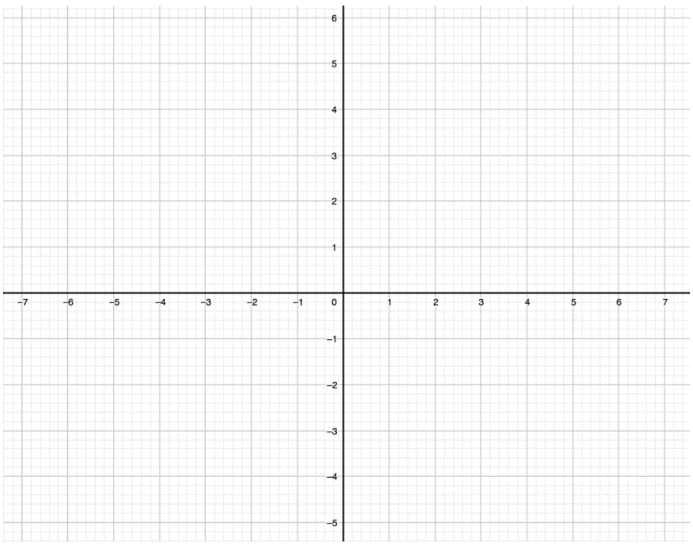
c) Gráfica 3:



1.4- Los vértices de un triángulo están situados en los puntos $A(3,2)$, $B(7,5)$ y $C(3,5)$.

a. Represente el triángulo y cuenta de la forma más exacta posible cuántos cuadrados hay dentro del triángulo (área) y estima lo que mide la suma de las longitudes de todos los lados (perímetro).

b. Ahora, resta 5 a todas las coordenadas horizontales y resta 6 a todas las coordenadas verticales y vuelve a representar el triángulo. ¿Qué ha ocurrido?



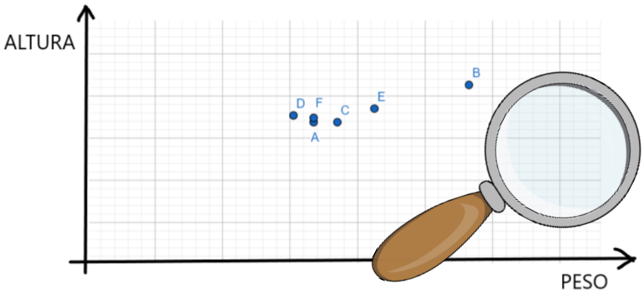
1.- COORDENADAS

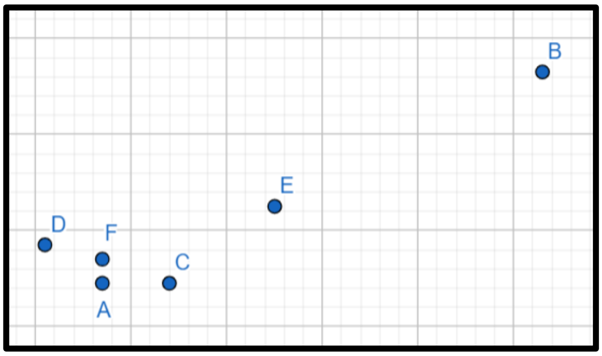
1.5- Cada punto del plano de coordenadas siguiente representa a un deportista. ¿Sabrías decir quién es quién?

Alexia Putellas (futbolista)	**Rafa Nadal (tenista)**	**Messi (futbolista)**
Pau Gasol (exbaloncestista)	**Lydia Valentín (halterófila)**	**Alejandro Valverde (ciclista)**

Pista 1: Los dos futbolistas pesan lo mismo.

Pista 2: Dos de los tres oros olímpicos miden lo mismo (Son oros olímpicos Nadal, Messi y Lydia).





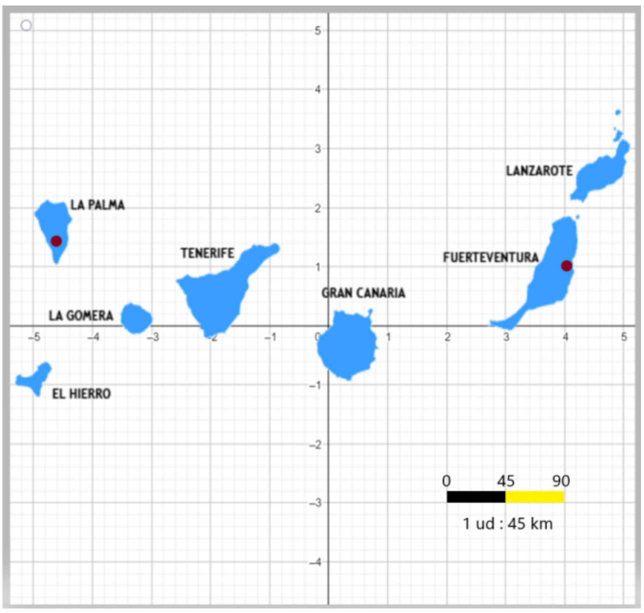
1.6- Haz un plano de tu clase dibujando la mesa del profesor y los pupitres.

Después, diseña un sistema de coordenadas por filas y columnas para poder escribir de forma precisa donde está tu pupitre. La numeración debe ser más baja cuanto más cerca esté de la mesa del profesor.

1.7.- A continuación, tienes un mapa de las Islas Canarias.

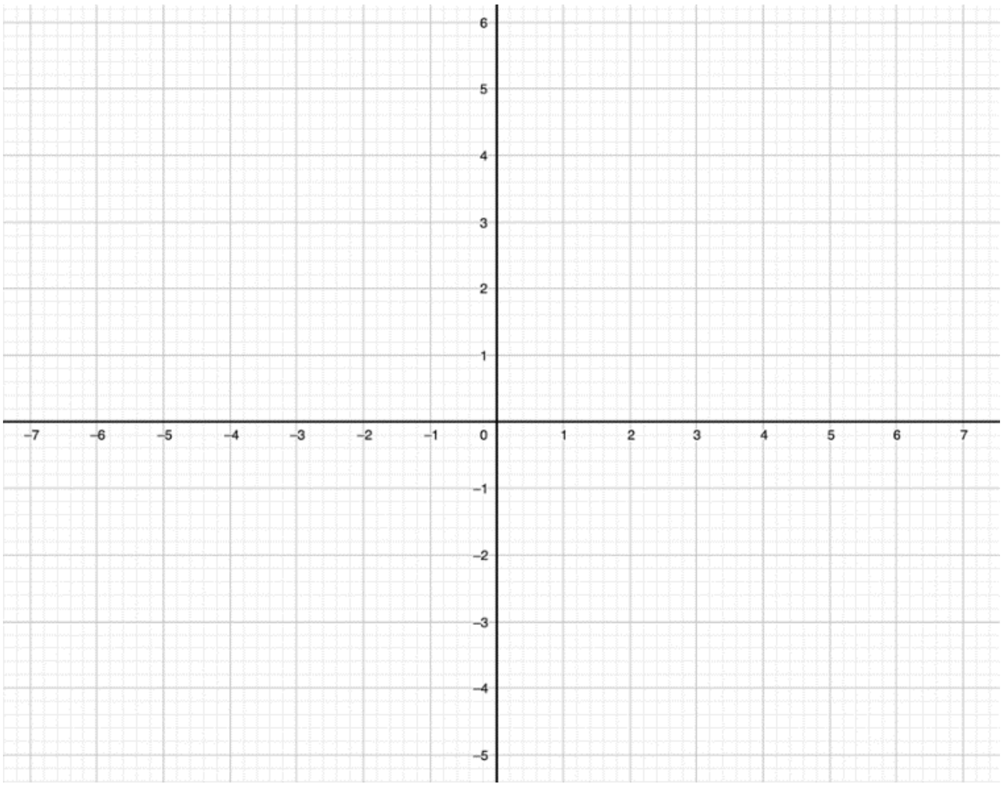
Cada unidad del mapa son 45 kilómetros reales, es decir: la razón de escala del mapa es 1 unidad : 45 km. Te encuentras en Fuerteventura, en Puerto del Rosario y vas a embarcar con las siguientes instrucciones (vete anotando las coordenadas de los puntos a los que llegas):

	COORDENADAS
Puerto del Rosario	
45 kilómetros al este	
45 kilómetros al norte	
135 kilómetros al oeste	
135 kilómetros al sur	
225 kilómetros al oeste	
117 kilómetros al norte	
63 kilómetros al oeste	
Desembarcas en…	
Recorre otros 10 kms hacia el suroeste y ya estarás en Cumbre Vieja.	



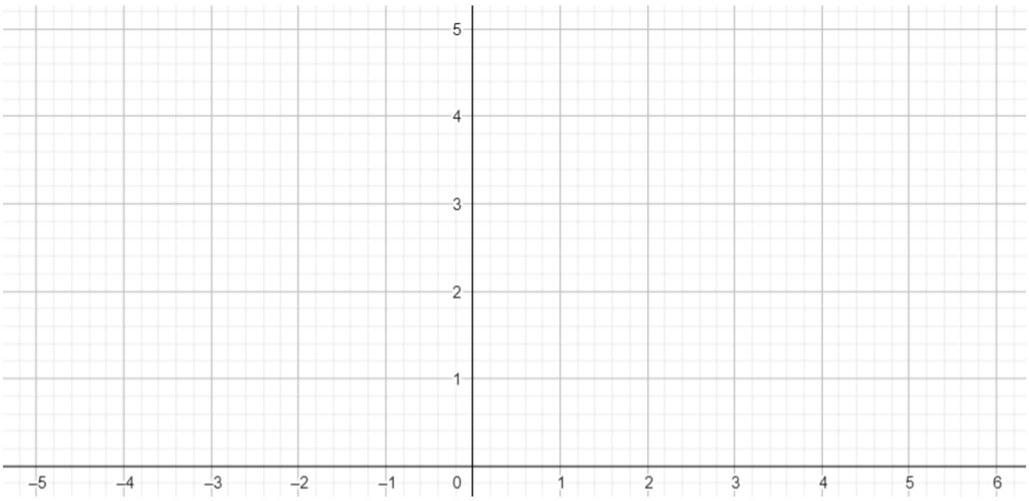
1.8.- Tres de los cuatro vértices de un paralelogramo están situados en los puntos de coordenadas, $A(-2,-2)$, $B(3,1)$ y $C(-1,2)$.

Encuentra tres soluciones diferentes para el cuarto vértice. ¿Puedes clasificar los paralelogramos obtenidos?



1.9.- Dos vértices de un triángulo ABC son $A(0,1)$ y $B(3,4)$.

¿Dónde puede estar el punto C si queremos que pertenezca al primer cuadrante, que el área del triángulo sea mayor de 6 unidades cuadradas y que su coordenada en el eje Y sea 1?

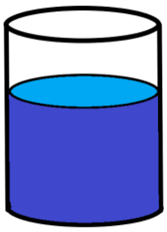


2. GRÁFICAS Y TABLAS

RETO

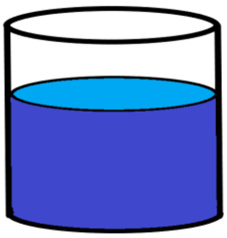
A) LA GEOMETRÍA DESDE OTRO PUNTO DE VISTA

Vamos a llenar los siguientes vasos con un grifo que vierte agua a un ritmo constante. En el primer vaso representamos el nivel del agua en función del tiempo de llenado. Fíjate en este ejemplo e intenta averiguar en las tres propuestas siguientes qué gráfico corresponde a cada vaso.

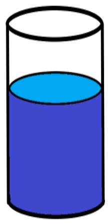


<u>PROPUESTA I</u>:

A.



B.

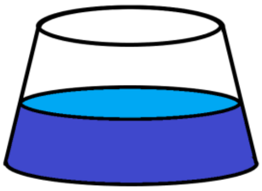


I.

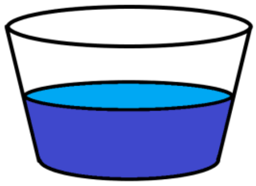
II.

PROPUESTA II:

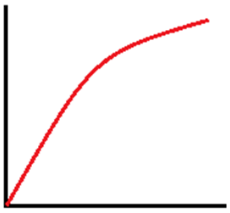
C.



D.



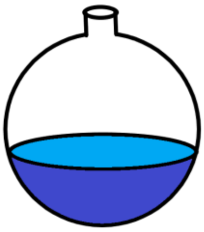
III.



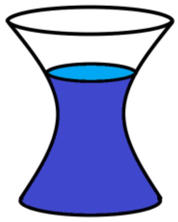
IV.

PROPUESTA III:

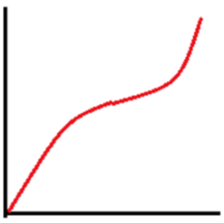
E.



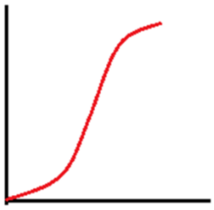
F.



V.

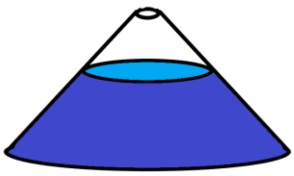


VI.

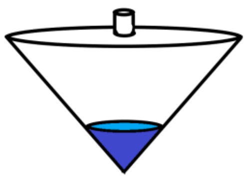


¿Podrías ahora dibujar tú los gráficos de estos vasos?

G.



H.

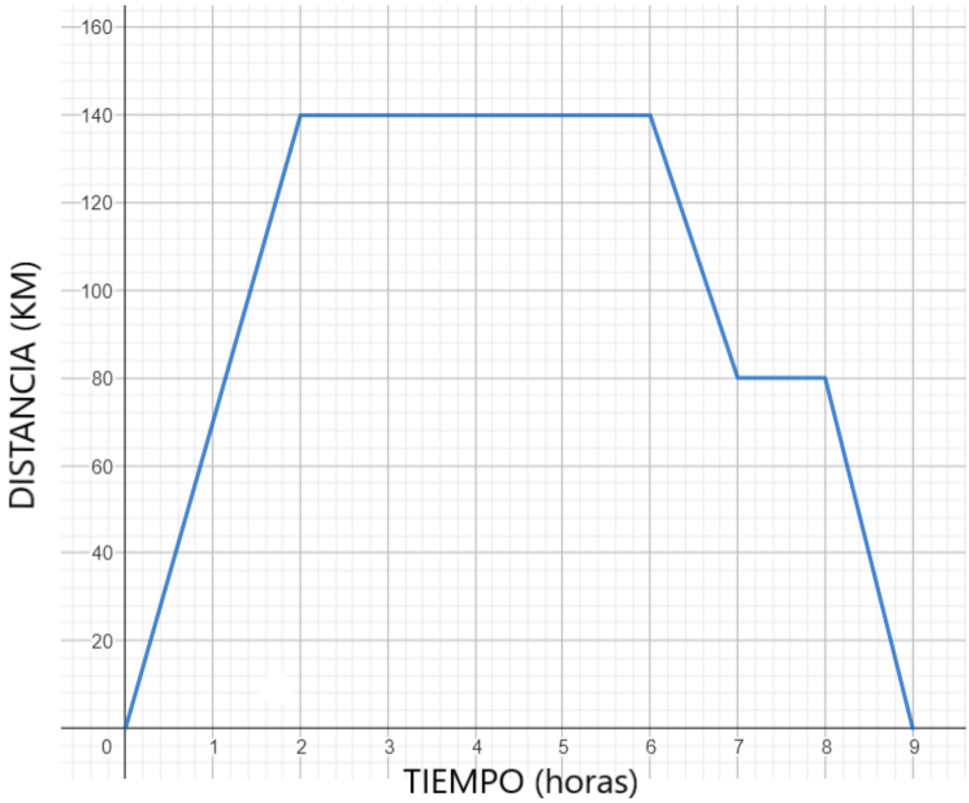


APRENDE Y APLICA

Las gráficas describen relaciones entre dos magnitudes. Se representan en dos ejes perpendiculares y para interpretar la gráfica, hemos de mirarla de izquierda a derecha, observando cómo varia la magnitud representada en el eje vertical, al aumentar la magnitud del eje horizontal.

La expresión "está en función de" se utiliza en el lenguaje cotidiano y viene a significar "depende de". Por ejemplo: la ropa de abrigo que te pones está en función del frío que hace.

Interpretación de una gráfica. La gráfica representa un viaje en coche de Lucía con su familia a su pueblo, reflejando el tiempo (en horas) y la distancia a su casa (en kilómetros):



En el eje horizontal se representa la magnitud del tiempo que viene expresada en horas (cada cuadrito es 1 hora) y en el eje vertical se expresa la magnitud de la distancia que viene expresada en km (cada cuadrito son 20km). Esta magnitud de la distancia depende de la del eje horizontal, es decir, es función del tiempo.

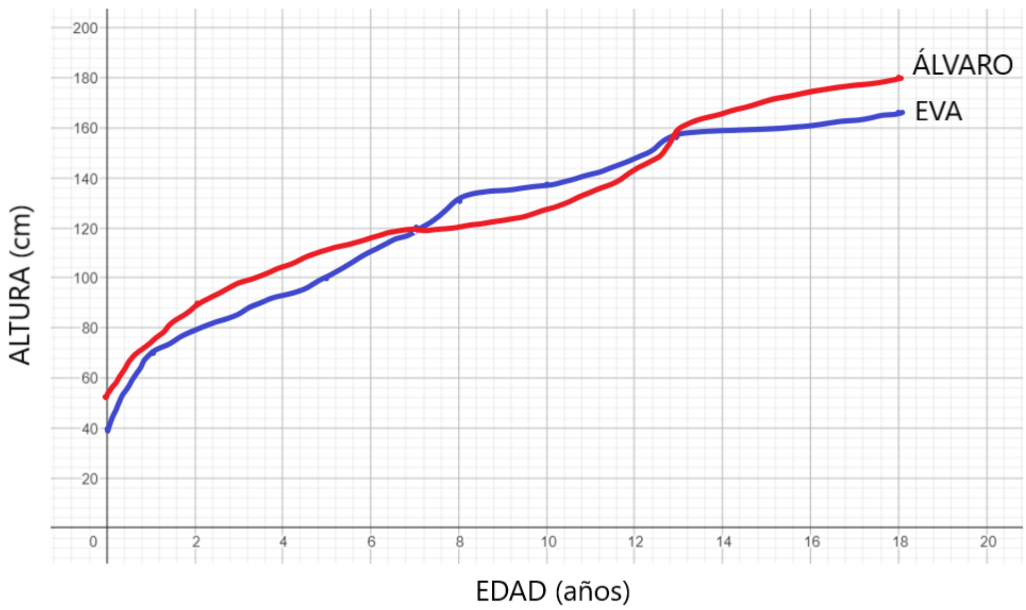
A grandes rasgos, en la gráfica vemos que el pueblo de Lucía está a una distancia de 140km de su casa (el punto de partida). En la ida (primer tramo) no se produce ninguna parada y vemos que a medida que aumenta el tiempo, también aumenta la distancia a su casa, mientras que en el segundo tramo la distancia permanece constante, pero vemos que el tiempo va aumentando. Por último, en el tercer tramo vuelve a su casa realizando una parada intermedia.

Vamos a seguir el estudio de la gráfica respondiendo a una serie de preguntas.

- ¿Cuánto duró el trayecto de ida al pueblo de Lucía? El trayecto de ida a su pueblo duró 2 horas.
- ¿Cuánto tiempo permaneció Lucía en su pueblo? Permaneció en el pueblo durante 4 horas.
- ¿En qué momento comenzó el regreso a casa? Comenzó el regreso a casa a las 6 horas de haber salido.
- ¿En qué período ha ido más rápido? Ha ido más rápido en el último tramo, entre las 8 y las 9 horas, ya que recorrió 80km en 1hora y vemos que la recta tiene mayor inclinación que en los otros tramos.
- ¿Se ha parado en algún momento en su viaje de regreso? Se paró durante una hora (entre las 7h y las 8h) a 80km de su casa.

Comparación de gráficas. Para comparar dos gráficas seguimos observándolas de izquierda a derecha, prestando especial atención a los puntos dónde se encuentran. Por ejemplo:

La siguiente gráfica representa las alturas de Álvaro y Eva, dos amigos de la misma edad, durante sus primeros 18 años de vida. Vamos a comparar las alturas de los dos niños en función del tiempo:



Vemos en la gráfica que, al nacer, Álvaro medía más que Eva y durante el primer año prácticamente fueron a la par, después Álvaro creció un poco más que Eva hasta los 7 años, *que justamente medían lo mismo. A partir ese momento, Eva pasó a medir más que Álvaro hasta los 13 años. En ese punto volvieron a medir lo mismo y, posteriormente, Álvaro siguió creciendo hasta que a los 18 años llegó a medir 180cm, mientras que Eva a esa misma edad, midió 165cm.*

Nos pueden hacer preguntas para comparar ambas gráficas, del tipo:

a. ¿Entre qué edades Álvaro medía menos que Eva? Entre los 7 y los 13 años.

b. ¿Quién fue el primero en llegar a medir 150cm? ¿A qué edad? Eva, a la edad de 12 años.

Las ***gráficas*** describen relaciones entre dos magnitudes. Esta relación puede venir dada, además de la gráfica, por la correspondencia entre las cantidades de cada una de ellas en una tabla de valores, pero también se puede describir una ***expresión verbal***. Una ***tabla*** es una manera cómoda de organizar datos numéricos para poder usarlos en comparaciones, en representaciones gráficas, observar relaciones o patrones... Se colocan en forma rectangular, en filas y columnas, cada cantidad de una magnitud junto a la correspondiente cantidad de la otra magnitud.

Representación de un enunciado en forma de tabla. A partir de la descripción verbal se puede crear una tabla poniendo parejas de valores de ambas variables. Si se parte, por ejemplo, del siguiente enunciado:

En los paquetes de galletas de cierta marca se informa del contenido calórico de ese paquete. Los paquetes que son de 3 galletas ponen 48 kcal; los de 2 galletas aportan 32 kcal; y los de 5 galletas contienen 80 kcal.

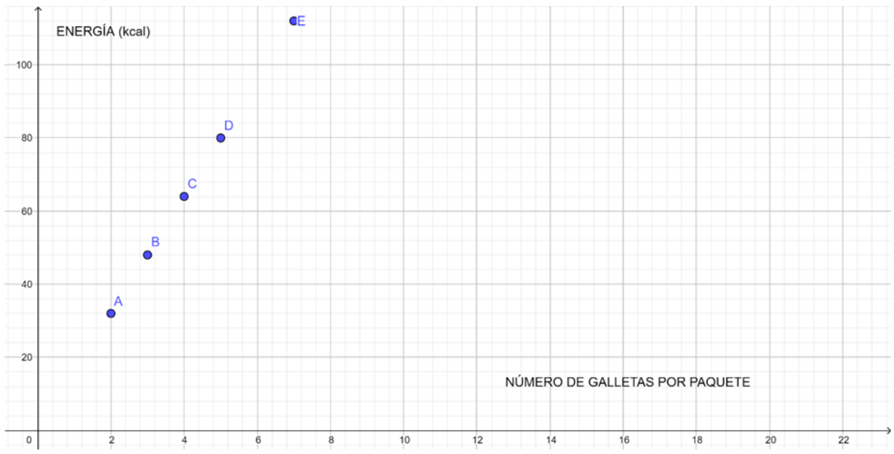
El uso de una tabla facilita el cálculo y la comprensión de la relación entre magnitudes.

Nº de galletas	2	3	4	5	7
Energía (kcal)	32	48		80	

Conviene ordenar de menor a mayor según los valores de la magnitud que pondríamos en el eje horizontal. Para averiguar cuántas kilocalorías corresponden a un paquete de 4 galletas, basta con hacer el doble la energía de un paquete de 2 galletas, 32 kcal: el doble de 32 kcal es 64 kcal. Ahora, para deducir la energía que habría en uno de 7 galletas, podemos por ejemplo sumar la que aportaría un paquete de 3 galletas, 48 kcal, con la que aportaría uno de 4 galletas, 64 kcal. 48 kcal más 64 kcal son 112 kcal. Completamos ahora la tabla anterior:

Nº de galletas	2	3	4	5	7
Energía (kcal)	32	48	64	80	112

Representación gráfica de una tabla A partir de una tabla con dos magnitudes, se puede representar en unos ejes cada par ordenado formado por un valor de una magnitud con el valor correspondiente de la otra magnitud como un punto del plano. En el ejemplo anterior:



Otro ejemplo a partir del siguiente enunciado:

> *Un camarero tiene la costumbre de contar cuántos choques de copas hay cuando brindan entre sí todos los clientes de una mesa. Observa que cuando hay 2 clientes, hay solo 1 choque de copas; que cuando hay 3 clientes suenan 3 choques de copas; que cuando hay 4 clientes se oye 6 choques de copas; y que cuando hay 5 clientes son 10 los choques de copas. Organiza los datos de la manera que consideres más cómoda, e intenta averiguar cuántos choques habría en una mesa de 6 clientes*

Organizamos los datos en una tabla, para observar cómo evoluciona el número de choques:

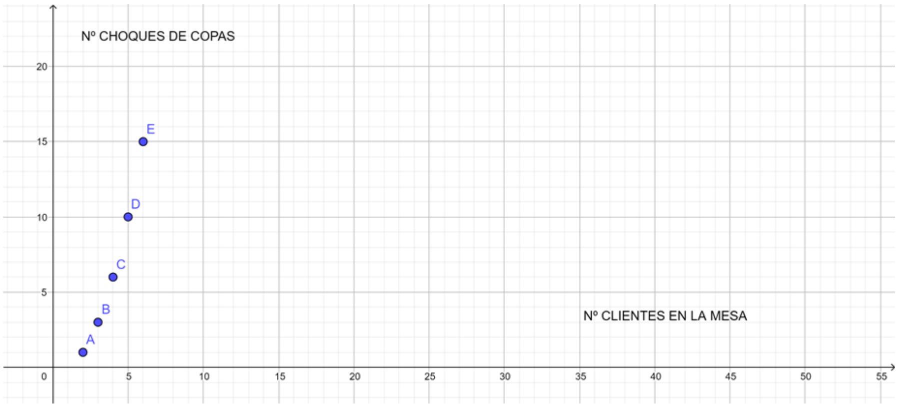
Nº CLIENTES	2	3	4	5	6
Nº CHOQUES	1	3	6	10	

Para hallar cuántos choques habría en una mesa de 6, una manera de pensarlo es imaginar que llega con retraso un cliente a una mesa de 5: allí ya ha habido 10 choques, y ahora hay que añadir los 5 choques que tendrá que hacer educadamente el sexto cliente, con lo que serán 15 en total en la mesa de 6. La tabla quedará finalmente así:

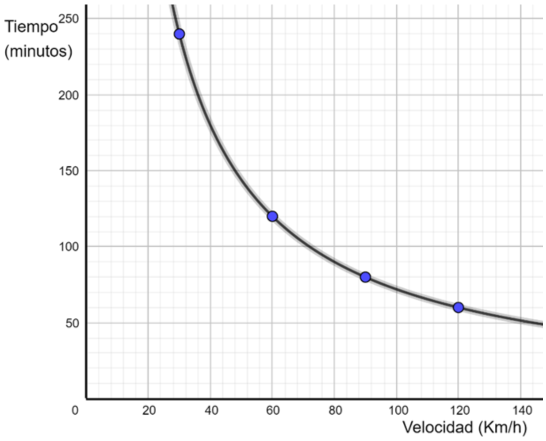
Nº CLIENTES	2	3	4	5	6
Nº CHOQUES	1	3	6	10	15

La representación gráfica de la situación anterior sería la siguiente:

2.- GRÁFICAS Y TABLAS



Obtención de una tabla a partir de un gráfico. En este caso basta con escribir las coordenadas de los puntos en la tabla. Por ejemplo, si tenemos representada la velocidad de un coche y el tiempo que tarda en recorrer una distancia determinada en el siguiente gráfico:



La tabla que se obtiene es:

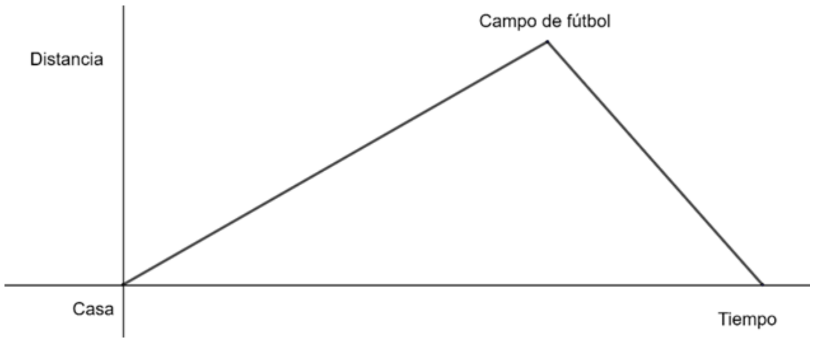
Velocidad (km/h)	30	60	90	120
Tiempo (minutos)	240	120	80	60

Obtención de un enunciado a partir de una tabla. Analizando los valores de la tabla se puede describir la relación entre las magnitudes. Por ejemplo:

Un quiosquero quiere saber el peso de las diferentes cajas en las que le vienen las chocolatinas. Si dispone de la siguiente tabla, que relaciona el número de chocolatinas con el peso, puede deducir que el peso de cualquier número de chocolatinas se obtiene multiplicando el número de chocolatinas por el peso unitario, que es de 90 g

Número de chocolatinas	1	5	10	20
Peso (gramos)	90	450	900	1800

Obtención de un enunciado a partir de un gráfico. Describir la relación que se observa en una gráfica con palabras, equivale a obtener el enunciado. Por ejemplo, de la gráfica siguiente sobre el recorrido de Lucas hacia el campo de fútbol el día que se le olvidaron las botas en casa:

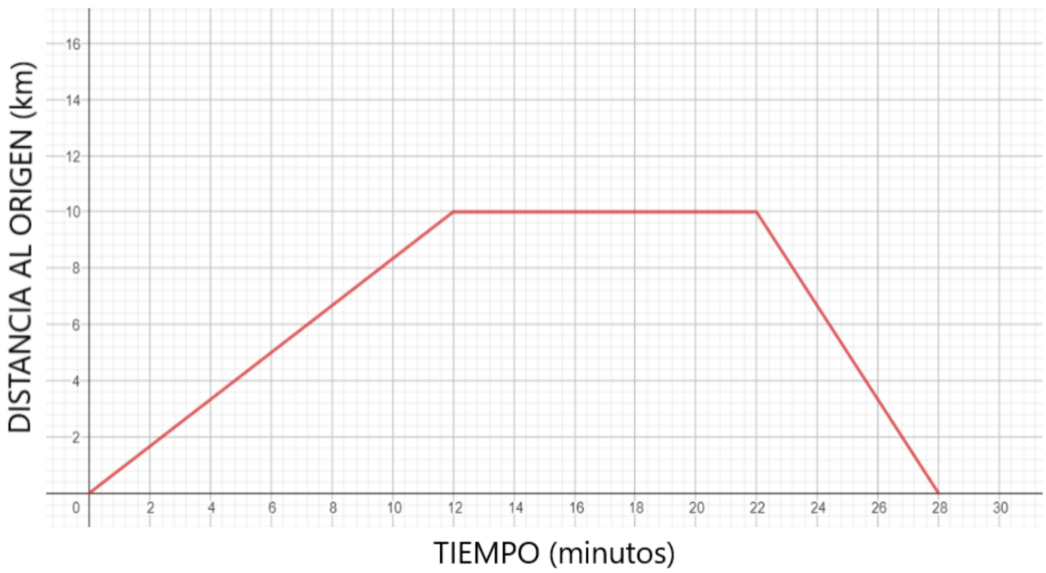


Se puede describir de la siguiente manera: "Lucas va a entrenar al campo fútbol, pero justo cuando llega al campo se da cuenta de que se le han olvidado las botas de fútbol. Corriendo vuelve a su casa a por las botas, y se sabe que va a mayor velocidad porque recorre la misma distancia en menos tiempo.

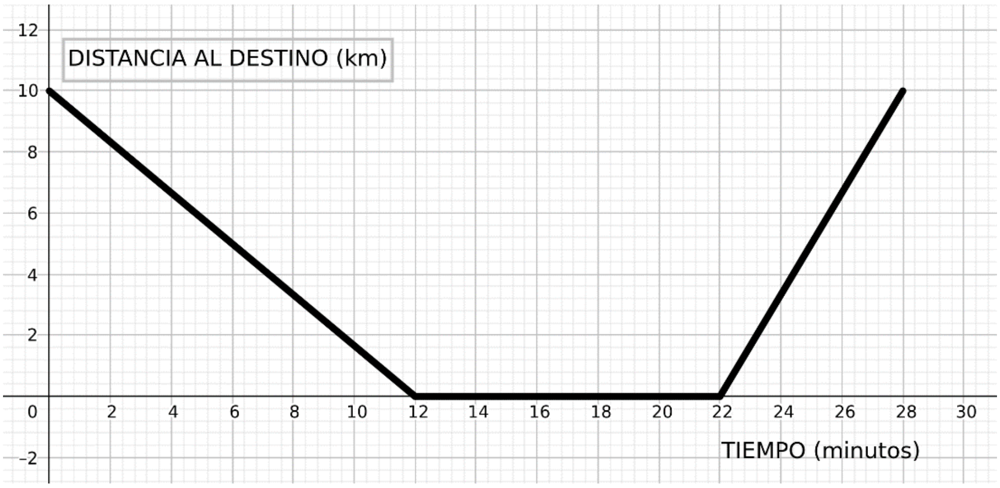
PRACTICA

2.1.- Observa la siguiente gráfica, que representa el viaje de un motorista, y responde a las siguientes cuestiones:

a. ¿Cuánto duró el viaje de ida?
b. ¿Cuánto tiempo estuvo parado?
c. ¿Cuánto duró el viaje de vuelta?
d. ¿Qué distancia recorrió en total el motorista?
e. ¿En qué tramo fue más rápido el motorista?



2.2.- Observa la siguiente gráfica, que representa el viaje de un motorista, y responde a las siguientes cuestiones:



a. ¿Cuánto duró el viaje de ida?

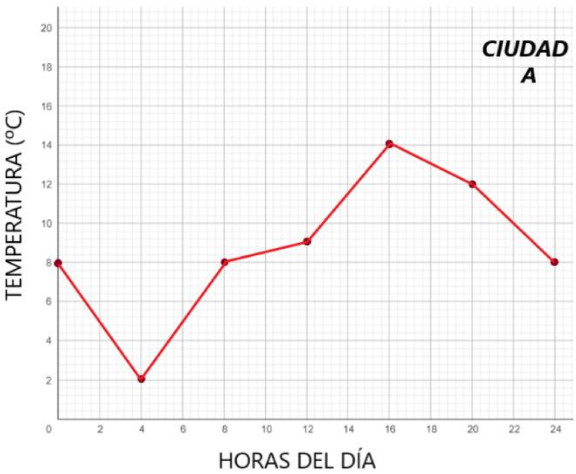
b. ¿Cuánto tiempo estuvo parado?

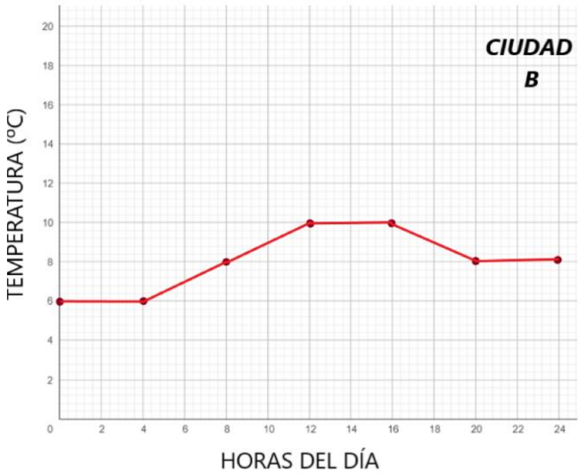
c. ¿Cuánto duró el viaje de vuelta?

d. ¿Qué distancia recorrió en total el motorista?

e. ¿En qué tramo fue más rápido el motorista?

2.3.- Observando las gráficas responde a las siguientes preguntas:





a. ¿En cuál de las dos ciudades baja más la temperatura? ¿Cuál es dicha temperatura? ¿A qué hora se produce?

b. ¿Cuál es la temperatura más alta que se alcanza en cada una de las gráficas y a qué horas se producen?

c. ¿En cuál de las dos son más bruscas las variaciones de temperatura?

d. ¿Cuál de las dos tiene un clima más suave?

2.4.- En los envases de yogur viene especificado el aporte energético de cada presentación. Por ejemplo, en los de 500 g pone que aporta 320 kcal, y en los de 125 g son 80 kcal.

1. Crea una tabla con los datos, y averigua cuánto aporte energético tendrá un envase de 250 g, y cuánto otro de 100 g.
2. Representa en unos ejes los valores recogidos en la tabla.
3. Razona qué significaría unir los puntos con segmentos, e interpreta la pendiente obtenida.

2.5.- Tenemos 24 cuadraditos iguales, y queremos formar rectángulos usándolos todos.

1. ¿Qué dimensiones tendrán los rectángulos distintos que podemos formar? Expresa la respuesta en una tabla
2. Representa en unos ejes los valores recogidos en la tabla.

2.6.- Representa en una gráfica:

1. Altura de una piedra lanzada hacia arriba en función del tiempo.
2. Nivel de agua de un pantano en función del mes del año.
3. El dinero pagado por la compra de patatas en función de su peso.
4. El alquiler de una bicicleta que cuesta una cantidad inicial más otra cantidad por cada hora que se utiliza en función del tiempo utilizada.
5. Distancia a la superficie terrestre de un satélite que orbita alrededor de la tierra en función del tiempo.

2.7.- Representa las siguientes rutas en una gráfica que relacione tiempo y espacio recorrido:

1. Sale de su casa directo a su destino sin pararse por el camino.
2. Sale de casa, se encuentra con otro excursionista, se para a hablar con él y continúa su camino.
3. Sale de su casa, vuelve porque se olvidó la cantimplora y continúa su camino.
4. Sale de su casa, se encuentra con un perro y corre hasta llegar a su destino.

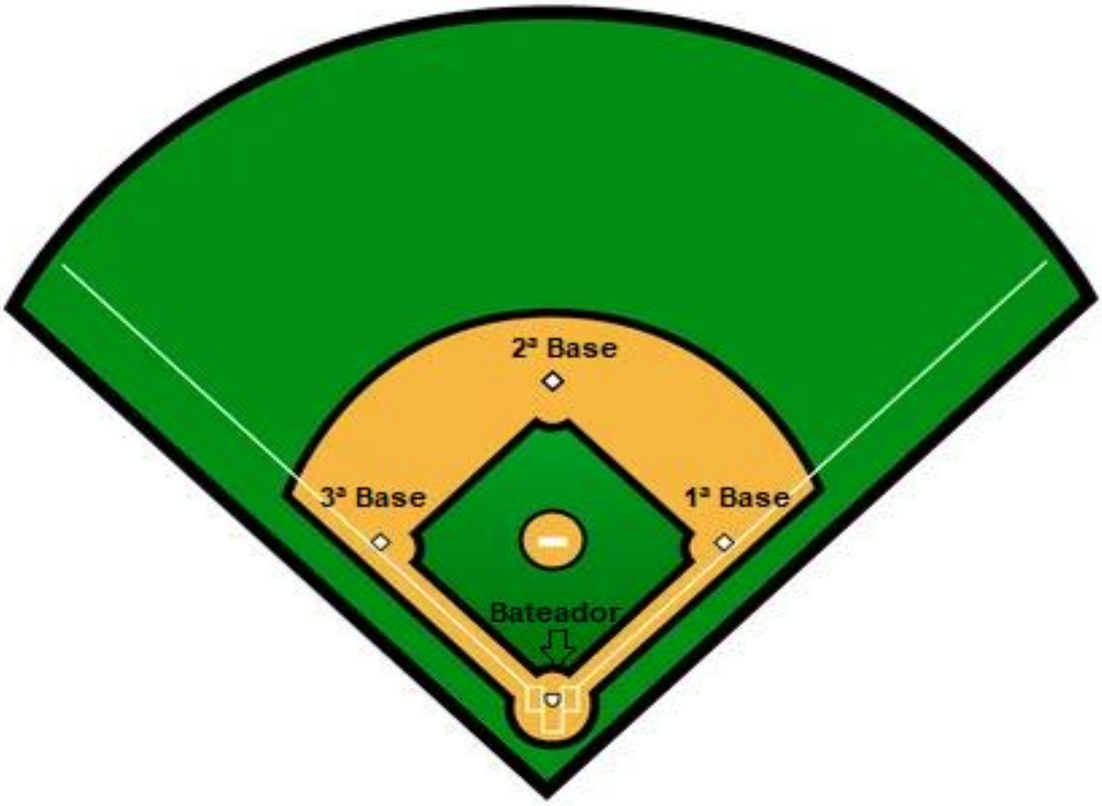
2.8.- Representa, construyendo primero una tabla de valores:

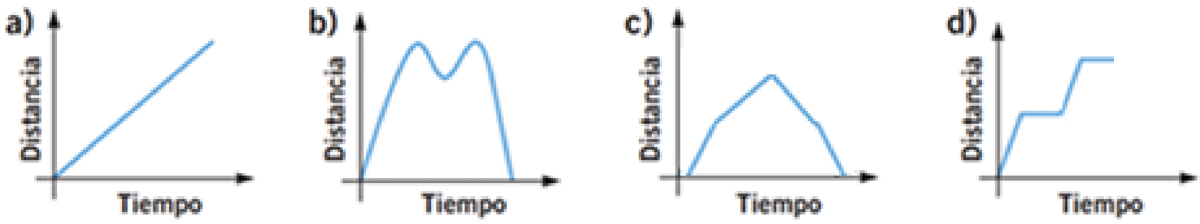
1. El área de un círculo a partir de su radio
2. El perímetro de un cuadrado a partir de su lado
3. El número de trabajadores y el tiempo en realizar el trabajo

2.9.- Representa utilizando una tabla de valores:

1. Dinero ahorrado por Ana según los meses si quiere ahorrar el dinero que le dan sus abuelos mensualmente, 10 € y ya tiene ahorrados 30€.
2. Gasto de un coche según los kilómetros recorridos si gasta 6 litros de gasolina cada 100 km.

2.10.- Si el bateador hace un “Home run” ¿Qué gráfica representa la distancia en cada instante de la carrera por las bases al punto de salida?





JUEGO: "SALVA LOS HELADOS"

MATERIALES:

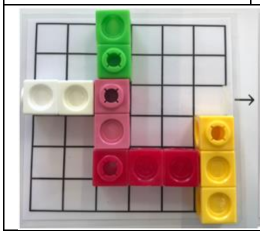
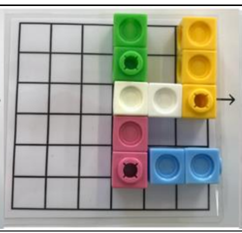
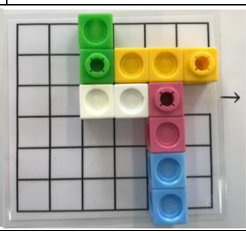
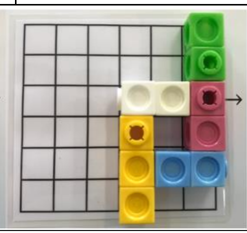
a. 16 tarjetas con 4 niveles de dificultad
b. Plantillas para realizar el juego
c. Policubos

OBJETIVO DEL JUEGO: sacar el camión de los helados del atasco (policubo blanco) hasta la salida→

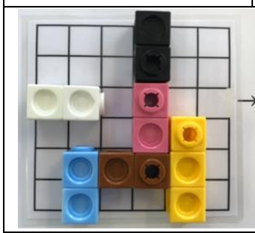
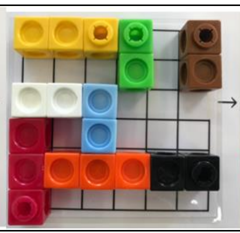
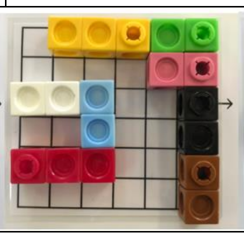
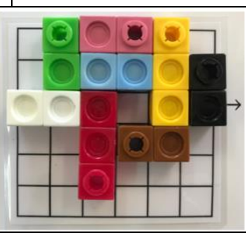
CÓMO JUGAR: Por parejas, uno de ellos elige una tarjeta y sitúa los policubos en la plantilla. Desliza los policubos (←↑→↓) por su carril hasta que pueda salir el heladero. Si no encuentra la salida, sigue las coordenadas (solución) que le indique el compañero.

(Cada jugador de la pareja irá cambiando de rol alternativamente).

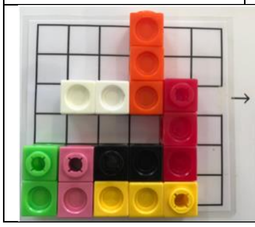
NIVEL FÁCIL

TARJETA 1	TARJETA 2	TARJETA 3	TARJETA 4
			

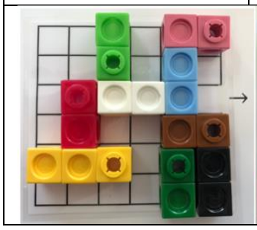
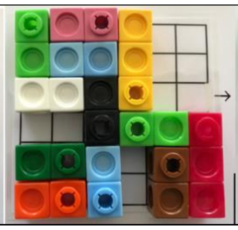
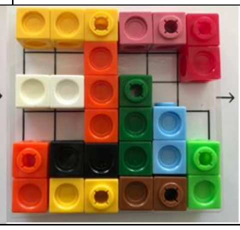
NIVEL INTERMEDIO

TARJETA 5	TARJETA 6	TARJETA 7	TARJETA 8
			

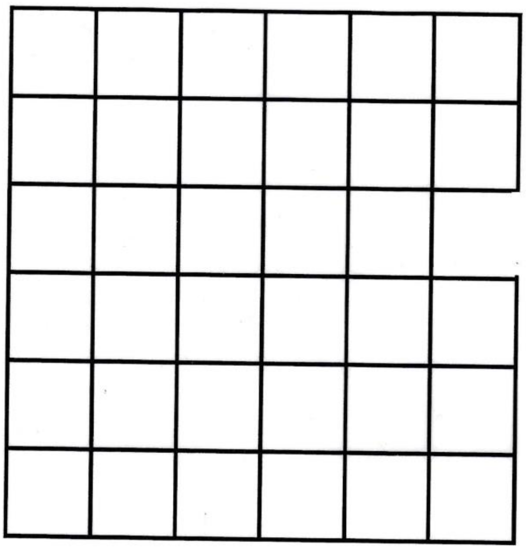
NIVEL DIFÍCIL

TARJETA 9	TARJETA 10	TARJETA 11	TARJETA 12
			

NIVEL EXTREMO

TARJETA 13	TARJETA 14	TARJETA 15	TARJETA 16
			

PLANTILLA DEL JUEGO



DE UN VISTAZO

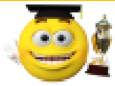
Las coordenadas sirven para localizar puntos.

1. Los puntos representados por coordenadas contienen información.
2. Las gráficas describen relaciones entre dos magnitudes
3. Podemos hacer una tabla de valores emparejando el número de entrada con el número de salida. Esas parejas son las coordenadas de unos puntos que podemos representar gráficamente.

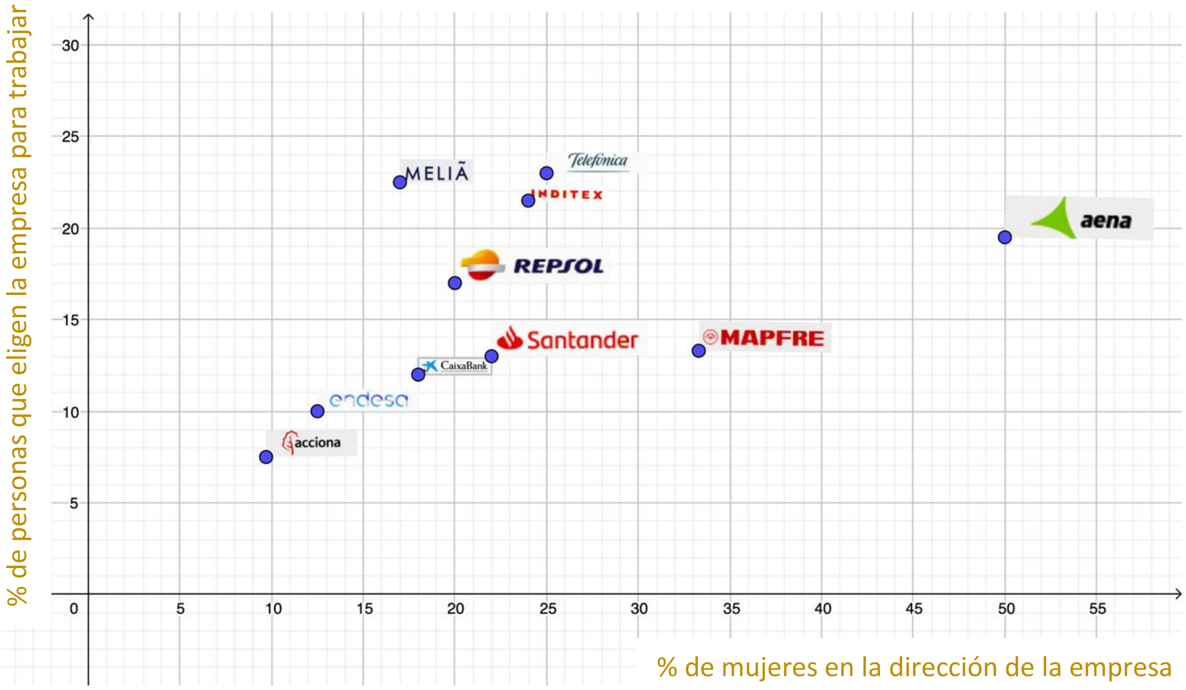
EVALÚA Y AFIANZA

AUTOEVALUACIÓN

Llegados al final del tema reflexiona sobre lo que has aprendido. Marca en la siguiente tabla lo que corresponde a cada frase, haz la autoevaluación y revisa de nuevo la tabla.

¿CÓMO LO HAGO?	 Me cuesta hacerlo	 Estoy aprendiendo	 Lo hago bien	 Soy un experto
Situar puntos en el plano si me dan las coordenadas				
Escribir las coordenadas de un punto si lo veo en el plano				
Analizar e interpretar una gráfica obteniendo información de ella				
Comparar gráficas				
Construir una tabla a partir de un conjunto de pares de datos que aparecen en un problema				
Representar una gráfica a partir de un enunciado				
Representar una gráfica a partir de una tabla de valores				
Explicar la solución de ejercicios y problemas				
Comprobar la solución del problema				
Trabajar en grupo para resolver tareas				
Aprender de mis errores				
Enfrentar un reto o tarea con ganas y motivación				
Esforzarme para hacer bien las tareas				

A1. En el siguiente gráfico cada punto representa una empresa del IBEX 35 relacionando el porcentaje de mujeres directivas en la empresa con el porcentaje de personas encuestadas que eligen esa empresa como favorita para trabajar.



PREGUNTAS

A. ¿Sabes qué es el IBEX 35? Investiga…

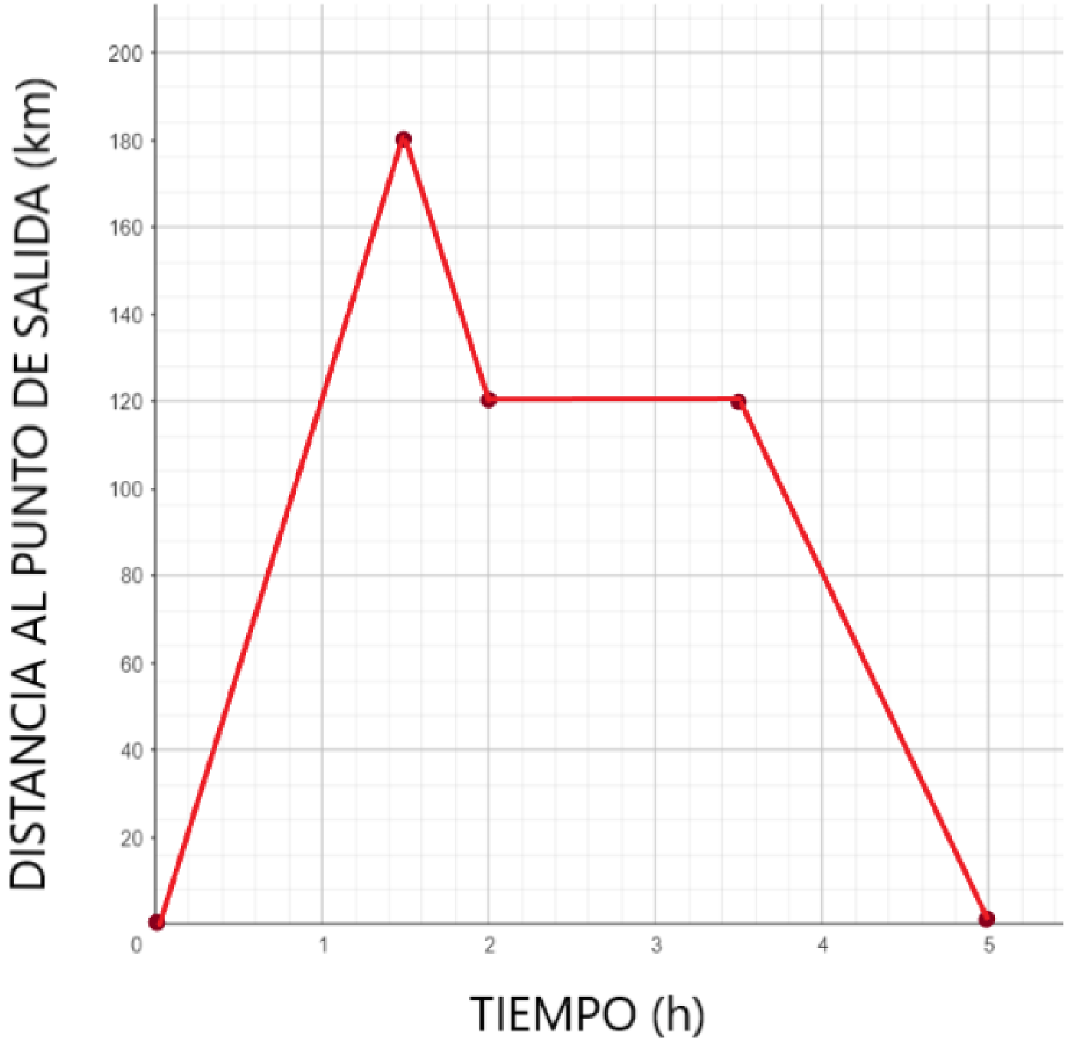
B. ¿Qué empresa tiene mayor porcentaje de mujeres directivas?

C. ¿Cuál es la empresa mejor valorada por los encuestados?

D. Acabo de acabar la carrera y estoy buscando trabajo. Después de echar unos cuantos currículums tengo dos buenas ofertas de trabajo en dos bancos, ¿cuál me recomendarías? ¿Por qué?

E. Analiza la gráfica. ¿Crees que existe alguna relación entre el % de mujeres que dirigen la empresa y que haya más o menos personas que la eligen para trabajar en ella? ¿A qué crees que se puede deber?

A2.– La gráfica representa un viaje en motocicleta, obsérvala y responde a las preguntas:



A. ¿Cuántos kilómetros recorre en la primera hora?

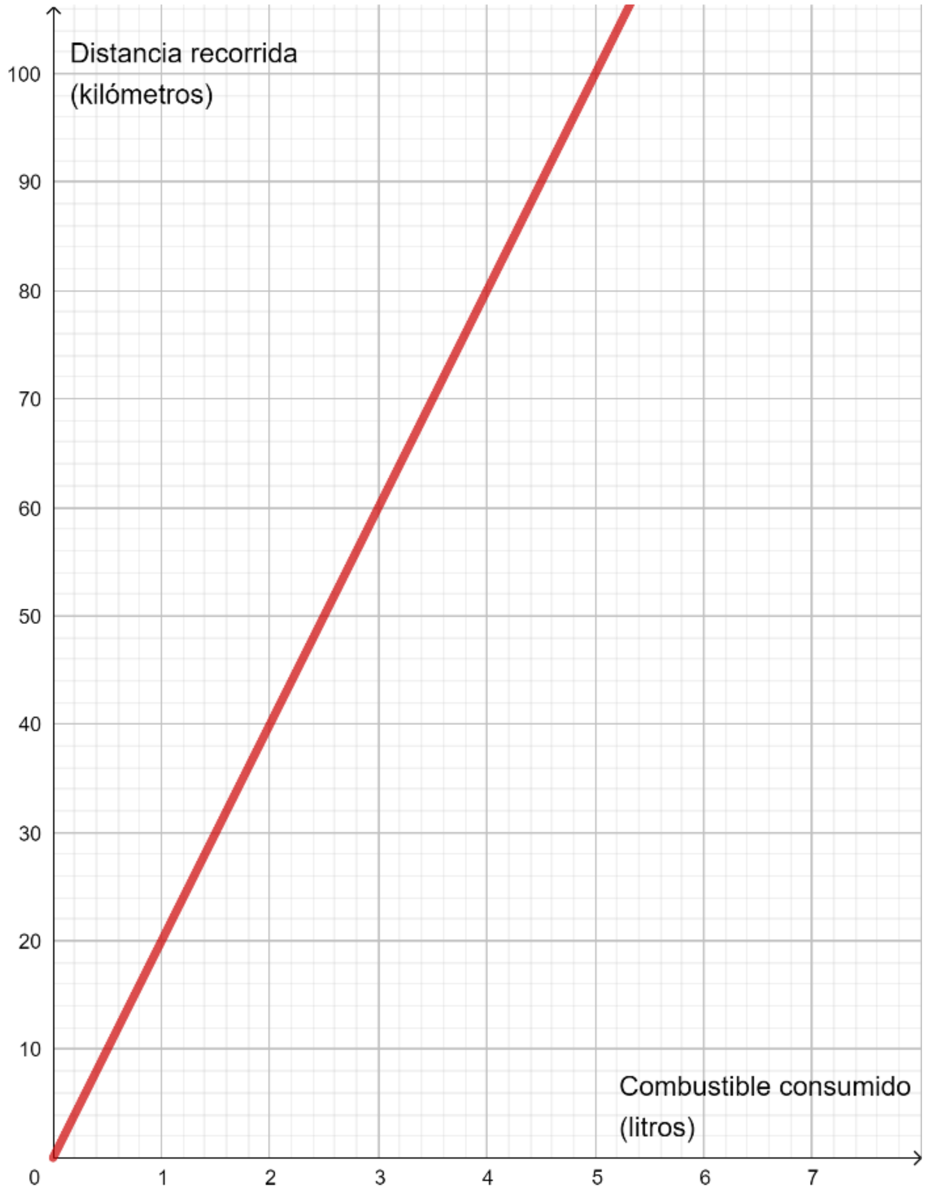
B. ¿Cuánto tiempo permanece parado?

C. ¿A qué distancia del punto de partida da la vuelta?

D. ¿Cuánto tiempo duró el viaje en total?

A3. El siguiente gráfico muestra la distancia que puedo recorrer por cada litro de gasoil que consumo.

PREGUNTAS



A. ¿Qué distancia puedo recorrer con 3 litros de gasoil?

B. ¿Qué cantidad de combustible necesito para recorrer 80 kilómetros?

C. ¿Cuánto me cuesta recorrer 40 kilómetros si el precio del combustible es 1,90 € el litro?

AUTOEVALUACIÓN

SOLUCIÓN A1: **A)** Se refiere a las 35 empresas más importantes de España. Estas empresas cotizan en bolsa, es decir, es posible invertir en ellas.

B) Aena.

C) Telefónica. Sea hombre o mujer, una empresa con mayor porcentaje de mujeres directivas es una empresa que mira al futuro.

D) Santander.

E) Sí parece que las empresas tienen mejor valoración cuanto mayor es el porcentaje de mujeres en cargos directivos de la empresa. Es cierto que hay algunas excepciones (como Melià). Puede haber muchos motivos:

- La sociedad está muy concienciada de la importancia de la igualdad y por eso se eligen empresas con más mujeres.
- Las empresas con más mujeres directivas apuestan más por la diversidad.
- Las empresas con más mujeres directivas son más sensibles con las necesidades de conciliación familiar.
- Las empresas con más mujeres directivas acaban obteniendo mejores rendimientos.

SOLUCIÓN A2: **A)** 120 km

B) Una hora y media

C) 180 km

D) Cinco horas

SOLUCIÓN A3:

A) 60 kilómetros.

B) 4 litros.

C) 3,80 €

GEOMETRÍA EN EL PLANO

ÍNDICE

PROBLEMAS QUE VAMOS A RESOLVER

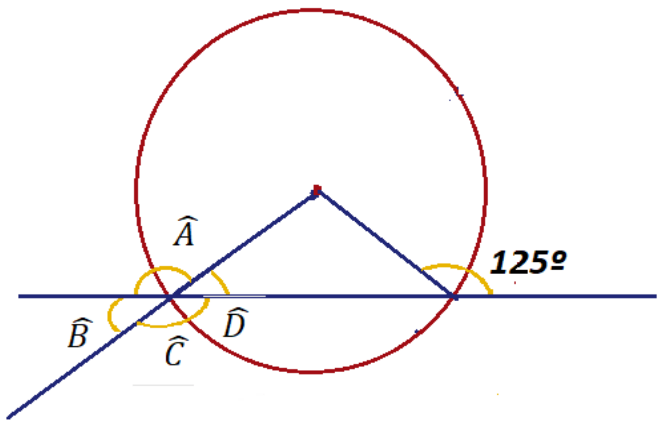
1.-

a) Si una persona, A, se queda parada en un punto fijo, ¿cómo debe moverse otra persona B para mantenerse siempre a la misma distancia de A?

b) ¿Cómo deben moverse dos personas A y B para mantenerse siempre a la misma distancia una de la otra?

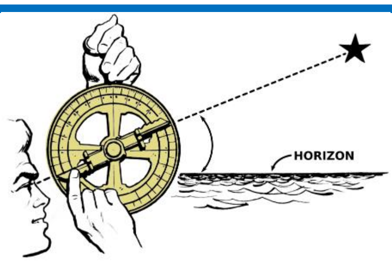
c) Si dos personas A y B se quedan paradas cada una en un punto, ¿Cómo debe moverse una persona C para mantenerse siempre a la misma distancia de A y de B?

2.- Conociendo el ángulo que se indica, determina la medida de los ángulos que se señalan.

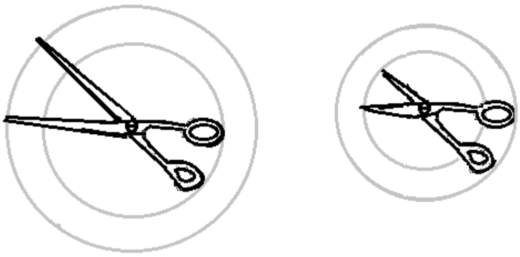


¿QUÉ SABES DE ...?

VEO	PIENSO	ME PREGUNTO



VEO	PIENSO	ME PREGUNTO



VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

1. ELEMENTOS BÁSICOS

RETOS

A)

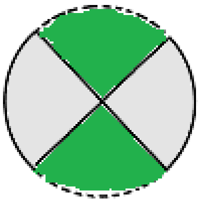
1. Toma un folio y señala un punto, ¿cuántas rectas podemos construir que pasen por el punto señalado?
2. Ahora señalamos dos puntos en el folio y hacemos un doblez que pase por los dos puntos. Así, comprobamos que siempre hay una recta que pasa por dos puntos dados. ¿Se puede hacer otro doblez, diferente del anterior, que pase por A y B?
3. Por tres puntos, ¿Cuántas rectas pasan?

B) Un edificio tiene tres puertas giratorias:

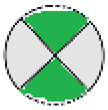
La puerta norte que llamaremos N.

La puerta este que llamaremos E.

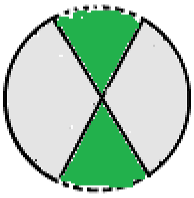
La puerta oeste que llamaremos O.



Planta de la Puerta N



Planta de la Puerta E



Planta de la Puerta O

a) Si una persona entra al edificio por una de las puertas:
   - ¿Qué puerta tiene que girar más la N o la O?
   - ¿Qué puerta tiene que girar más la N o la E?
   - ¿Qué puerta tiene que girar más la E o la O?

b) Si una persona que entra desde la calle se despista mirando su móvil y da dos vueltas completas dentro de la puerta N antes de salir ¿Se encuentra dentro o fuera del edificio? ¿Cómo podemos dibujar el ángulo que representa este giro?

c) Si una persona entra por la puerta N y sale por la misma puerta, ¿Qué ángulo es mayor, el que representa la entrada o el que representa la salida?

APRENDE Y APLICA

A continuación, vamos a trabajar utilizando la Geometría del plegado o del doblado.

PLANO

Cogemos un folio y lo colocamos sobre la mesa o sobre el suelo. A continuación, colocamos folios a los lados, en todas las direcciones. Así, conseguimos lo que denominamos plano: el folio colocado sobre la mesa o el suelo (no curvado) y con la posibilidad de ampliarlo en todas las direcciones.

RECTA

Tomamos un folio y hacemos un doblez. Desdoblamos y marcamos el doblez con un bolígrafo. Lo que hemos marcado se denomina recta. Se designan mediante letras minúsculas. Es importante observar la condición de infinitud de la recta, consecuencia de la del plano. La recta no tiene grosor sino sólo longitud.

SEMIPLANO

Una recta divide al plano en dos partes. Cada parte, junto con la recta, se denomina semiplano.

PUNTO

Hacemos dos dobleces distintos en el folio de forma que un doblez pase sobre otro y marcamos con el bolígrafo las dos rectas respectivas r y s. Donde coinciden los dos dobleces se encuentra el punto. ***Punto es la intersección de dos rectas.*** Por tanto, el punto no tiene grosor. El punto indica una posición. Los puntos se nombran con letras mayúsculas.

SEMIRRECTA

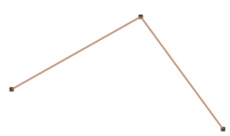
Un punto A, sobre una recta, determina dos semirrectas. El punto A es el origen de la semirrecta, que no tiene final.

SEGMENTO

Consideramos una recta y, mediante el doblado, señalamos en ella dos puntos A y B. Se llama ***segmento a la parte de la recta comprendida entre dos puntos***. Los puntos A y B limitan al segmento y se denominan extremos.

SEGMENTOS CONCATENADOS Y SEGMENTOS CONSECUTIVOS

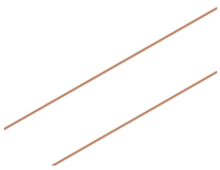
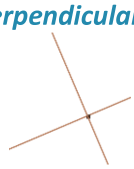
Segmentos concatenados: dos segmentos con un extremo común y ningún otro punto común.



Segmentos consecutivos: segmentos concatenados que se encuentran sobre la misma recta.

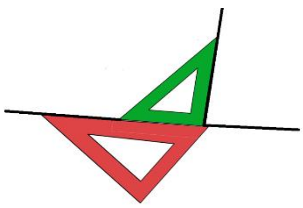
POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Se trata de ver la posición que puede tener una recta respecto de otra. Formamos grupos de cuatro personas. Cada grupo tendrá dos cuerdas. Cada cuerda la sujetarán dos alumnos por los extremos. Utilizaremos las cuerdas como representación de rectas, es decir, considerando su condición de infinitud. En cada grupo los alumnos analizarán de qué forma pueden colocarse las dos rectas sobre el suelo. Posteriormente se hará puesta en común y, si no se ha conseguido alguna de las posiciones relativas, se completará.

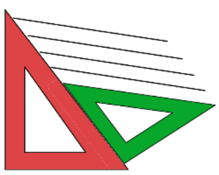
Rectas paralelas	***Rectas secantes***		***Rectas coincidentes***
		***Rectas perpendiculares***  Dividen el plano en 4 partes iguales	
No tienen ningún punto en común	Se cortan en un punto		Todos sus puntos son comunes

TRAZADO DE RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES A UNA RECTA

a) Dada una recta, colocando la escuadra y el cartabón como se muestra en la figura, puedes dibujar una recta perpendicular a ella.

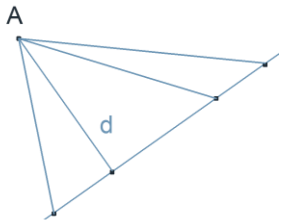


b) Dada una recta, colocando la escuadra y el cartabón como se muestra en la figura, y deslizando una sobre otra, puedes dibujar rectas paralelas a la recta de partida.



Distancia de un punto a una recta. La distancia de un punto A a una recta r es la menor distancia que se recorre para ir desde el punto A a la recta r.

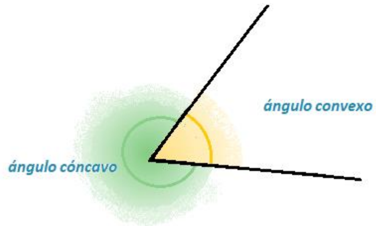
Trabajamos en grupos de cuatro con dos cuerdas en cada grupo. Dos alumnos cogen una cuerda y, de esta forma, representan una recta. Otro alumno representa el punto A y, entre este alumno y el cuarto componente del grupo, cogen la otra cuerda. Este cuarto alumno va llevando la cuerda desde el punto A hasta diferentes puntos de la recta, tratando de encontrar cuándo se consigue la menor distancia.



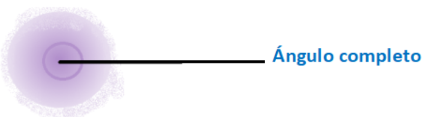
La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta.

Un ***ángulo*** es la región plano del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. Las semirrectas que forman el ángulo se llaman ***lados*** y el punto común, ***vértice*** del ángulo.

Cada par de semirrectas con el mismo origen delimitan dos ángulos, uno ***cóncavo*** y otro ***convexo.***



Dos semirrectas coincidentes determinan dos ángulos: el ***ángulo nulo,*** que no existe y el ***ángulo completo.***



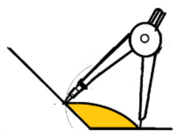
Un ángulo cuyos lados son semirrectas perpendiculares se denomina ***ángulo recto.***

Un ángulo cuyos lados son semirrectas de la misma recta con el mismo origen y sentidos opuestos se denomina ***ángulo llano.***

Ángulo recto. **Ángulo llano**

Dos ángulos son ***iguales*** si al superponerlos coinciden.

Para ***comprobar que dos ángulos son iguales***, es decir, que superpuestos coinciden, utilizamos el compás. Con centro en el vértice del ángulo trazamos un arco de circunferencia de lado a lado, el mismo en ambos ángulos. Medimos con el compás la distancia entre los puntos marcados y comprobamos que es igual a la del otro. Un procedimiento similar sirve para construir un ángulo igual a otro dado.



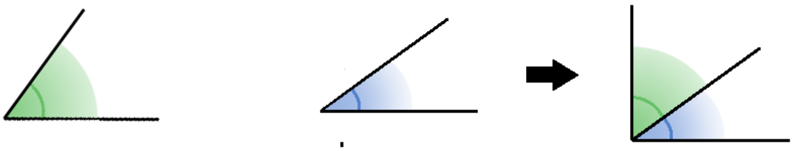
Dos ángulos son ***consecutivos*** si tienen el vértice y un lado en común. Además, el ángulo formado por los lados no comunes se llama ***ángulo suma***.

Ángulos consecutivos Ángulo suma

OBSERVA:

- ***Un ángulo llano es la suma de dos ángulos rectos.***
- ***Un ángulo completo es la suma de cuatro ángulos rectos.***

Dos ángulos son ***complementarios*** si suman un recto.

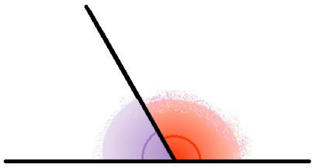


Ángulos complementarios

Dos ángulos son ***suplementarios*** si suman un llano.

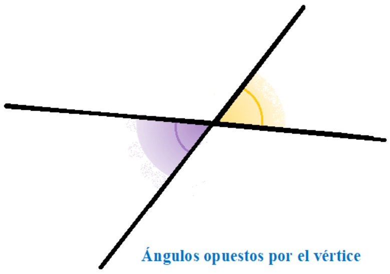
Ángulos suplementarios

Dos ángulos son ***adyacentes*** si son consecutivos y suplementarios.



Ángulos adyacentes

Dos ángulos son ***opuestos por el vértice*** cuando los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro. ***Los ángulos opuestos por el vértice son iguales*** porque superpuestos coinciden.

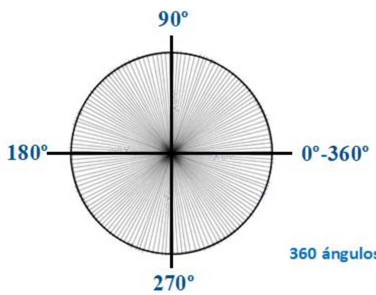


Ángulos opuestos por el vértice

Medida de un ángulo La medida de un ángulo se llama ***amplitud del ángulo*** o simplemente ***ángulo.*** La ***unidad de medida del ángulo*** es el grado (°). Un ***grado*** es la medida del ángulo que resulta al dividir un ángulo completo en 360 ángulos iguales.

Por tanto:

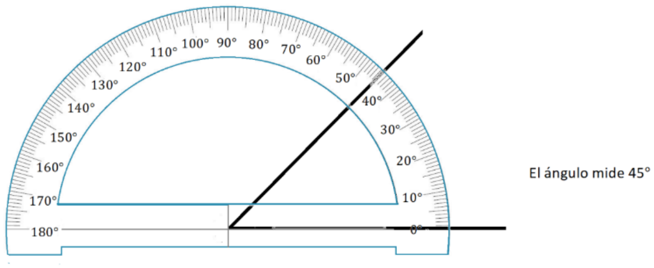
- Un ángulo completo mide 360°
- Un ángulo llano mide 180º = $\frac{360°}{2}$
- Un ángulo recto mide 90º = $\frac{360°}{4} = \frac{180°}{2}$



360 ángulos iguales de 1°

Medida de ángulos. Para medir los ángulos usamos el transportador:

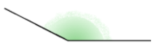
1. Coloca el transportador con el centro sobre el vértice del ángulo y el cero sobre uno de los lados del ángulo.
2. La medida del ángulo la da la lectura del punto del transportador en la que se encuentra el otro lado

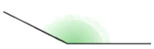
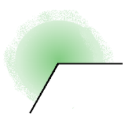


Un ángulo es ***agudo*** si mide menos que un ángulo recto. Un ángulo es ***obtuso*** si mide más que un ángulo recto y menos que un ángulo ***llano.***

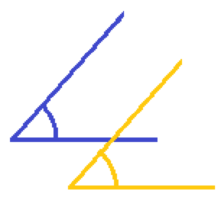
Ángulo agudo Ángulo recto Ángulo obtuso

Clasificación de los ángulos. Los ángulos se pueden clasificar por comparación con el ángulo recto y el llano:

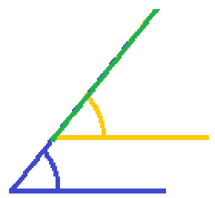
Agudo	Recto	Obtuso
Ángulo menor que un recto 		Ángulo mayor que un recto y menor que un llano 

Convexo	Llano	Cóncavo
Ángulo menor que un llano 		Ángulo mayor que un llano 

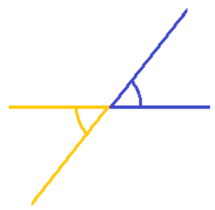
Relaciones entre ángulos de lados paralelos o coincidentes. Para saber qué relación hay entre estos ángulos dibujamos todos los casos posibles y sacamos conclusiones a partir de las imágenes.



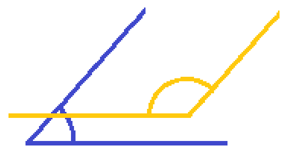
Iguales



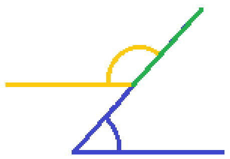
Iguales



Iguales



Suplementarios

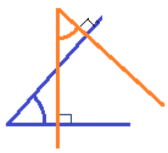


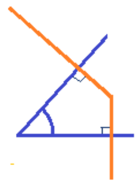
Suplementarios

Suplementarios

Dos ángulos convexos cuyos lados sean paralelos son iguales o suplementarios.

Ángulos de lados perpendiculares. Para saber qué relación hay entre estos ángulos dibujamos todos los casos posibles y sacamos conclusiones a partir de las imágenes.



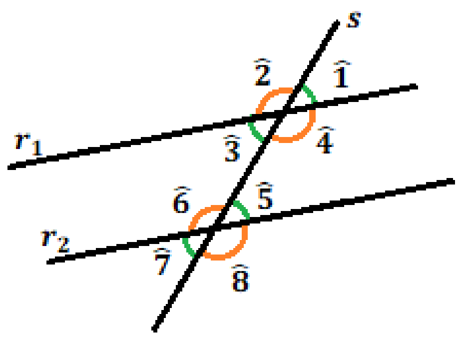


Dos ángulos convexos cuyos lados sean perpendiculares son iguales o suplementarios.

Relaciones entre los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una secante a ambas. Relaciones entre sus medidas

Observando las relaciones que hay entre los ángulos de la figura:

- Opuestos por el vértice, como el $\widehat{1}$ **y el** $\widehat{3}$ **y por tanto iguales.**
- Suplementarios como el $\widehat{1}$ **y el** $\widehat{2}$ **y por tanto suman como un llano, 180°.**
- De lados paralelos, como el $\widehat{1}$ **y el** $\widehat{5}$ **y por tanto iguales**



Razonando así concluimos: $\widehat{1} = \widehat{3} = \widehat{5} = \widehat{7}$ $\quad$ $\widehat{2} = \widehat{4} = \widehat{6} = \widehat{8}$

PRACTICA

1.1.– Utilizando regletas, pajitas o limpiapipas construye segmentos concatenados, consecutivos y otros que no lo sean.

1.2.– Señala, en el aula, dónde observas rectas paralelas, secantes o perpendiculares.

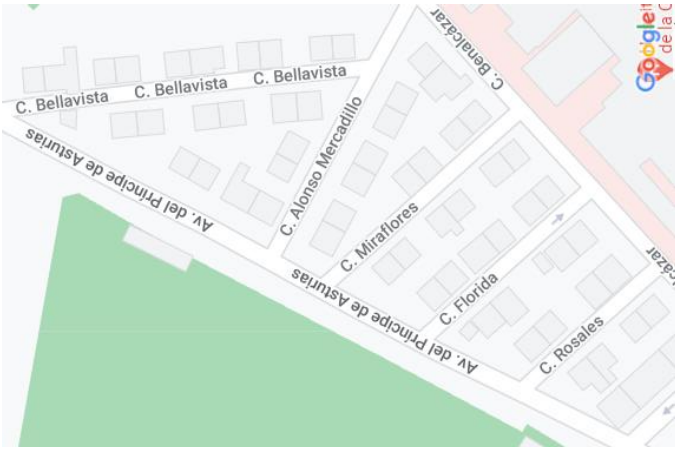
1.3.– Señala dónde está presente el paralelismo en la vida cotidiana.

1.4.– Consideramos una recta r y un punto A que no pertenece a dicha recta, es decir, A es un punto *exterior* a la recta. ¿Cuántas rectas puedes trazar que pasen por A y sean paralelas a la recta r?

1.5.– Dibuja dos rectas perpendiculares, r y s. ¿Se puede dibujar una recta que corte a r y no a s?

1.6.–¿Cómo calcularías la distancia entre dos rectas paralelas?

1.7.– Observa la imagen. Señala la posición relativa en la que se encuentran las siguientes calles:



a) Calle Alonso de Mercadillo y Calle Bellavista.

b) Calle Alonso de Mercadillo y Avda. Príncipe de Asturias.

c) Calle Miraflores y Calle Florida.

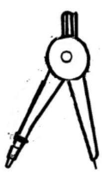
1.8.– Señala dos calles que se encuentren en las posiciones señaladas y que no coincidan con los pares de calles dados en los distintos apartados del ejercicio anterior

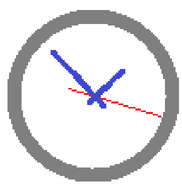
a) Paralelas. b) Secantes. c) Perpendiculares.

1.9.– ***Actividades sobre la definición de ángulo:***

- Comprueba doblando un folio que: un ángulo es la región común a dos semiplanos definidos por dos rectas secantes.
- Un **ángulo** es la región del plano que barre una semirrecta al girar alrededor de su origen. La posición inicial y la final de la semirrecta determinan el ángulo.

  Son semirrectas que determinan ángulos, por ejemplo: La semirrecta que contiene la aguja minutero del reloj o el brazo de un compás. Encuentra algún ejemplo más.





1.10– Señala y cuenta los ángulos que aparecen en la palabra:

ZAMORA

1.11– Demostración de que dos ángulos opuestos por el vértice son iguales:

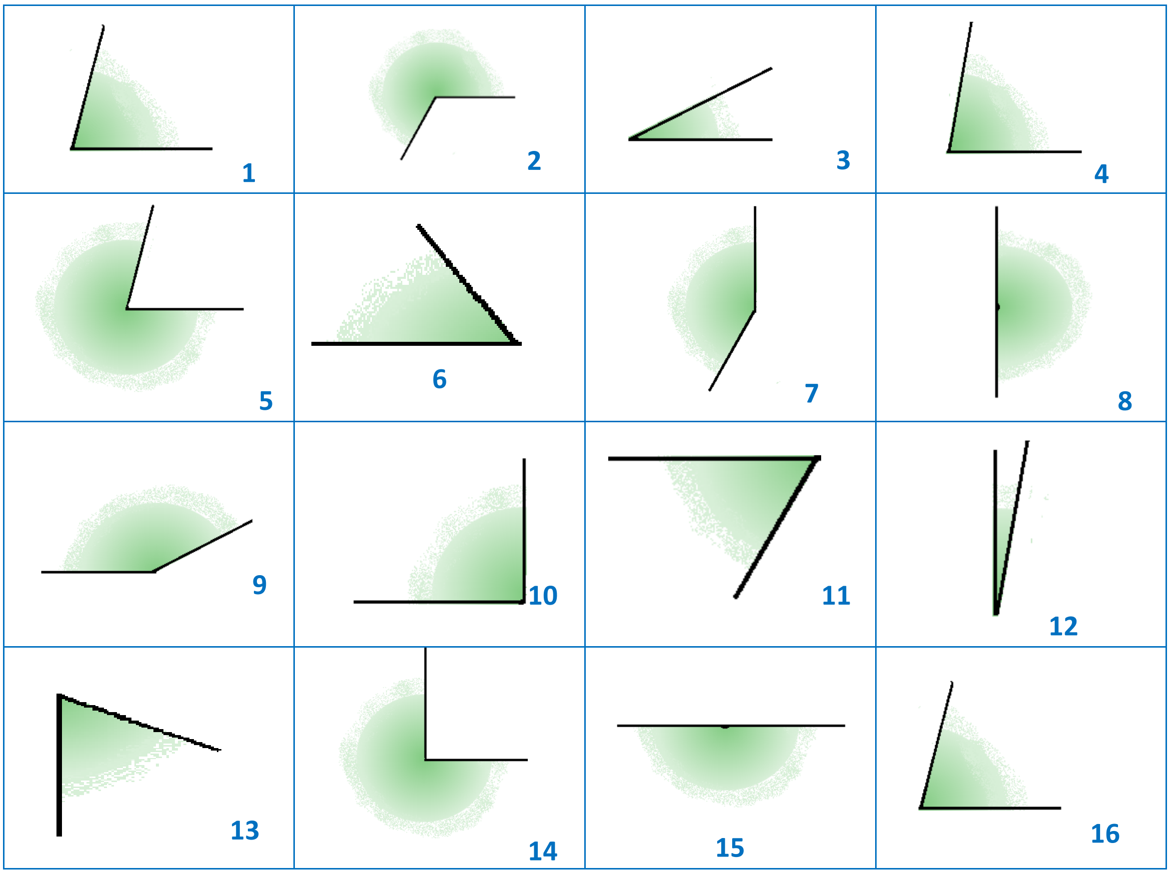
Construye doblando un folio un par de ángulos opuestos por el vértice y dobla después el folio de forma que queden superpuestos. ¿Qué observas? ¿Coinciden? ¿Son ángulos iguales?

1.12– Dibuja un par de rectas que se corten y contesta a las preguntas:

- ¿Qué observas? ¿Cuántos ángulos quedan determinados? ¿Cuáles son iguales entre sí?
- ¿Se puede afirmar que: **¿Dos rectas que se cortan en un punto determinan dos pares de ángulos opuestos por el vértice, iguales dos a dos?** Razona la respuesta

1.13–¿Cómo medirías un ángulo cóncavo con un transportador?

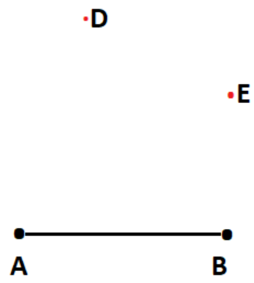
1.14– Repasa la teoría, y relaciona los ángulos por parejas o conjuntos atendiendo a alguna característica común o alguna relación entre ellos.



1.15.– Construye doblando papel, un ángulo de 90º, 45º, 135º, 180º, 225º y 270º.
Construye doblando papel y con el menor error posible, un ángulo de: 30º, 60º, 120º y 160º. Comprueba la medida de tus ángulos y anota el error que has cometido.

1.16.– En un partido de fútbol, un delantero se encuentra en el punto *D y otro en un punto E*. La portería está representada por el segmento *AB*.

¿Cuál de los dos delanteros tiene más ángulo de tiro? Comprueba tu respuesta usando un transportador de ángulos.

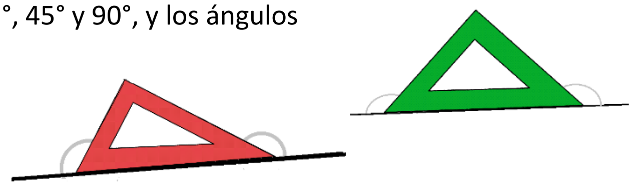


1.17.– Si un ángulo mide el doble que otro y ambos ángulos son complementarios. ¿Cuánto miden? Haz un dibujo que represente la situación.

1.18.– Si un ángulo $\hat{A}$ mide la tercera parte que su suplementario. ¿Cuánto mide el ángulo $\hat{A}$? Haz un dibujo que represente la situación.

1.19.– Los ángulos de una escuadra miden 45°, 45° y 90°, y los ángulos de un cartabón miden 30°, 60° y 90°.

Con esta información, observa las imágenes y calcula los ángulos indicados



HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

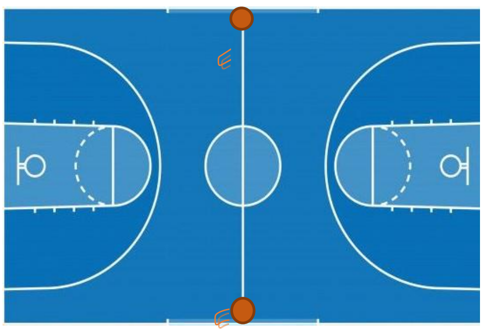
2. MEDIATRIZ Y BISECTRIZ

RETOS

A) El entrenamiento de baloncesto.

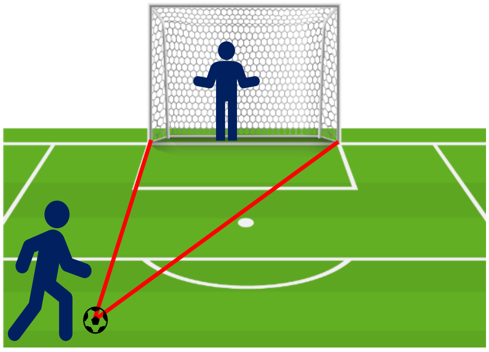
El entrenador de un equipo de baloncesto ha hecho grupos de tres jugadores para practicar el pase y el tiro.

Para ello, dos se colocan a ambos lados de la línea central y el tercero ha de lanzar a canasta a la misma distancia de ambos, después de recibir el pase de cada uno de ellos, alternativamente.



1. ¿Puedes localizar el punto de tiro?
2. ¿Solo existe uno?
3. En el caso de que la pregunta anterior sea negativa, localiza cuatro.
4. ¿Podrías encontrar todos?
5. ¿Qué forma o figura se formará al unirlos todos?

B) El buen portero



El portero de un equipo de fútbol está frente al delantero del equipo contrario dispuesto a disparar. Tiene que parar este balón porque si no pierden la liga. Está en la misma línea de portería:

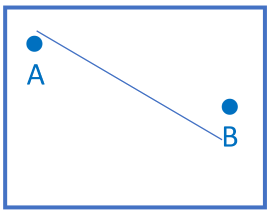
1. ¿Dónde debe colocarse para cubrir por igual todo el ángulo de tiro?
2. ¿Dependerá la colocación del portero de la posición del delantero?
3. ¿Puede adelantarse el portero y seguir cubriendo todo el ángulo de tiro?
4. Localiza tres posiciones del portero para que cubra todo el ángulo de tiro.
5. ¿Qué forma o figura se formará al unirlos todos?

APRENDE Y APLICA

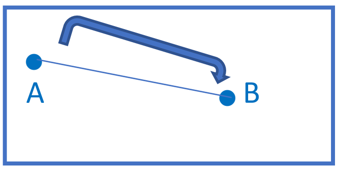
La ***mediatriz de un segmento*** es la recta que contiene todos los puntos que están a la misma distancia de los extremos del segmento.

Trazado de la mediatriz por plegado.

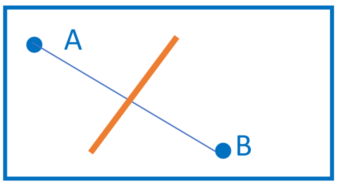
1. Marcamos dos puntos A y B en un folio y dibujamos el segmento AB.



2. Realizamos un doblez que sitúe a A sobre B.



3. Marcamos con un bolígrafo el doblez.



4. Me pregunto: Selecciona un punto cualquiera de la línea roja y mide la distancia desde él hasta los extremos A y B. Ahora selecciona otro y haz lo mismo. ¿Qué observas? ¿Cómo es la distancia de cualquier punto de la línea roja (doblez) a los extremos A y B? ¿Qué ángulo forman la línea roja (doblez) y el segmento AB?

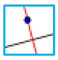
2. MEDIATRIZ Y BISECTRIZ

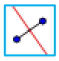
La ***mediatriz*** de un segmento es una recta perpendicular al segmento, que pasa por el punto medio del segmento.

Trazado de la mediatriz con Geogebra. Para trazar la mediatriz con Geogebra hemos de seguir los siguientes pasos:

1. Abrimos Geogebra.

2. Traza un segmento cualquiera. 

3. Abrimos el menú. 

4. La recta mediatriz se traza al seleccionar un segmento o dos puntos extremos con el botón 

Comprobación de las* propiedades de *la mediatriz con Geogebra.

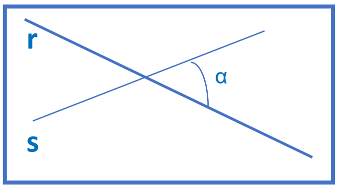
1. Utilizando Geogebra se medirá el ángulo formado por la mediatriz y el segmento y se comprobará que la mediatriz de un segmento es perpendicular a dicho segmento.

2. Se elegirán varios puntos de la mediatriz y se comprobará que todos están a la misma distancia de los extremos del segmento.

3. Se tomarán puntos que no estén en la mediatriz y se comprobará que no están a la misma distancia de los extremos del segmento.

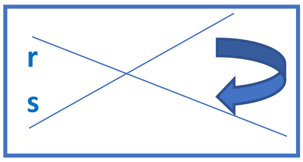
La ***bisectriz*** de un ángulo es la semirrecta que contiene todos los puntos que están a la misma distancia de los lados del ángulo.

Trazado de la bisectriz por plegado.

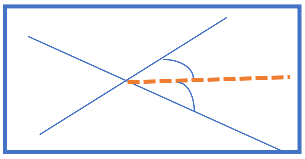


1. Dibujamos en un folio dos rectas ***r*** y ***s*** que se corten en un punto dentro del folio. Marcamos el ángulo α tal y cómo se muestra en la figura.

2. Realizamos un doblez que sitúe a **r** sobre **s**.



3. Marcamos con un bolígrafo el doblez.



4. Me pregunto: ¿Qué distancia hay desde cualquier punto de la línea roja (doblez) a las rectas ***r*** y ***s***? ¿Cómo son los ángulos que forma la línea roja (doblez) con las rectas ***r*** y ***s***?

La ***bisectriz*** es una semirrecta que divide al ángulo en dos partes iguales.

Trazado de la bisectriz con Geogebra. Para trazar la bisectriz con Geogebra hemos de seguir los siguientes pasos:

1. Abrimos Geogebra.
2. Trazamos un ángulo cualquiera con tres puntos A, B y C.
3. Abrimos el menú
4. Trazamos dos semirrectas BA y BC.
5. Trazamos la bisectriz del ángulo seleccionando en el mismo menú el botón

Comprobación de las* propiedades de *la bisectriz con Geogebra.

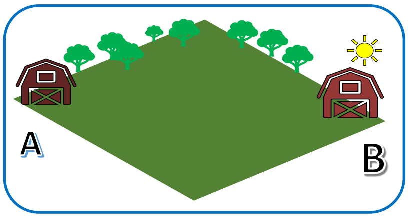
1. Utilizando Geogebra medirá el ángulo formado por la bisectriz y cada una de las semirrectas y se comprobará que los dos ángulos son iguales.
2. Se elegirán varios puntos de la bisectriz y se comprobará que todos están a la misma distancia de las dos semirrectas.
3. Se tomarán puntos que no estén en la bisectriz y se comprobará que no están a la mima distancia de los extremos del segmento.

PRACTICA

2.1.– Dibuja un segmento de 4 cm y traza su mediatriz. Localiza un punto que esté a 4 cm de los dos extremos del segmento. ¿Ese punto es único? Compruébalo.

2.2.– Dibuja tres puntos que no estén en la misma recta (no alineados). Traza las mediatrices de los segmentos que se forman cada dos puntos. ¿Se cortan en algún punto?

2.3.– En una granja se tienen dos graneros para almacenar el alimento de los animales. Se quiere hacer un camino de forma que la distancia de cualquier punto de este a cada granero sea la misma.



- ★ Haz un esquema de la situación.
- ★ Si la distancia entre los graneros es de 2 km. ¿A qué distancia está el punto más próximo del camino a ambos graneros?

2.4.– Dibuja un segmento PR. Construye la mediatriz de PR y encuentra los puntos Q y S para que PQRS sea un cuadrado.

2.5.- Dibuja un segmento PR. Construye la mediatriz de PR y encuentra los puntos Q de forma que PQR sea un triángulo equilátero. ¿Hay más de una solución?

2.6.- Dibuja dos rectas secantes. Traza la bisectriz de los 4 ángulos resultantes.

2.7.- Dibuja una semirrecta. A partir de ella dibuja otra que forme un ángulo de 45º con la anterior. Traza la bisectriz de este ángulo. Marca 3 puntos de la bisectriz: A, B y C. ¿A qué distancia están cada uno de ellos de los lados del ángulo?

2.8.- Dibuja 2 ángulos adyacentes (suman 180º). Traza la bisectriz de cada uno de ellos. ¿Hay alguna relación entre ellas?

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

3. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

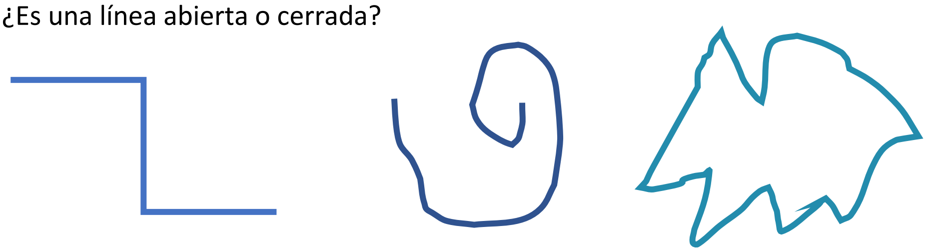
RETOS

A) ¿CÓMO DIBUJARÍAS UNA CIRCUNFERENCIA?

Dibuja una circunferencia y después respondemos a las preguntas que se plantean:

1. ¿Es una línea recta o curva?

2. ¿Es una línea abierta o cerrada?



3. ¿Es una línea plana o tridimensional?

3. CIRCUNFERENCIA Y CÍRUCLO

B) ¿CUÁNTOS CÍRCULOS HAY EN ESTAS IMÁGENES?

Señala lo correcto: En un círculo mediremos…

☐ Una longitud, porque el círculo es “la línea de fuera”

☐ Una longitud, porque el círculo es “lo de dentro”

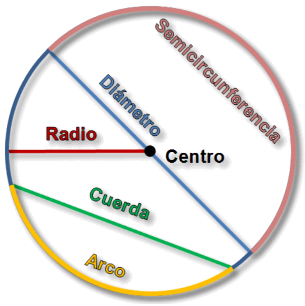
☐ Una superficie, porque el círculo es “la línea de fuera”

☐ Una superficie, porque el círculo es “lo de dentro”

APRENDE Y APLICA

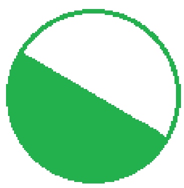
La ***circunferencia*** es una línea curva plana y cerrada cuyos puntos están todos a la misma distancia de un punto fijo llamado **CENTRO**. Esta distancia se llama **RADIO.**

- **CUERDA:** Segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- **DIÁMETRO:** Cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Su longitud es el doble del radio.
- **ARCO:** Parte de la circunferencia que une dos puntos de ella.
- **SEMICIRCUNFERENCIA:** Arco igual a la mitad de la circunferencia.



El ***círculo*** es la región del plano limitada por una circunferencia.

SEMICÍRCULO: Una de las dos partes iguales en las que un diámetro divide al círculo



SECTOR CIRCULAR: Parte del círculo comprendido entre dos radios y su arco

Encontrar objetos o situaciones de la vida real donde aparezcan semicírculos.

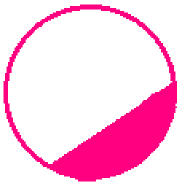
Por ejemplo: MEDIA LUNA

Encontrar objetos o situaciones de la vida real donde aparezcan sectores circulares.

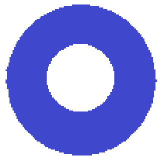
Por ejemplo: QUESITOS DEL TRIVIAL

3. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

SEGMENTO CIRCULAR: Parte del círculo limitada por una cuerda y su arco.



CORONA CIRCULAR: Parte del círculo comprendida entre dos circunferencias del mismo centro, pero distinto radio.



Encontrar objetos o situaciones de la vida real donde aparezcan segmentos circulares.

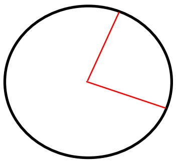
Por ejemplo:

Encontrar objetos o situaciones de la vida real donde aparezcan coronas circulares.

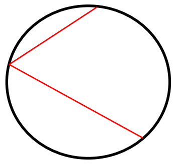
Por ejemplo: SEÑALES DE TRÁFICO

El ***ángulo central*** es el que tiene el vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios. El ***ángulo inscrito*** es el que tiene el vértice en algún punto de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas.

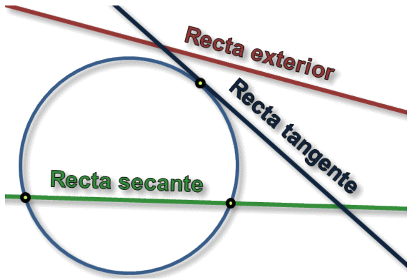
Ángulo central



Ángulo inscrito

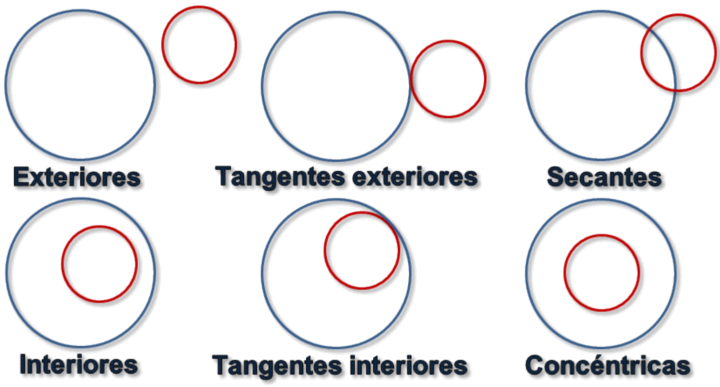


Posiciones relativas de una recta respecto a una circunferencia:



- **RECTA SECANTE:** Es aquella que toca en dos puntos a la circunferencia.
- **RECTA TANGENTE:** Es aquella que toca solo en un punto a la circunferencia.
- **RECTA EXTERIOR:** Es aquella que no toca en ningún punto a la circunferencia.

Posiciones relativas de dos circunferencias. según los puntos que comparten diferenciamos:



- **EXTERIORES**: no comparten ningún punto.
- **INTERIORES**: no comparten ningún punto, pero una está dentro de la otra.
- **TANGENTES EXTERIORES**: comparten un punto, pero ninguna está incluida en la otra.
- **TANGENTES INTERIORES**: comparten un punto y una está dentro de la otra.
- **SECANTES**: comparten dos puntos (se cortan en dos puntos)
- **CONCÉNTRICAS**: no comparten ningún punto, pero tienen el mismo centro y distinto radio.

PRACTICA

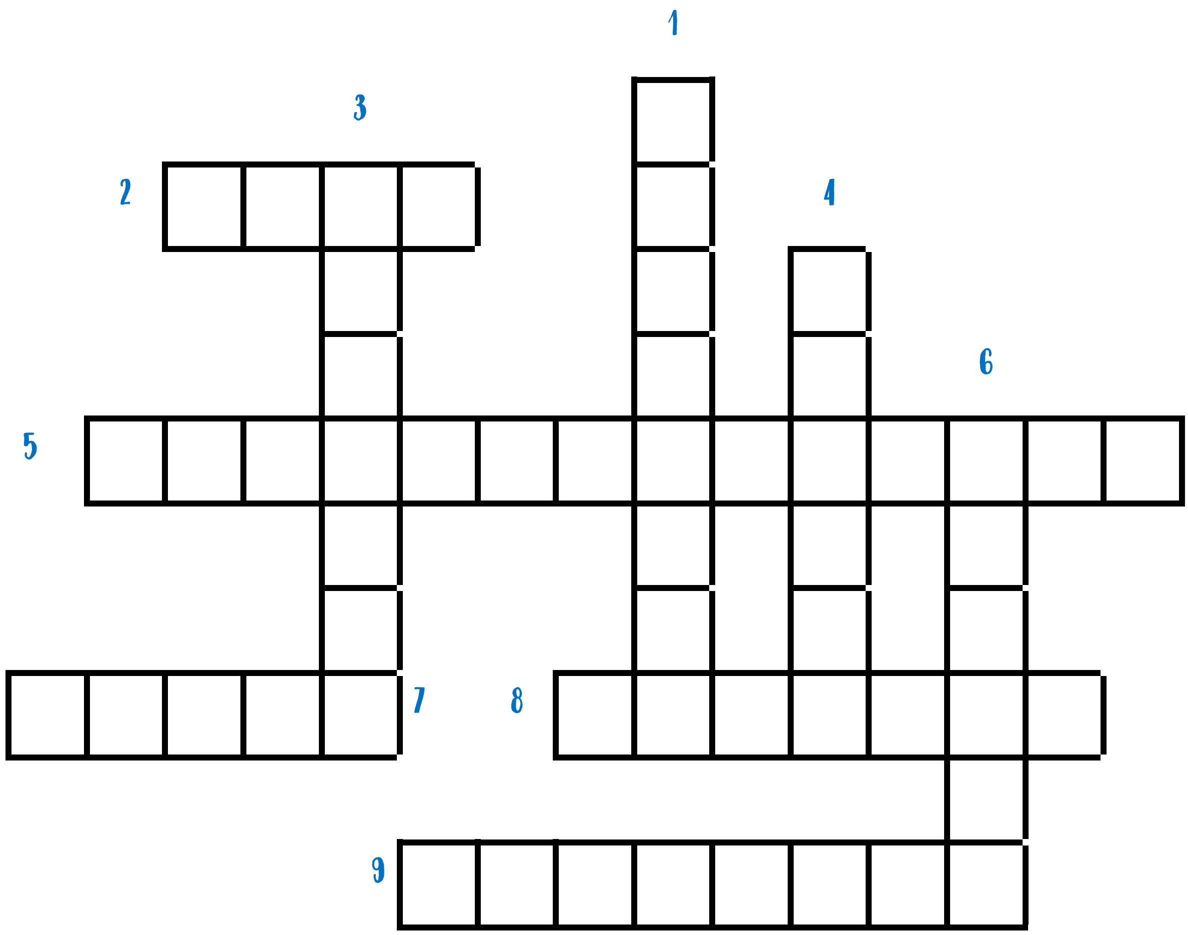
3.1.– ***Crucigrama.*** Completa con los elementos de la circunferencia.

HORIZONTALES

2. Es una porción de la circunferencia.
5. Línea curva cerrada y plana.
7. Distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia.
8. Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
9. Es dos veces el radio.

VERTICALES

1. Recta que toca a la circunferencia en un solo punto.
3. Recinto delimitado por una línea curva cerrada y plana.
4. Segmento que une dos puntos de la circunferencia.
6. Punto que está a la misma distancia de todos los puntos de la circunferencia.



3.2.- ***Volvamos a la circunferencia que hicimos.*** Marca un radio y un diámetro.

- Si el radio de la circunferencia fuese de 2 cm, ¿cuánto valdría su diámetro?
- ¿A qué distancia del centro están todos los puntos de la circunferencia del apartado anterior?
- ¿Cuántos radios pueden dibujarse en la circunferencia?

3.3.- La llanta de una bicicleta de montaña tiene 58 cm de diámetro. ¿Cuánto miden los radios de la rueda?

3.4.- Trazamos una cuerda en una tortilla de patata y la cortamos por ella.

a) ¿En cuántas porciones cómo máximo, no necesariamente iguales, quedaría dividida una tortilla si la cortas por dos cuerdas?

b) Rellena la siguiente tabla:

Nº de cortes (cuerdas)	1	2	3	4
Nº máximo de porciones	2			

3.5.- Una piscina con forma circular de 4 metros de diámetro, tiene una isla circular con un radio de medio metro. ¿Qué figura representaría la piscina vista desde arriba?

¿Podía meter un niño una barca hinchable de forma circular de 15 dm de radio y flotar tranquilamente?

3.6.- Cortamos una tortilla de patatas en porciones con diferentes formas. Clasifica las porciones según el ángulo de corte realizado en cada porción.

A)  B)  C)  D) 

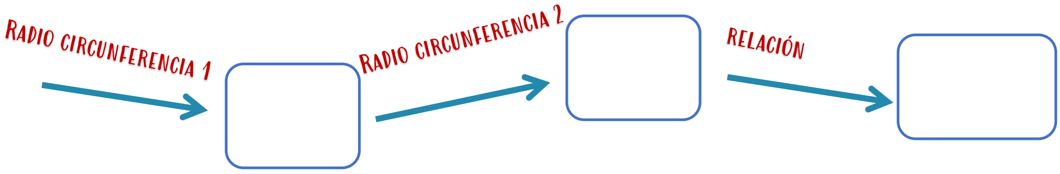
3.7.- Dibuja una circunferencia de radio 3 cm. Marca un ángulo central y uno inscrito. ¿Cuánto mide cada uno?

3.8.- Dibuja una circunferencia y tres rectas: una secante, una tangente y una exterior.

- Medimos el radio de la circunferencia
- Medimos la distancia de cada recta al centro de la circunferencia.
- ¿Qué relación guarda esa distancia con el radio en cada caso?

3.9.- Dibuja una circunferencia de 2,5 cm de radio y dos rectas tangentes a ella y paralelas entre sí.

3.10.– Dibuja cada una de las posiciones relativas de dos circunferencias. En cada caso, medimos los radios de ambas circunferencias y anotamos si es mayor o menor siguiendo el esquema siguiente.



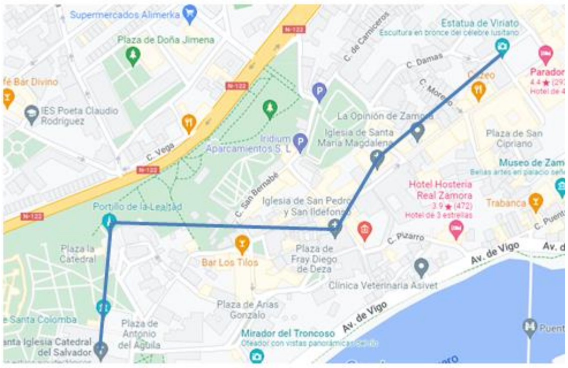
HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

4. POLÍGONOS

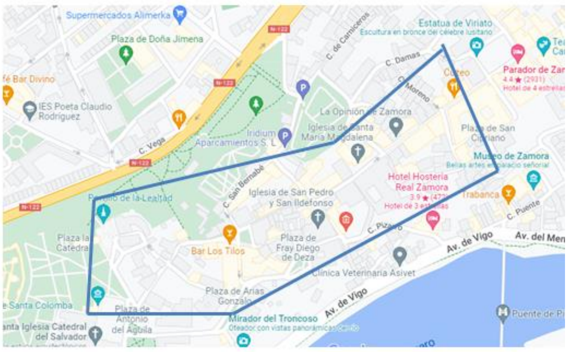
RETOS

A) Para realizar una visita a la ciudad hemos organizado tres recorridos.

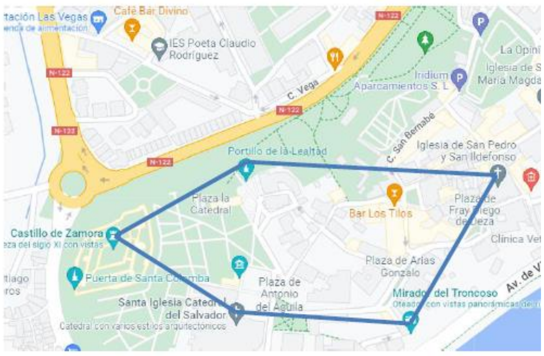
En el primer recorrido, se parte de la Estatua de Viriato, situada en la plaza del mismo nombre, se visita la Iglesia de Santa María Magdalena, la Iglesia de San Ildefonso, el Portillo de la Lealtad para terminar en la Catedral y, en ese punto, nos despediremos.



En el segundo recorrido propuesto, partimos del mismo sitio y se visitan la Iglesia de Santa María Magdalena, el Portillo de la Lealtad, la Catedral, el Mirador del Troncoso y el Museo de Zamora, regresando a nuestro punto de partida en la Plaza de Viriato.



El recorrido 3 comienza en el Castillo y se visita la Catedral, el Mirador del Troncoso, la Iglesia de San Ildefonso, el Portillo de la Lealtad finalizando en el Castillo.



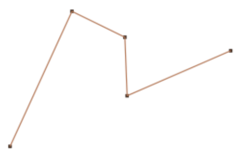
a) Siguiendo el recorrido 1, ¿Cómo puedes ir desde la Iglesia de Santa María Magdalena al Portillo de la Lealtad? ¿Y desde la Estatua de Viriato hasta la Catedral? ¿Qué ocurre si quieres hacer esos trayectos utilizando el recorrido 2?

b) Para ir de la Plaza de Doña Jimena a la Plaza de Fray Diego de Deza, ¿es necesario atravesar el trayecto marcado en el recorrido 1? ¿Y en el recorrido 2?

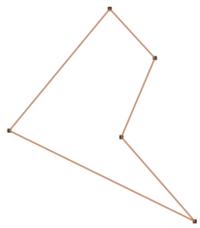
c) Para ir en línea recta de uno de los puntos señalados a otro en el recorrido 2, ¿el recorrido queda dentro de la zona limitada por el trayecto marcado? ¿Y en el recorrido 3?

APRENDE Y APLICA

Líneas poligonales abiertas y cerradas. En los trayectos realizados hemos seguido lo que denominamos líneas poligonales. ***Líneas poligonales***: conjunto de varios segmentos concatenados cada uno con el siguiente. Pueden ser ***abiertas o cerradas*** como se indica en el gráfico:



Línea poligonal abierta



Línea poligonal cerrada

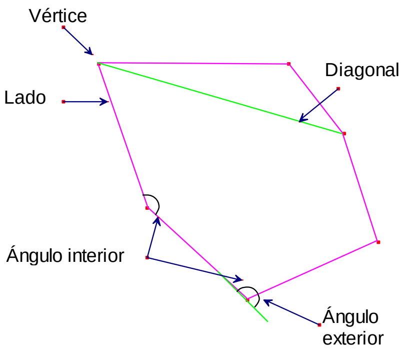
Los segmentos que componen cada línea poligonal se llaman ***lados*** y sus extremos se llaman ***vértices***.

Diferencia entre las líneas poligonales abiertas y cerradas:

- En la poligonal abierta para ir de un punto M a otro N el camino es único. En cambio, en la poligonal cerrada hay dos caminos distintos.
- La poligonal cerrada tiene un interior y un exterior separados por la línea poligonal, que es la frontera entre ambas.
- La poligonal abierta no tiene interior ni exterior. Si se quiere salir de un punto interior a otro exterior, sin salir del plano, es preciso atravesar la frontera (los lados).

Un ***polígono*** es la región del plano que queda delimitada por una línea poligonal cerrada. La palabra polígono es una palabra de origen griego: *poli-* significa varios y *-gono* significa ángulo.

Elementos de un polígono



Lados: Segmentos que delimitan el polígono.

Vértices: Extremos de los segmentos que forman los lados.

Diagonal: Segmento que une dos vértices no consecutivos.

Ángulo interior: Ángulo formado por dos lados consecutivos del polígono.

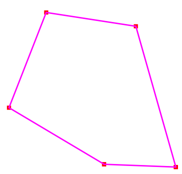
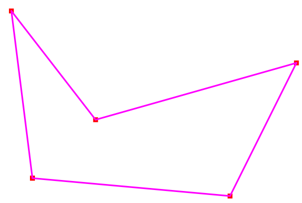
Ángulo exterior: Ángulo formado por un lado y la prolongación del lado consecutivo.

Clasificaciones. Los polígonos se pueden clasificar atendiendo a distintos criterios.

a) En función del ***número de lados o de ángulos interiores:***

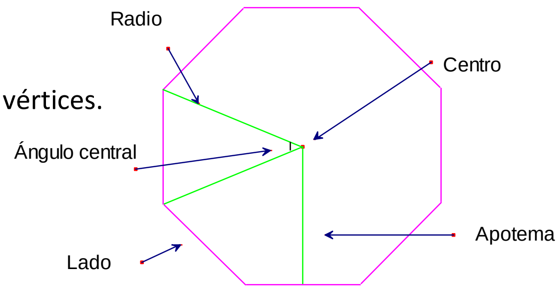
Triángulos (3 lados), cuadriláteros (4 lados), pentágonos (5 lados), hexágonos (6 lados), heptágonos (7 lados), octógonos (8 lados), eneágonos (9 lados), decágonos (10 lados), undecágonos o endecágonos (11 lados) y dodecágonos (12 lados). Para nombrar polígonos de más de 12 lados se dice: ***polígono de 13 lados***, ***14 lados***, etc.

b) En función de la ***amplitud de sus ángulos interiores***

Convexo	***Cóncavo***
	
Todos sus ángulos interiores son menores que 180°	Alguno de sus ángulos interiores es mayor que 180°

Un polígono es regular si sus lados y sus ángulos son iguales. Si tiene algún lado o algún ángulo diferente, se dice que es un polígono irregular.

Elementos de un polígono regular



Centro: Punto que está a la misma distancia de todos los vértices.

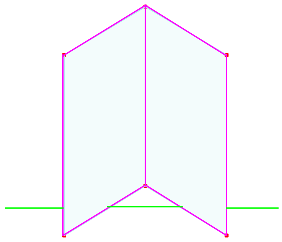
Apotema: Segmento que une el centro con el punto medio de un lado.

Radio: Segmento que une el centro con un vértice.

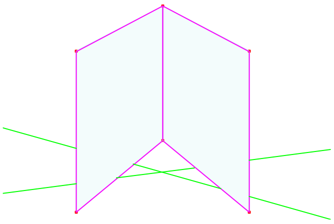
Ángulo central: Ángulo determinado por dos radios consecutivos.

4. POLÍGONOS

Observación de polígonos con un libro de espejos. Traza una línea recta y coloca el libro de espejos sobre ella como se indica en la siguiente figura. Abriendo y cerrando el libro de espejos, ¿qué figuras observas?

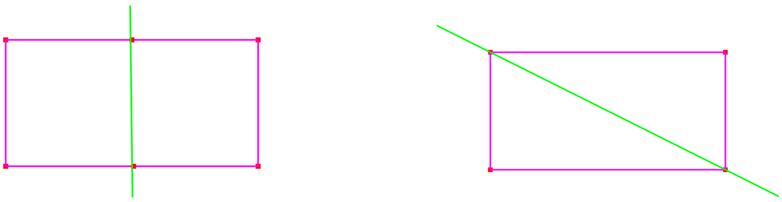


Traza dos líneas rectas secantes y coloca el libro de espejos como se indica en la imagen siguiente. ¿Qué observas?



Un ***eje de simetría*** de un polígono es una recta que divide al polígono en dos partes iguales de forma que una parte es reflejo de la otra

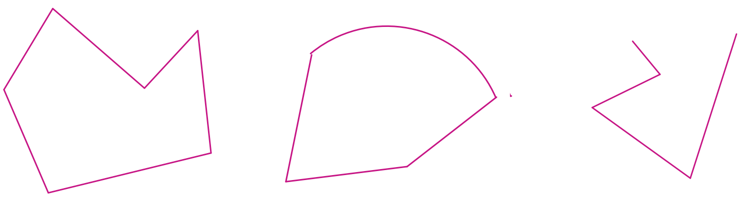
Determinación de un eje de simetría. La recta trazada sobre ambas figuras divide al rectángulo en dos partes iguales. Sin embargo, la recta trazada en el rectángulo uniendo los puntos medios de sus lados opuestos es un eje de simetría, mientras que la diagonal del rectángulo no lo es. Podemos comprobarlo utilizando el doblado de papel.



Un ***número poligonal*** es un número natural que puede representarse geométricamente utilizando polígonos regulares. Los números poligonales se nombran en función del polígono regular utilizado: números triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales, etc.

PRACTICA

4.1.– ¿Las siguientes figuras son polígonos? ¿Por qué?



4.2.– Vamos a fijarnos en los trayectos presentados en el reto:

a) ¿Cómo se llaman los polígonos de los trayectos señalados?

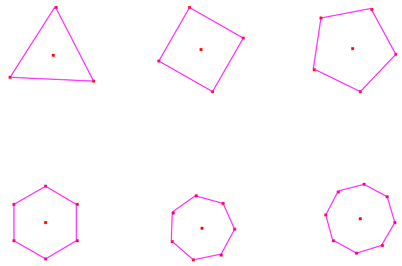
b) ¿Dónde se sitúan los diferentes lugares que vamos a visitar?

c) Señala los dos lugares que podemos visitar si, partiendo de la Catedral, hacemos el trayecto marcado por una diagonal.

d) En los recorridos realizados según lo indicado en el apartado anterior, ¿el trayecto se hace por el interior del recorrido señalado?

4.3.– Dibuja un polígono cóncavo y uno convexo. Elige dos puntos interiores del polígono, A y B. Analiza cómo son los caminos para ir en línea recta desde A hasta B en diferentes casos. ¿Qué observas?

4.4.– Dibuja una circunferencia circunscrita (circunferencia que rodea al polígono tocando en sus vértices) a cada uno de los siguientes polígonos regulares. ¿Quién es el centro y el radio de dicha circunferencia?



4.5.– Utilizando un espejo, investiga los ejes de simetría de los polígonos regulares con un número par o impar de lados. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un polígono regular?

4.6.– Lee el capítulo correspondiente a La quinta noche del libro El diablo de los números de Hans Magnus Enzensberger.

Construye en el geoplano todos los números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales que puedas.

4.7.– Realizar una ***teselación*** significa recubrir el plano utilizando figuras planas de forma que no haya huecos y que las figuras no se solapen.

a) En esta ocasión vamos a trabajar con triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares y hexágonos regulares. Utilizando un solo tipo de estos polígonos determina con cuáles de ellos se pueden realizar teselaciones y con cuáles no. ¿Cuál crees que es el motivo? ¿Se podrán hacer teselaciones con el heptágono, octógono, etc.?

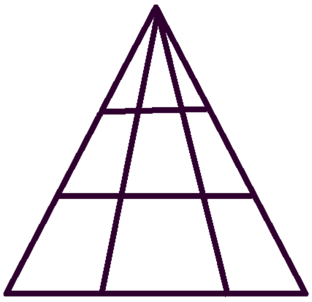
b) Trabajando con triángulos equiláteros, cuadrados, hexágonos regulares y octógonos regulares, analiza la posibilidad de realizar teselaciones mezclando polígonos diferentes.

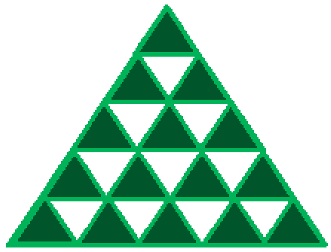
4.8.– ¿Qué polígonos identificas en la siguiente señal de tráfico?

5. TRIÁNGULOS

RETO

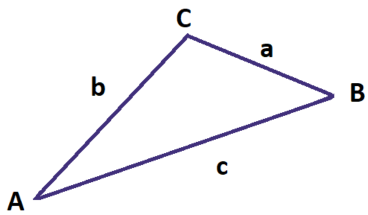
A) ¿Cuántos triángulos hay en estas figuras?





APRENDE Y APLICA

Un ***triángulo*** es un polígono de tres lados. Para nombrar los vértices de un triángulo se usan letras mayúsculas y para los lados letras minúsculas, de forma que a un vértice y a un lado opuestos les corresponde la misma letra. Nombraremos los vértices, y por tanto los lados, siguiendo el sentido contrario al de las agujas del reloj. Un triángulo como el de la imagen se nombra: triángulo ABC



Un triángulo tiene tres vértices y tres ángulos. y además cualquier polígono con tres vértices o tres ángulos es un triángulo. Los triángulos son los polígonos más sencillos pero los más especiales. Por ejemplo, son los únicos que no tienen diagonales. Además, cualquier otro polígono se puede descomponer en triángulos. Conocer los triángulos es fundamental para el estudio de cualquier polígono.

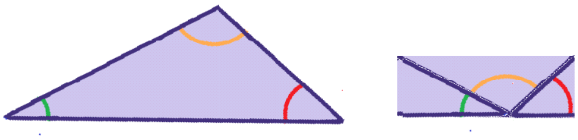
Relaciones entre los elementos de un triángulo: En el Departamento de Matemáticas hemos construido un dibujador de triángulos como el de la figura. Utilízalo dibujar triángulos diferentes y para comprobar que:

- ***En todo triángulo cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia***
- ***En todo triángulo el lado mayor se opone al ángulo mayor y el lado menor se opone al ángulo menor.***

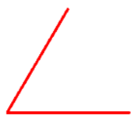
Recorta varios triángulos y comprueba doblando el papel como el de la figura que:

Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°

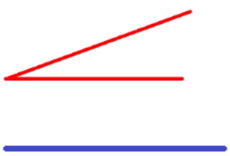
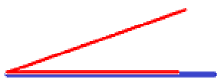
Demostración usando geometría de plegado de papel.



Construcción de triángulos. Veamos qué tengo que saber de un triángulo para poderlo construir. Si conocemos solo un elemento, un lado o un ángulo, es obvio que no tenemos información suficiente para dibujar el triángulo:

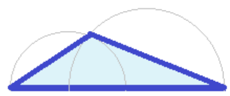
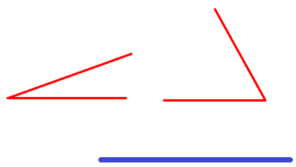
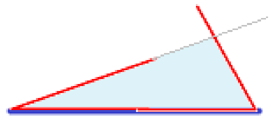
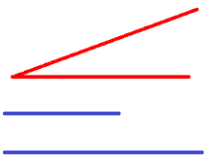
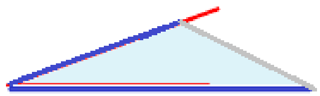


Si conocemos dos elementos:

Dos lados: Dibujamos: 	Pensamos: No conocemos el ángulo, no podemos dibujarlo (no sabemos cómo colocar los lados) NO TENEMOS INFORMACIÓN SUFICIENTE
Dos ángulos: Dibujamos: 	Pensamos: No conocemos el lado no podemos dibujarlo (no sabemos cuánto juntar los ángulos) NO TENEMOS INFORMACIÓN SUFICIENTE
Un lado y un ángulo: Dibujamos: 	Pensamos: Aunque coloquemos el ángulo sobre el lado  No podemos dibujarlo (no sabemos cómo dibujar el otro lado) NO TENEMOS INFORMACIÓN SUFICIENTE

5. TRIÁNGULOS

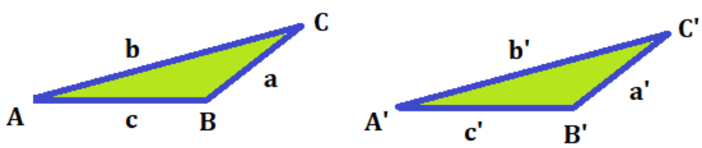
Si conocemos tres elementos:

Tres lados: Dibujamos: 	Pensamos: Con ayuda del compás: 
Tres ángulos:	Si conocemos dos ángulos del triángulo, podemos calcular el tercero porque sabemos que entre los tres suman 180° Ya sabemos que conociendo solo dos ángulos no se puede dibujar un triángulo.
Dos ángulos y un lado: Dibujamos 	Pensamos: 
Dos lados y el ángulo que forman: Dibujamos: 	Pensamos: 

Determinación de un triángulo. Un triángulo queda determinado si conocemos tres de sus elementos y alguno de ellos es un lado.

Dos triángulos son ***iguales*** si al superponerlos coinciden.

OBSERVA: Dos triángulos iguales tienen lados y ángulos respectivamente iguales.



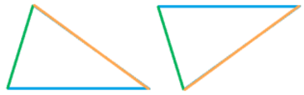
$\widehat{A} = \widehat{A'}$ $\quad a = a'$

$\widehat{B} = \widehat{B'}$ $\quad b = b'$

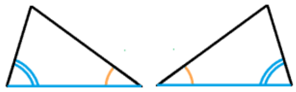
$\widehat{C} = \widehat{C'}$ $\quad c = c'$

Comparación de triángulos. Para comparar dos triángulos no tenemos que comparar todos sus elementos ***Dos triángulos son iguales si:***

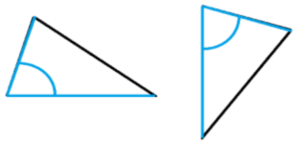
Tienen los lados respectivamente iguales.



Tienen un lado y los ángulos contiguos a él respectivamente iguales



Tienen dos lados y el ángulo que forman respectivamente iguales



Clasificación de los triángulos: Los triángulos se pueden clasificar atendiendo a sus lados o a sus ángulos.

SEGÚN SUS LADOS

Un triángulo es ***equilátero*** si tiene todos sus lados iguales.

Un triángulo es ***isósceles*** si tiene al menos dos lados iguales.

Un triángulo es ***escaleno*** si tiene todos sus lados distintos.

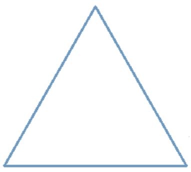
SEGÚN SUS ÁNGULOS

Un triángulo es ***acutángulo*** si tiene los tres ángulos agudos.

Un triángulo es ***rectángulo*** si tiene un ángulo recto.

Un triángulo es ***obtusángulo*** si tiene un ángulo obtuso.

OBSERVA:

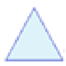
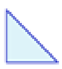
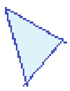
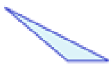


El triángulo de la figura tiene los tres lados iguales, es equilátero.

El triángulo de la figura tiene al menos dos lados iguales, es isósceles.

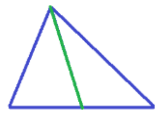
El triángulo de la figura es equilátero e isósceles.

Todo triángulo equilátero es isósceles. Algunos triángulos isósceles son equiláteros.

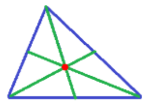
	ACUTÁNGULO	RECTÁNGULO	OBTUSÁNGULO
EQUILÁTERO			
ISÓSCELES			
ESCALENO			

Medianas y baricentro

Mediana: Segmento que une un vértice con el punto medio del segmento que forma el lado opuesto. Un triángulo tiene tres medianas puesto que tiene tres lados.



Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado ***Baricentro.***



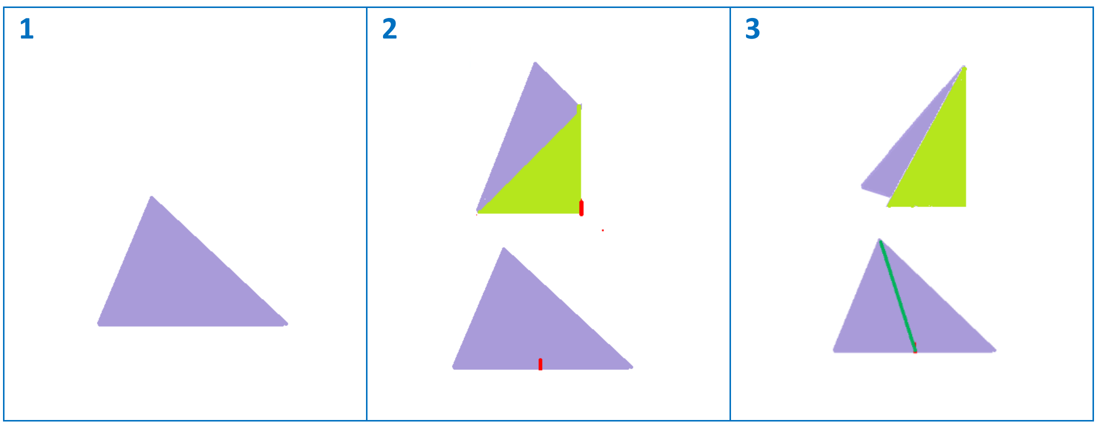
Trazado de las medianas y el baricentro

Con regla y compas:

1. Señalar el punto medio de un lado
2. Unir el punto medio del lado con el vértice opuesto.

Doblando papel:

1. Recortar un triángulo.
2. Doblar el triángulo para encontrar el punto medio del lado.
3. Hacer un doblez por el punto medio y el vértice opuesto. Marcar el doblez. el segmento marcado es la mediana.

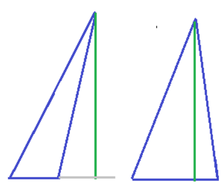


Repitiendo el procedimiento sobre los otros lados se dibujan las otras dos medianas. Para encontrar el baricentro se marcan las tres medianas y se señala el punto donde se cortan, ese es el baricentro.

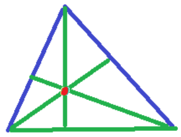
Alturas y ortocentro

Altura: Segmento perpendicular a un lado que une ese lado o su prolongación con el vértice opuesto

Un triángulo tiene tres alturas, puesto que tiene tres lados



Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ***ortocentro.***



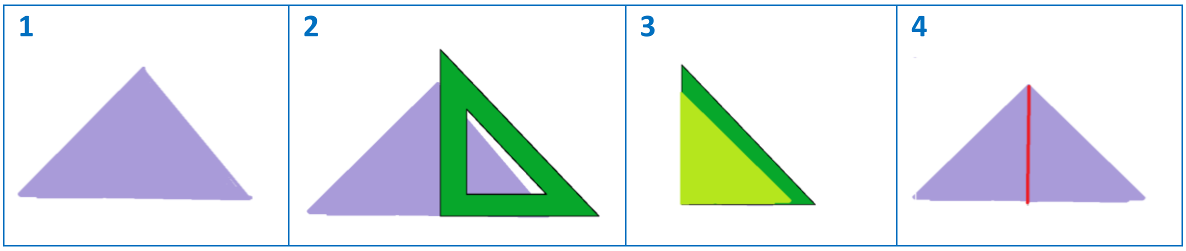
Trazado de las alturas y el ortocentro

Con escuadra y cartabón:

Trazar una perpendicular a un lado que pase por el vértice opuesto, prolongar el lado si es necesario

Doblando papel:

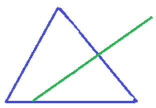
1. Recortar un triángulo acutángulo.
2. Doblar el triángulo ayudándonos de la escuadra (o de otro folio que nos marque el ángulo recto) para encontrar la perpendicular al lado que pase el vértice opuesto.
3. Marcar el doblez. el segmento marcado es la altura



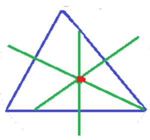
Repitiendo el procedimiento sobre los otros lados se dibujan las otras dos alturas. Para encontrar el ortocentro se marcan las tres alturas y se señala el punto donde se cortan.

Mediatrices, circuncentro y circunferencia circunscrita. Recuerda que la mediatriz de un segmento está formada por puntos que están a la misma distancia de los extremos del segmento.

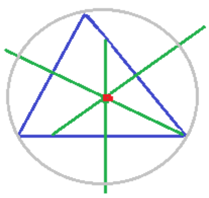
Mediatriz: mediatriz del segmento que forma el lado.
Un triángulo tiene tres mediatrices puesto que tiene 3 lados que son segmentos.



Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado ***circuncentro.***



Cuando trazamos las mediatrices de un triángulo el circuncentro está a la misma distancia de los tres vértices porque está en las tres mediatrices. Si hacemos una circunferencia pinchando el compás en el circuncentro y lo abrimos para tomar la distancia a uno de los vértices, la circunferencia que obtenemos pasa por todos los vértices. Se llama ***circunferencia circunscrita*** porque rodea al triangulo.



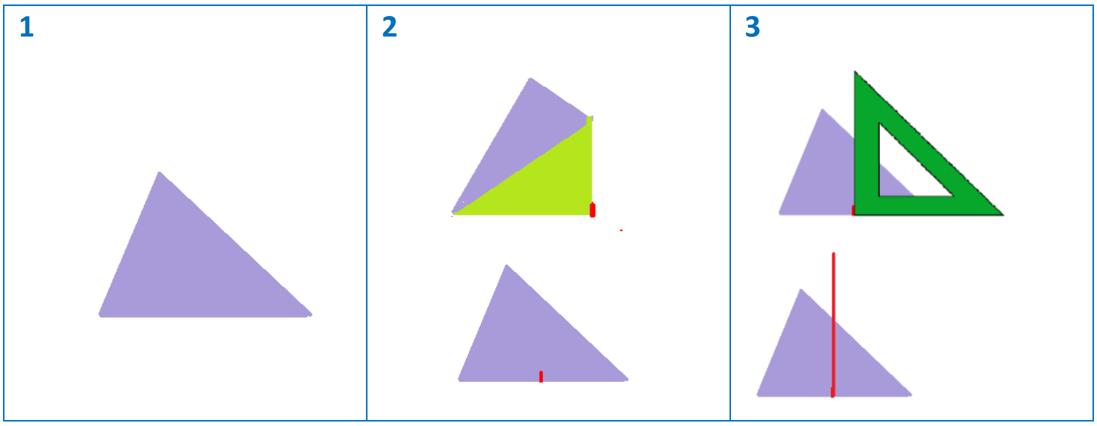
Trazado de las mediatrices y el circuncentro.

Con regla y compás:

Trazar la mediatriz de un lado.

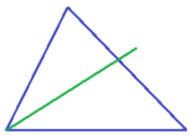
Doblando papel:

1. Recortar un triángulo.
2. Doblar el triángulo para encontrar el punto medio del lado y marcarlo.
3. Doblar el triángulo ayudándonos de la escuadra (o de otro folio que nos marque el ángulo recto) para encontrar la perpendicular al lado que pase el punto medio del lado.
4. Marcar el doblez. el segmento marcado es la mediatriz



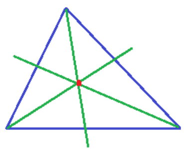
Repitiendo el procedimiento sobre los otros lados se dibujan las otras dos mediatrices. Para encontrar el circuncentro se marcan las tres mediatrices y se señala el punto donde se cortan.

Bisectrices, incentro y circunferencia inscrita. Recuerda que la bisectriz de un ángulo está formada por puntos que están a la misma distancia de los lados del ángulo.

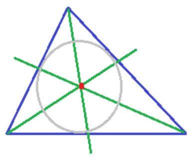


Bisectriz de un triángulo: bisectriz del ángulo interior del triángulo.

Un triángulo tiene tres bisectrices. puesto que tiene tres ángulos



Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado ***incentro.*** Cuando trazamos la bisectriz de un triángulo el incentro está a la misma distancia de los tres lados porque está en las tres bisectrices.



Si hacemos una circunferencia pinchando el compás en el incentro y lo abrimos para tomar la distancia a uno de los lados, la circunferencia que obtenemos es tangente a todos los lados . Se llama ***circunferencia inscrita*** porque está dentro del triángulo.

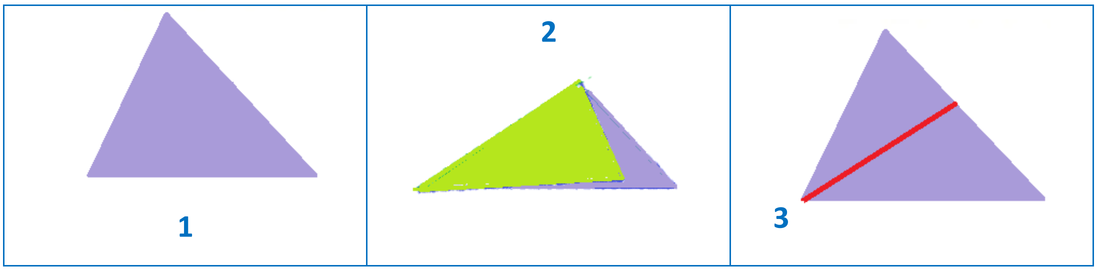
Trazado de las bisectrices y el incentro

Con escuadra y cartabón:

Trazar la bisectriz del ángulo interior del triángulo.

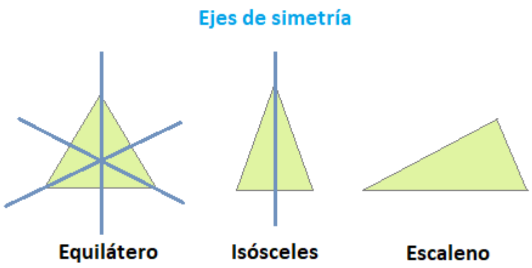
Doblando papel:

1. Recortar un triángulo.
2. Hacer un doblez en el triángulo que pase por el vértice y divida al ángulo en dos parte iguales
3. Marcar el doblez. el segmento marcado es la bisectriz.



Repitiendo el procedimiento sobre los otros lados se dibujan las otras dos bisectrices. Para encontrar el incentro se marcan las tres bisectrices y se señala el punto donde se cortan.

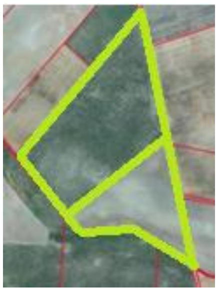
Estudio de los ejes de simetría de un triángulo. Estudiamos los ejes de simetría con la geometría del plegado. El triángulo equilátero lo podemos doblar de tres formas para que se superponga exactamente una mitad sobre la otra. Tiene tres ejes de simetría que coinciden también con sus medianas alturas mediatrices y bisectrices. El triángulo isósceles no equilátero solo lo podemos doblar de una forma para que se superponga exactamente una mitad sobre la otra. Tiene un eje de simetría que coincide con la altura, mediana, la mediatriz y la bisectriz que cortan el lado desigual. El tríangulo escaleno no tiene ejes de simetría.



PRACTICA

5.1.- El sistema de información geográfica de parcelas agrícolas, SIGPAC, se configura como una base de datos que contiene una imagen aérea de todo el territorio nacional.

Esta es una imagen del SIGPAC de Castilla León y al lado dos parcelas extraídas de la imagen.

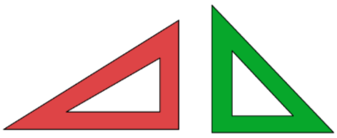


Descompón los polígonos en triángulos de tres formas distintas, sin usar más de seis triángulos en ninguna de ellas

5.2.- Queremos dibujar triángulos de manera que la longitud de sus lados en cm sean las puntuaciones obtenidas al tirar tres dados ¿con qué tiradas lo conseguiremos?

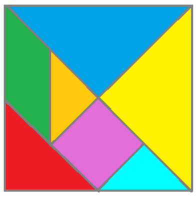
5.3.- Tanto la escuadra como el cartabón tienen un ángulo recto, la escuadra tiene dos ángulos iguales, en cambio los ángulos del cartabón son uno el doble que el otro.

- ★ ¿Cuánto miden los ángulos de la escuadra? ¿Cuántos de sus lados son iguales? ¿De qué color está pintado en el dibujo?
- ★ ¿Cuánto miden los ángulos del cartabón? ¿Cuántos de sus lados son iguales? ¿De qué color está pintado en el dibujo?



5.4.- Responde razonadamente:

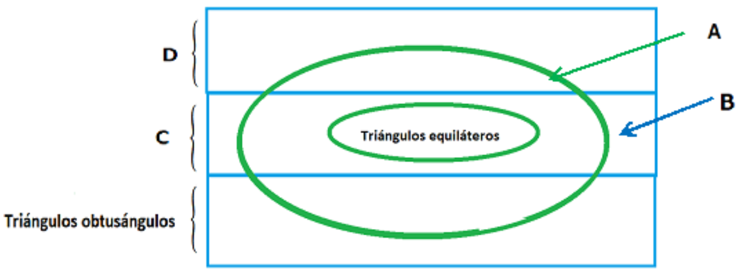
- ★ ¿Cuántos grupos de triángulos iguales hay en el tangram?
- ★ ¿Cuánto miden los ángulos de los polígonos que forman el Tangram?



5.5.- Responde razonadamente:

- ★ ¿Hay algún triángulo equilátero que sea obtusángulo?
- ★ ¿Hay algún triángulo rectángulo que sea isósceles?
- ★ ¿Hay algún triángulo rectángulo que sea equilátero?
- ★ ¿Hay algún triángulo escaleno que sea acutángulo?
- ★ ¿Hay algún triángulo isósceles que sea obtusángulo?

5.6.- Indica que tipo de triángulos representan las letras: **A, B, C** y **D**



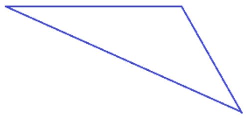
5.7.- Recorta un triángulo y señala plegando, las medianas y el baricentro.

Comprueba que, si apoyas el triángulo sobre una regla puesta de canto, de forma que la mediana esté en contacto con la regla, se mantiene en equilibrio.

Comprueba que, si apoyas el triángulo sobre la punta de un boli colocada en su baricentro, se mantiene en equilibrio, comprueba también que si intentas hacer lo mismo en cualquier otro punto se cae. El baricentro es el centro de gravedad del triángulo.

5.8.- Recorta un triángulo rectángulo de papel y señala plegando, las alturas y el ortocentro. ¿En qué punto del triángulo está el ortocentro? Intenta hacer lo mismo con un triángulo obtusángulo. ¿Qué ocurre? ¿Cómo se puede salvar esta dificultad?

5.9.- Dibuja ayudándote de la escuadra y el cartabón las alturas y el ortocentro de este triángulo.



5.10.- ¿Qué ocurre con las medianas, alturas, mediatrices y bisectrices de un triángulo equilátero?

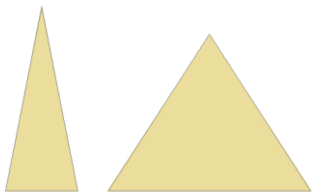
Compruébalo usando la geometría del doblado o dibujándolas con regla y compás. Comprueba doblando un triángulo equilátero que la distancia del punto donde se encuentran los centros a un vértice es el doble de la distancia de ese punto al lado.

5.11.- Tres amigos se sitúan separados unos de otros para jugar a la pelota, y el cuarto se quiere colocar en un punto que le permita lanzar la pelota a cada uno de ellos en las mismas condiciones, por eso busca un lugar que se encuentre a la misma distancia de cada uno de ellos. ¿Puedes ayudarlo a situarse, indicando en qué punto tiene que colocarse y qué tiene que hacer para encontrarlo?

5.12.- En el centro de una plaza hay un jardín que tiene forma de triángulo escaleno acutángulo.

Un técnico del ayuntamiento recibe el encargo de colocar dos aspersores, uno que funcione durante la noche y riegue hasta la última planta y otro que funcione durante el día y riegue la mayor área posible del jardín sin que el agua moje a quienes pasean cerca. ¿Cuál es el lugar más adecuado para colocar cada uno de ellos?

5.13.- Señala dónde se puede colocar un espejo para que, contando con el reflejo, podamos ver un triángulo exactamente igual que el original.



6. CUADRILÁTEROS

RETO

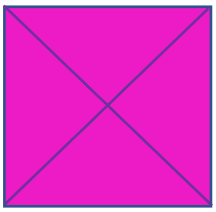
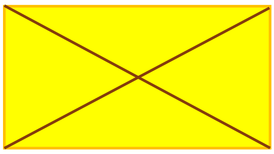
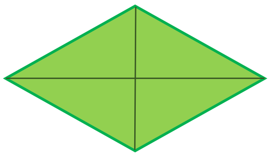
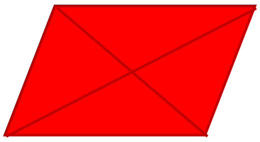
A) ¿Cuántos cuadrados tiene un tablero de ajedrez?

APRENDE Y APLICA

*Los **cuadriláteros*** son polígonos que tienen 4 lados, 4 ángulos y dos diagonales. Una de las ***clasificaciones*** tiene que ver con el paralelismo de los lados.

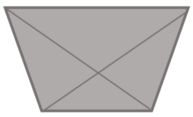
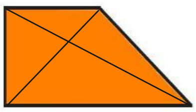
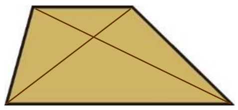
Paralelogramos

- ✓ Cuadriláteros con los lados opuestos paralelos

CUADRADO	RECTÁNGULO	ROMBO	ROMBOIDE
 4 LADOS IGUALES 4 ÁNGULOS IGUALES	 LADOS IGUALES DOS A DOS 4 ÁNGULOS IGUALES	 4 LADOS IGUALES ÁNGULOS IGUALES DOS A DOS	 LADOS IGUALES DOS A DOS ÁNGULOS IGUALES DOS A DOS

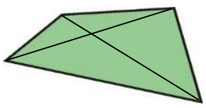
Trapecios

- ✓ Cuadriláteros con dos lados paralelos llamados BASES.

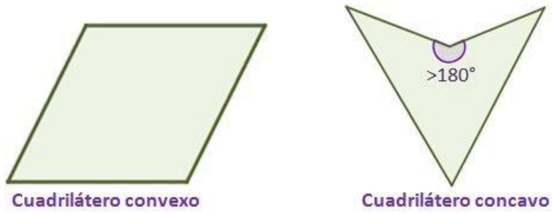
ISÓSCELES	RECTÁNGULO	ESCALENO
 LADOS NO PARALELOS IGUALES ÁNGULOS IGUALES DOS A DOS	 2 ÁNGULOS RECTOS	 4 ÁNGULOS DISTINTOS

TRAPEZOIDES

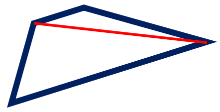
- ✓ Cuadriláteros con ningún par de lados paralelos



Cóncavos y convexos. Cómo los cuadriláteros son polígonos, pueden ser cóncavos o convexos. En el primer caso, uno de sus ángulos interiores mide más de 180º.



Un cuadrilátero se divide en dos triángulos. Dibujamos un cuadrilátero cualquiera y trazamos una de sus diagonales.



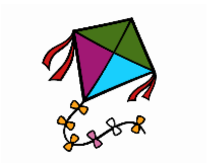
PRACTICA

6.1.- Dibuja un cuadrado de lado 5 cm. Según la definición de rectángulo, ¿podríamos decir que el cuadrado es un rectángulo? ¿Y un rombo?

Dibuja ahora un romboide de base 5 cm. Según las definiciones, ¿podemos decir que es un cuadrado? ¿Y un rectángulo? ¿Y un rombo?

6.2.- En nuestra vida diaria estamos rodeados de figuras geométricas. Si nos paramos a observarlas, seguro que las encontramos. Muchas de ellas con cuadriláteros. Como, por ejemplo, las COMETAS.

Diseña tu propia cometa con forma de cuadrilátero y contesta:



- ¿Qué tipo de cuadrilátero es?
- Mide los ángulos interiores y súmalos.
- Traza las diagonales, ¿cuánto miden los nuevos ángulos que resultan?

6.3.- Una ventana tiene forma de trapecio rectángulo cuya base menor es igual que el lado perpendicular a ella y la mitad que la base mayor. Haz un dibujo de ella.

¿Se puede dividir en cuatro partes iguales?

6.4.- Elige la respuesta correcta.

A) Al trazar las diagonales el cuadrilátero no queda dividido en 2 triángulos rectángulos iguales.

☐ CUADRADO ☐ RECTÁNGULO ☐ TRAPECIO

B) Las diagonales de un rombo son:

☐ PERPENDICULARES ☐ SEMIRRECTAS ☐ DESIGUALES

C) Cuadrilátero que tiene dos lados paralelos:

☐ RECTÁNGULO ☐ ROMBOIDE ☐ TRAPEZOIDE

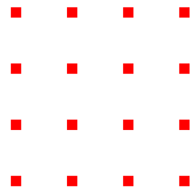
D) Trapecio que no tiene un ángulo recto:

☐ ESCALENO ☐ RECTÁNGULO ☐ ISÓSCELES

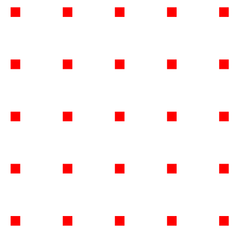
INVESTIGANDO EN EL GEOPLANO

a) Construye diferentes triángulos en el Geoplano ¿Cómo se llaman los triángulos que has construido? ¿Hay algún triángulo que no se pueda construir? ¿Por qué?

b) En el geoplano de 4 x 4 intenta construir polígonos de 3, 4, 5, 6, 7, … lados. ¿Cuál es el polígono de mayor número de lados que se puede construir?



c) c) En el geoplano 5x5 ¿cuál es el polígono de mayor número de lados que puedes construir?



d) ¿Qué ocurre en el geoplano 6 x 6, 7 x 7, 8 x 8?

e) ¿Hay alguna relación entre las dimensiones del geoplano y el polígono de mayor número de lados que se puede construir? En un geoplano cuadrado de dimensiones *n x n* ¿Cuál sería el polígono de mayor número de lados que se puede construir?

CUADRADOS COOPERATIVOS

Objetivos:

- Ayudar, través de una sencilla dinámica, a comprender la importancia de la colaboración y el trabajo en equipo.
- Estimular el espíritu de cooperación.

Material: un lote de 5 sobres con las figuras indicadas para cada equipo.

Desarrollo de la actividad:

- Formar grupos de 5 personas y un observador que se encargará de observar y anotar el resultado del juego. Cada grupo dispondrá de 5 sobres (A, B, C, D y E)
- El profesor explica que cada grupo va a construir una serie de puzles que requieren la colaboración de todos
- Cada grupo ha de regirse por las siguientes normas:
  - Cada persona tiene un sobre que contiene piezas para formar un cuadrado
  - El juego acabará cuando cada 1 tenga ante sí un cuadrado y éste sea del mismo tamaño en todos los casos
  - Durante el juegos no se puede hablar ni comunicarse, ni siquiera por gestos.
  - No se puede coger piezas de otro compañero, pero sí ceder las propias
  - Los que terminen han de permanecer en silencio observando a los demás

DIBUJA LAS IDEAS PRINCIPALES DEL TEMA:

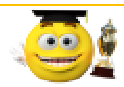
Elabora de un **Lapbook** que permita ver ***de un vistazo*** las ideas principales del tema:

- ✓ Elementos geométricos básicos: Plano, recta, punto, semiplano, semirrecta, segmento.
- ✓ Posición relativa de dos rectas en el plano.
- ✓ Ángulos. Clasificación y relaciones.
- ✓ Mediatriz y bisectriz. Aplicaciones prácticas.
- ✓ Circunferencia y círculo.
- ✓ Polígonos.
- ✓ Triángulos.
- ✓ Cuadriláteros.

EVALÚA Y AFIANZA

Llegados al final del tema reflexiona sobre lo que has aprendido. Marca en la siguiente tabla lo que corresponde a cada frase, haz la autoevaluación y revisa de nuevo la tabla.

¿CÓMO LO HAGO?	Me cuesta hacerlo	Estoy aprendiendo	Lo hago bien	Soy un experto
Definir los elementos geométricos básicos				
Identificar los elementos geométricos básicos				
Identificar rectas paralelas, rectas perpendiculares.				
Identificar diferentes tipos de ángulos.				
Identificar ángulos en la circunferencia				
Identificar diferentes polígonos				
Trazar rectas paralelas y perpendiculares				
Dibujar ángulos				
Trazar la mediatriz de un segmento				
Trazar la bisectriz de un ángulo				
Medir ángulos con el transportador				
Clasificar ángulos				
Distinguir las relaciones entre ángulos				
Describir polígonos				
Calcular la medida de ángulos en situaciones en las que aparecen triángulos				
Calcular la medida de ángulos en situaciones en las que aparecen rectas (paralelas, secantes, ...)				
Construir triángulos a partir de algunos de sus elementos				
Identificar triángulos iguales				
Aplicar los criterios de igualdad de triángulos				
Trazar las medianas, mediatrices, alturas y bisectrices de un triángulo				
Obtener el baricentro, circuncentro, ortocentro, e incentro de un triángulo				
Trazar la circunferencia inscrita y la circunferencia circunscrita en un triángulo				
Identificar puntos y rectas notables en situaciones problemáticas reales				
Representar situaciones geométricas reales con elementos geométricos básicos				
Utilizar instrumentos de dibujo (regla, compás…) para resolver situaciones en contextos reales y matemáticos				

¿CÓMO LO HAGO?	 Me cuesta hacerlo	 Estoy aprendiendo	 Lo hago bien	 Soy un experto
Utilizar geometría del plegado para resolver situaciones en contextos reales y matemáticos				
Expresar verbalmente o por escrito, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema				
Trabajar en grupo				
Aprender de mis errores				
Enfrentar un reto o tarea con ganas y motivación				
Esforzarme para hacer bien las tareas				

AUTOEVALUACIÓN

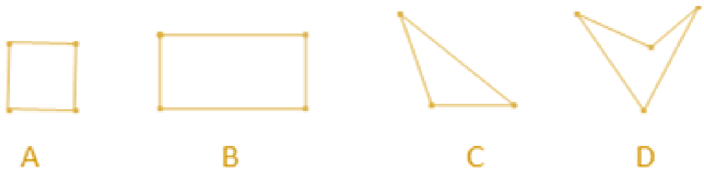
A1. Realiza la siguiente construcción:

a) Traza una recta, r. Señala un punto A sobre la recta r y un punto exterior a r.

b) Dibuja una recta, s, que pase por A y B. ¿Cómo son las rectas r y s?

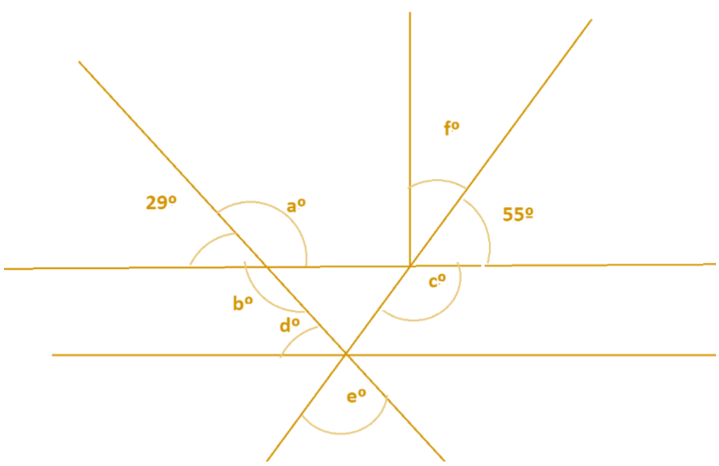
c) Dibuja una recta, t, que pase por B y no corte a la recta r. ¿Hay varias soluciones?

A2. Identifica al intruso

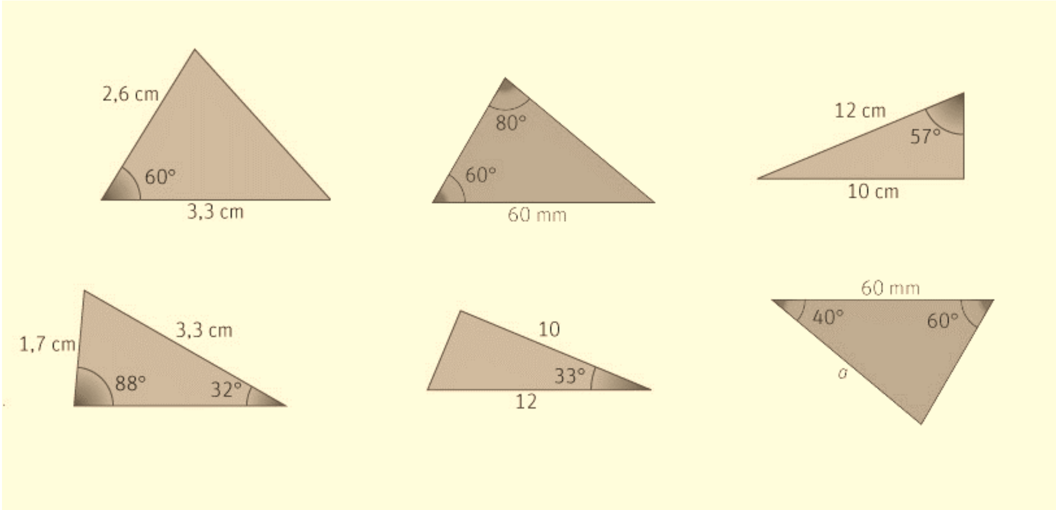


Lo importante en este caso es la comunicación de ideas y la utilización de las diferentes definiciones de forma correcta, de manera que puede haber varias soluciones.

A3. Calcula razonadamente el valor de a, b, c, y d en la figura:



A4. Identifica cuales de los siguientes son iguales utilizando los criterios de igualdad



A5. Identifica y nombra los cuadriláteros que:

a) Tienen todos los ángulos iguales.

b) Tienen los lados opuestos paralelos.

c) No tienen los lados opuestos paralelos.

d) Tienen los cuatro lados iguales.

e) Tienen solo dos lados paralelos.

A6. ¿Reconoces las posiciones relativas de circunferencias y rectas?

a) Dibuja dos circunferencias tangentes interiores.

b) Dibuja una recta tangente a las dos circunferencias.

c) Dibuja otra recta tangente a una circunferencia y secante a la otra.

Solución A1: b) r y s son secantes

c) La solución es única. Es la única recta paralela a r que pasa por B.

Solución A2: Se puede considerar que el intruso es A porque es un polígono regular y el resto no.

El intruso puede ser C porque es un triángulo y el resto son cuadriláteros.

El intruso puede ser D porque es un polígono cóncavo y el resto son convexos.

Solución A3: a=180 -29 =151 suplementarios

b=151 suplementario de 29º

c=180-55=125 suplementarios

d es igual al opuesto por el vértice de 29º

f = 90-55 = 35 complementarios

Solución A4: El segundo y el sexto tienen respectivamente igual un lado y los ángulos contiguos.

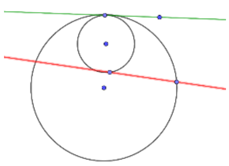
El tercero y el quinto tienen dos lados y el ángulo que forman.

Solución A5: A) romboide B) trapecio rectángulo C) trapezoide D) cuadrado

E) trapecio isósceles F) rombo G) trapezoide H) rectángulo

a) D y H b) A, D, F y H c) B, C, E y G d) D y F e) B y E

Solución A6:



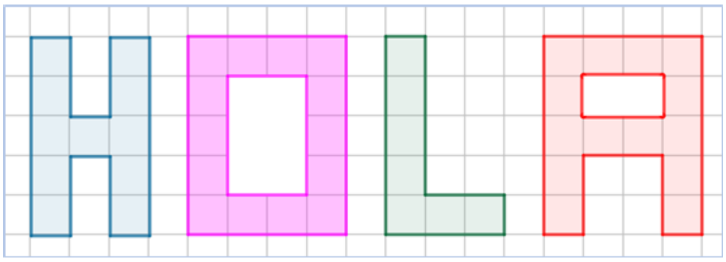
MEDIDA EN EL PLANO

ÍNDICE

PROBLEMAS QUE VAMOS A RESOLVER

1.-Un nuevo compañero

Hoy damos la bienvenida a un nuevo compañero que no conoce nuestro idioma y queremos elaborar una pancarta con la palabra HOLA, tal y como se puede ver en la siguiente imagen donde cada cuadradito gris es un cuadrado de lado 1 dm:



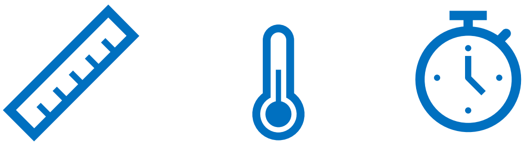
Los bordes de las letras los vamos a decorar con cinta de color y el interior de la pintura lo vamos a rellenar con papel de colores.

¿Cuántos metros de cinta tenemos que ir a comprar? ¿Cuántos decímetros cuadrados de papel de colores necesitamos para cada letra?

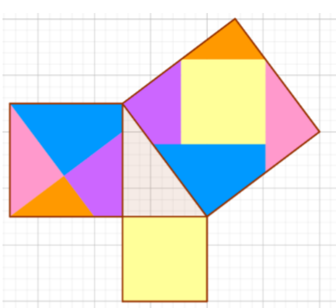
¿Hacen falta los mismos metros de cinta de color para completar el borde de cada una de ellas? ¿Eso ocurre siempre?

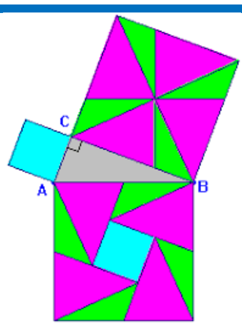
2.- El instituto

Podemos conseguir en Google Maps una imagen de nuestro instituto, ¿puedes calcular los metros de valla que tiene? ¿Cuántos metros cuadrados abarca la parcela donde se ubica?



VEO	PIENSO	ME PREGUNTO





VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

1. Medir o estimar

RETOS

A) Utilizando un lapicero que tengas ahora mismo en el estuche, mide la mesa de clase y reflexiona con las siguientes preguntas:

a. Con los datos de la actividad, ¿has sabido lo que tenías que hacer? ¿Qué has medido, el ancho, el largo, la altura de la mesa o la superficie que ocupa el tablero?
b. El profesor comparará en la pizarra todos los valores obtenidos. ¿Por qué, siendo todas las mesas iguales obtenéis distintos valores?, ¿qué estamos haciendo mal?, o, mejor dicho, ¿cómo mejoraríamos la medida del largo de lamesa?

B) Utilizando los pies vamos a medir el largo y el ancho de la clase. Ahora parece que lo que hay que medir está claro, pero ¿obtenéis todas las mismas medidas?

C) Sabiendo lo que mide tu aula de largo, ¿cuánto puede medir la fachada del instituto?

APRENDE Y APLICA

Medir es comparar lo que quiero medir con un patrón de medida. Parece claro que era necesario tener un mismo patrón de medida para todo el mundo, de manera que si medimos el ancho o el largo de la clase obtengamos todos un mismo resultado o, mejor dicho, que todos tengamos las mismas unidades de medida.

En muchas ocasiones, en lugar de medir, podemos realizar una estimación de la medida. Es decir, damos un valor aproximado a la magnitud que queremos medir. Para realizar una estimación podemos comparar la longitud o el área con algo conocido. Por ejemplo, conociendo nuestra altura podemos estimar la altura de clase o la altura de mis amigos. Mediante los pasos podemos aproximar una longitud, etc.

El sistema internacional (SI) está constituido por siete unidades básicas: metro, kilogramo, segundo, kelvin, amperio, mol y candela. Antes de empezar a trabajar, recordamos algunas cosas que debes saber. En este tema nosotros nos vamos a centrar en el metro y todas las unidades derivadas que se generan a partir de él.

Será necesario utilizar ***múltiplos y submúltiplos del metro.*** El metro es muy útil para medir el ancho o el largo de clase, pero si queremos medir la distancia entre dos ciudades o la longitud de una goma de borrar, el metro ya no es efectivo. En la siguiente tabla se relacionan algunos de los múltiplos y submúltiplos más utilizados:

Tabla de múltiplos

Prefijo	Símbolo	Factor	Verbalizo
Deca	da	10	Un decámetro son 10 metros.
Hecto	h	$10^2 = 100$	Un hectómetro son 100 metros.
Kilo	k	$10^3 = 1\,000$	Un kilómetro son 1 000metros

Tabla de submúltiplos

Prefijo	Símbolo	Factor	Verbalizo
Deci	d	$10^{-1} = 0{,}1$	Un metro son 10 decímetros.
Centi	c	$10^{-2} = 0{,}01$	Un metro son 100 centímetros.
Mili	m	$10^{-3} = 0{,}001$	Un metro son 1 000 milímetros

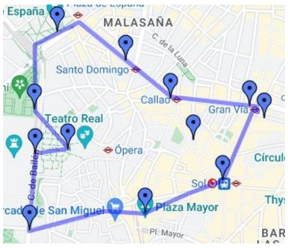
No solo existen las unidades que hemos visto en este apartado. En Estados Unidos no están acogidos al Sistema Internacional por lo que tienen sus medidas de longitud propias. Ellos utilizan el pie y la pulgada.

a. Averigua a cuánto equivale un pie y una pulgada en centímetros.
b. Mide tu altura y transforma la medida en pies y pulgadas.

También existen otros múltiplos y submúltiplos o incluso otras unidades distintas. Por ejemplo, la distancia entre estrellas (que es muy grande) la medimos en años luz.

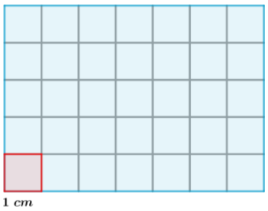
a. Busca información sobre esta unidad de medida.
b. ¿Cuál es la distancia entre nuestra galaxia, la Vía Láctea, y la galaxia más cercana, Andrómeda?

INVESTIGACIÓN: Busca distintas unidades que se han utilizado a lo largo de la historia para medir: pies, codos, etc.



El perímetro. Una de las longitudes que nos interesa medir en las figuras del plano es el perímetro. El perímetro de una figura es la longitud total de su contorno, por lo que se utilizará para medirlo el metro, sus múltiplos o sus submúltiplos. En un polígono, es la suma de las longitudes de todos sus lados. Al perímetro de una circunferencia se le llama longitud de la circunferencia.

Vamos a trabajar también con las ***unidades de superficie.*** Vamos a medir la superficie del rectángulo de la figura. Para ello, dividimos el rectángulo en cuadrados de *1 cm* de lado como se puede ver en la siguiente imagen. Queremos calcular su superficie. Ya no nos valen las unidades que hemos utilizado, aunque las podremos deducir de ellas. Decíamos antes que medir es comparar lo que quiero medir con un patrón de medida. En este caso, el patrón (unidad) de medida es el cuadrado rojo, de lado *1 cm*. ¿Cuántos cuadrados rojos de *1 cm* de lado caben en el rectángulo azul?



El cuadrado rojo tiene 1 cm de lado. Diremos que su área es:

$$A = 1\ cm \times 1\ cm = 1\ cm^2$$

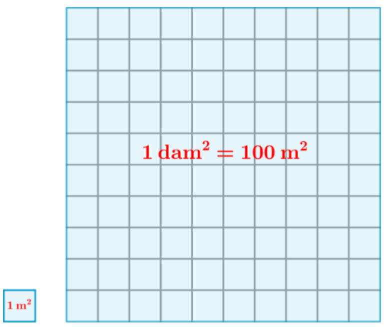
La respuesta es que caben_ cuadrados rojos. Diremos, que la superficie del rectángulo es _cm^2. Las superficies tienen dos dimensiones, para entendernos "largo" y "ancho" y la unidad base de medida de superficies va a ser el "metro cuadrado", escrito m^2.

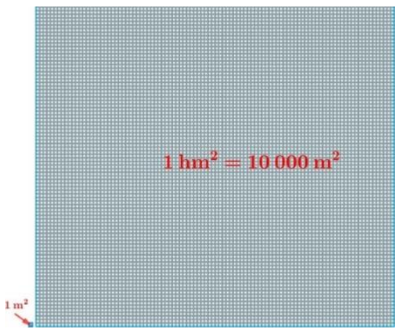
Un metro cuadrado es el área encerrada bajo un cuadrado de lado 1 m

La unidad base para medir superficies es el metro cuadrado. A partir de esta unidad base tenemos sus múltiplos (similar con los submúltiplos)

Prefijo	Símbolo	Factor	Verbalizo
Deca	da	$10^2 = 100$	Un decámetro cuadrado equivale a 100 metros cuadrados. Es el área de un cuadrado de 10 metros de lado.
Hecto	h	$10^4 = 10\ 000$	Un hectómetro cuadrado equivale a 10 000 metros cuadrados. Es el área de un cuadrado de 100 metros de lado.
Kilo	k	$10^6 = 1\ 000\ 000$	Un kilómetro cuadrado equivale a 1 000 000 metros cuadrados. Es el área de un cuadrado de 1 000 metros de lado.

En la siguiente imagen puedes visualizar el significado de 1 dam^2 y un 1 hm^2.





Aunque no pertenece al Sistema Internacional es de uso común utilizar la hectárea (ha) para medir grandes áreas de tierra.

Una hectárea es una medida de superficie que equivale a $10\ 000\ m^2$.
Una hectárea equivale a un hectómetro cuadrado.

PRACTICA

1.1.– Completa en tu cuaderno:

a. $2\ km = 2 \cdot \underline{\qquad\qquad} m = \underline{\qquad\qquad\qquad} m$
b. $3\ m = 3 \cdot \underline{\qquad\qquad} cm = \underline{\qquad\qquad\qquad} cm$
c. $0{,}2\ m = 0{,}2 \cdot \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} mm$
d. $1{,}32\ km = 1{,}32 \cdot \underline{\qquad\qquad} cm = \underline{\qquad\qquad} cm$
e. $2\ cm = 2 \div \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} m$
f. $3\ m = 3 \div \underline{\qquad\qquad} km = \underline{\qquad\qquad} km$
g. $301\ mm = 301 \div \underline{\qquad\qquad} dm = \underline{\qquad\qquad} dm$
h. $2\ 035{,}2\ m = 2\ 035{,}2\ m \div \underline{\qquad\qquad} km = \underline{\qquad\qquad} km$
i. $2\ km^2 = 2 \cdot \underline{\qquad\qquad}\ m^2 = \underline{\qquad\qquad\qquad} m^2$
j. $3\ m^2 = 3 \cdot \underline{\qquad\quad}\ cm^2 = \underline{\qquad\qquad\qquad}\ cm^2$
k. $0{,}2\ m^2 = 0{,}2 \cdot \underline{\qquad\qquad}\ mm^2 = \underline{\qquad\qquad\qquad}\ mm^2$
l. $1{,}32\ km^2 = 1{,}32 \cdot \underline{\qquad\qquad}\ cm^2 = \underline{\qquad\qquad\qquad}\ cm^2$
m. $2\ cm^2 = 2 \div \underline{\qquad\qquad}\ m^2 = \underline{\qquad\qquad}\ m^2$
n. $3\ m^2 = 3 \div \underline{\qquad\qquad}\ km^2 = \underline{\qquad\qquad}\ km^2$
o. $301\ mm^2 = 301 \div \underline{\qquad\qquad}\ dm^2 = \underline{\qquad\qquad}\ dm^2$
p. $2012{,}3\ m^2 = 2012{,}3 \div \underline{\qquad\qquad}\ km^2 = \underline{\qquad\qquad}\ km^2$
q. $20\ ha = 20 \cdot \underline{\qquad\qquad}\ m^2 = \underline{\qquad\qquad}\ m^2$
r. $0{,}7\ ha = 0{,}7 \cdot \underline{\qquad\qquad}\ m^2 = \underline{\qquad\qquad}\ m^2$
s. $12\ 315\ m^2 = 12\ 315 \div \underline{\qquad\qquad}\ ha = \underline{\qquad\qquad}\ ha$

1.2.– Indica los instrumentos de medida más adecuados para medir las siguientes longitudes:

a. La longitud de un bolígrafo.
b. El largo y el ancho de la clase.
c. El largo de la mesa de clase.
d. El contorno de la cintura de una persona.

1.3.– Indica las unidades que utilizarías para medir las siguientes longitudes:

a. La distancia entre Ávila y Salamanca.
b. El largo de tu clase.
c. El ancho de una goma de borrar.
d. El ancho de la uña del dedo meñique.

1.4.– Utiliza los instrumentos de medida adecuados y completa la siguiente tabla y colorea la que tú consideres que es la mejor unidad para cada medida:

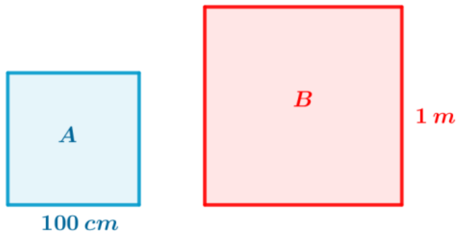
	Instrumento de medida	Metros	Decímetros	Centímetros	Milímetros
Largo de clase					
Ancho de clase					
Largo del pupitre					
Ancho del pupitre					
Tu altura					
Contorno de la cintura					
Longitud del lapicero					

1.5.- Haz un dibujo de tu mesa de clase y divídelo en cuadrados. Calcula su superficie.

1.6.- Indica cuáles crees que son las unidades adecuadas para medir las siguientes superficies:

a. La superficie de Castilla y León.
b. La superficie de una finca.
c. El área de la corona de un reloj de muñeca.
d. El área quemada en un incendio en el monte.
e. La superficie que ocupa una vivienda.
f. El área de la mesa de clase.

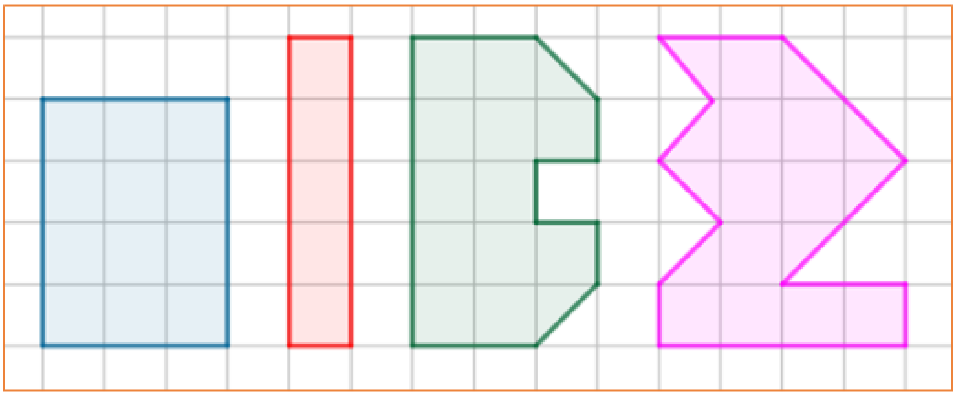
1.7.- Las siguientes imágenes muestran dos cuadrados A y B (no están dibujados a escala).



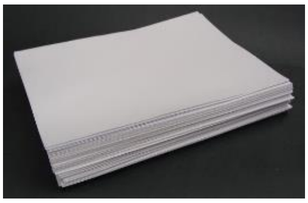
a. ¿Son los dos cuadrados iguales? ¿Por qué?
b. Si los dos cuadrados son iguales, ¿sus áreas también serán iguales?
c. Calcula el área del cuadrado A en cm^2 .
d. Calcula el área del cuadrado B en m^2.
e. Basándote en tus respuestas anteriores, ¿cuántos cm^2 serán un m^2?
f. Si queremos dividir el cuadrado B en cuadrados más pequeños de longitud 1 cm, ¿cuántos cuadrados necesitaremos? ¿por qué?

1.8. Si cada cuadrado gris de la imagen mide 1 cm^2.

Calcula la superficie de las cuatro figuras y expresa el resultado en centímetros cuadrados.



1.9.- Indica cuáles de las siguientes superficies podrían medir un metro cuadrado:


1.10.– (Incendio en Ávila) El verano del año 2021 fue catastrófico para la provincia de Ávila debido al enorme incendio que devastó la Sierra de la Paramera. Se admitieron 22000 *ha* quemadas.

a. ¿Puedes comparar esa cantidad de hectáreas con otra superficie? Vamos a hacerlo nosotros con campos de fútbol: El Estadio Santiago Bernabéu tiene una superficie de 105 x 68 *m*.

b. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el Santiago Bernabéu? ¿Cuántas hectáreas son?

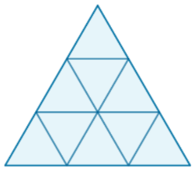
c. ¿Cuántos campos de fútbol se necesitan para formar las 22000 *ha*? ¿Se ajusta a lo que habías pensado al principio?

d. Según el siguiente artículo en España hay aproximadamente 12 900 campos de fútbol. ¿Qué porcentaje de los campos de fútbol españoles es la superficie quemada?

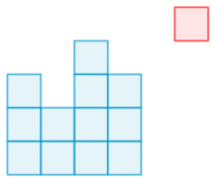
e. Teniendo en cuenta solo los campos de los 492 equipos de fútbol que juegan en las Categorías Nacionales (primera, segunda y las tres de la RFEF), ¿cuántos de estos habrían sobrevivido al incendio?

1.11.– Estima algunas medidas de tu entorno: Perímetro del Instituto, la parcela que ocupa el Instituto, la plaza de la ciudad donde resides, etc.

1.12.– En la siguiente imagen cada triángulo pequeño mide 1 *cm* de lado. Colorea algunos de sus triángulos de forma que queda una figura (única y sin agujeros) de 6 *cm* de perímetro. ¿Cuántas soluciones puedes encontrar?



1.13.– PERÍMETRO CONSTANTE. Observa la siguiente figura en la que los cuadrados pequeños miden 1 *cm* de lado.

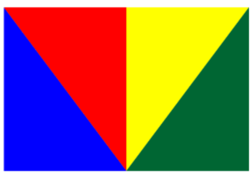


1. Mide el perímetro de la figura azul.
2. ¿Dónde puedes colocar el cuadrado rojo para que el perímetro no varíe?
3. ¿Qué otros perímetros distintos puedes conseguir colocando el cuadrado rojo en otros lados?

1.14.– RECTÁNGULOS ISOPERIMÉTRICOS. En una cuadrícula dibuja todos los rectángulos que tengan 16 unidades de perímetro y la medida de los lados sean números naturales.

1. ¿Cuántos has encontrado?
2. Escribe el área de cada uno de ellos.
3. De todos los rectángulos que has encontrado, ¿cuál es el que encierra el área máxima?

1.15.– TANGRAM DE MEDIAN. Construimos en clase el siguiente puzle formado por cuatro triángulos de distintos colores sobre un rectángulo 6x4.



¿Cuántos cuadriláteros simples (ningún par de aristas no consecutivas se cortan) y distintos podemos formar con las cuatro piezas? Constrúyelos y halla el perímetro y el área de cada uno de ellos.

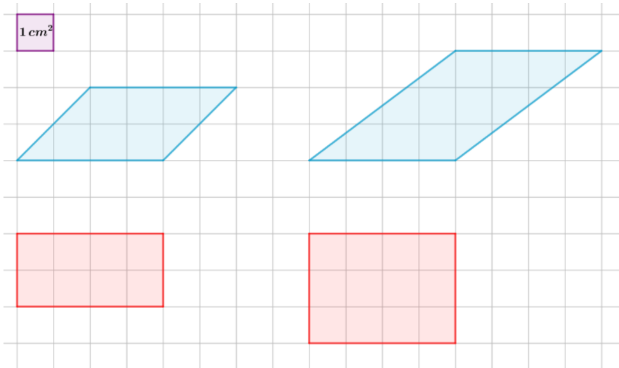
2. MIDIENDO POLÍGONOS

RETOS

A) Dado un cuadrado, dibuja otro cuadrado que tenga doble de área que el anterior.

B) Observa la siguiente imagen:

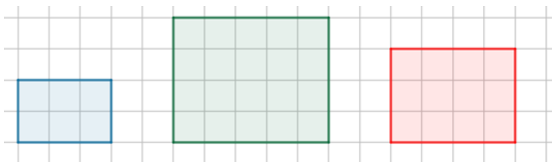
- ★ ¿Cuántos cuadraditos morados caben en cada uno de los cuatro cuadriláteros que ves en la imagen?
- ★ ¿Qué tienen en común los cuadriláteros azul y rojo que están uno sobre otro?
- ★ ¿Qué puedes deducir del área de un romboide (cuadriláteros azules)?



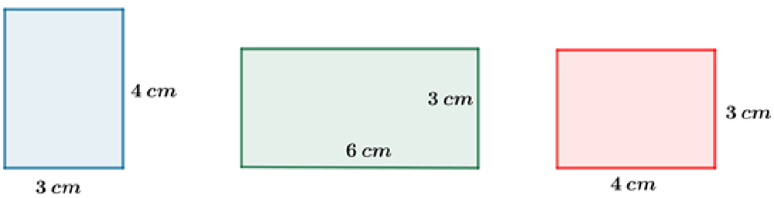
APRENDE Y APLICA

El objetivo de este apartado es buscar estrategias para calcular perímetros y áreas de polígonos. Empezaremos por cuadrados y rectángulos que son los más fáciles y de ahí iremos deduciendo cómo se puede calcular el resto. Recuerda lo que es el área o superficie y el perímetro de una figura y con qué unidades se mide (lo has visto en el apartado anterior). En tu cuaderno has de anotar de forma ordenada las estrategias y fórmulas que vamos a deducir.

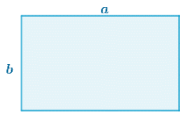
Área del rectángulo. Sabiendo que cada cuadrado representa 1 cm^2, indica cuál es el perímetro y el área de cada una de estas figuras. Represéntalas en tu cuaderno y escribe cuál es el perímetro y el área.



¡Hala! Nos ha desaparecido la cuadrícula. Ahora no podemos contar cuadraditos, pero aun así seguro que podemos hallar el área y el perímetro de las siguientes figuras:



Deduce las fórmulas del área y el perímetro de un rectángulo cuyos lados miden $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ unidades respectivamente y escríbelas en tu cuaderno:



Área:

Perímetro:

¿Podrías expresar el perímetro de otras formas?

Si sabemos que los lados de un rectángulo miden *a=5,1 m* y *b=3,2 m* puedes utilizar las fórmulas anteriores para calcular su área y perímetro.

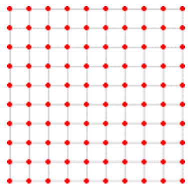
Observa que el cuadrado es como un rectángulo con las longitudes de los lados iguales. Deduce la fórmula del área y el perímetro de un cuadrado y escríbelas en tu cuaderno:

Área:

Perímetro:

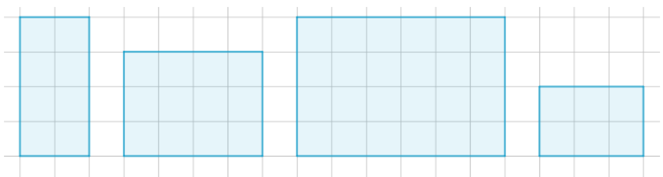
Relaciones entre los lados y el área:

Dado el siguiente geoplano 9 x 9 construye los cuadrados que te hagan falta para completar la siguiente tabla.



Lado	2 cm	5 cm	7 cm	$\sqrt{2}$ cm	$\sqrt{3}$ cm				
Área						36 cm^2	81 cm^2	5 cm^2	6 cm^2

Analiza los siguientes rectángulos y completa la tabla:



Lado		3 cm	5 cm	
Lado		6 cm	10 cm	
Área	120 cm^2			36 cm^2

A la vista de los resultados, ¿puedes completar la siguiente tabla con los datos que faltan?

Lado		3 cm	4 cm	4 cm
Lado	2 cm	6 cm	10 cm	
Área	6 cm^2			8 cm^2

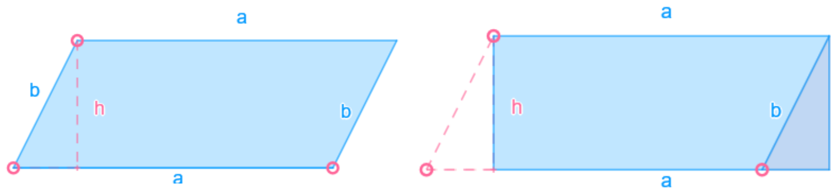
Explica:

a) ¿Cómo podemos calcular el área de un rectángulo del que conocemos los dos lados?¿Y de un cuadrado?

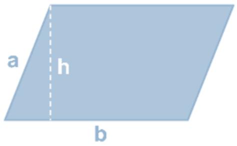
b) Si conocemos el área de un rectángulo y uno de sus lados, ¿podemos averiguar el valor del otro lado? ¿Cómo?

c) Conociendo únicamente el área de un rectángulo, ¿podemos saber cuánto miden sus lados?

Área del romboide



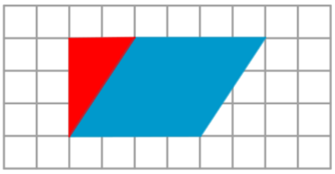
Deduce la fórmula del área de un romboide (puedes ir al vínculo de la demostración escaneando el código) y escríbelas en tu cuaderno.



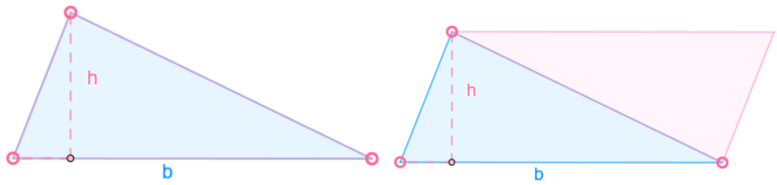
Área:

Perímetro:

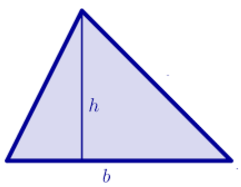
Recorta y pega. Observa la siguiente imagen. Recorta el triángulo rojo que puedes ver en la imagen anterior y colócalo girado a la derecha del romboide azul. ¿Qué figura se te ha formado ahora? Observa que tienes la misma cantidad de papel, por lo tanto, el área del romboide es igual que...



Área del triángulo



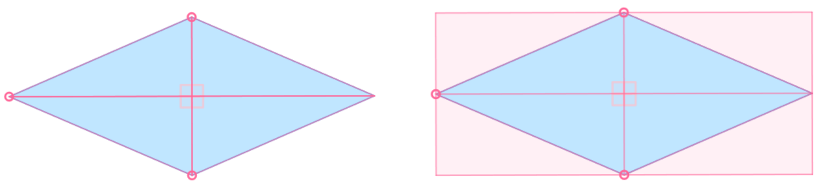
Deduce la fórmula del área de un triángulo (puedes ir al vínculo de la demostración escaneando el código) y escríbela en tu cuaderno.



Área:

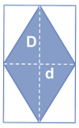
Perímetro:

Área del rombo



2. MIDIENDO POLÍGONOS

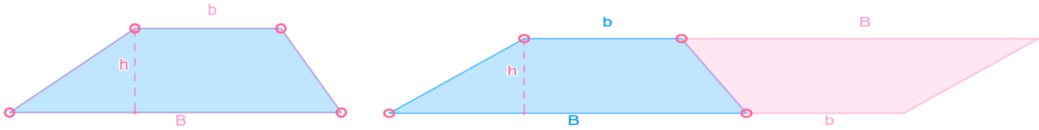
Deduce la fórmula del área de un rombo (puedes ir al vínculo de la demostración escaneando el código) y escríbela en tu cuaderno.



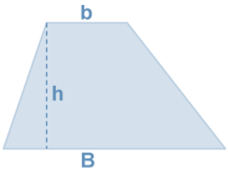
Área:

Perímetro:

Área del trapecio



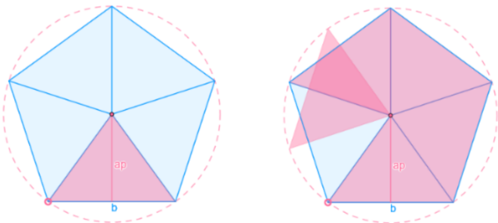
Deduce la fórmula del área de un trapecio (puedes ir al vínculo de la demostración pulsando en el código) y escríbela en tu cuaderno.



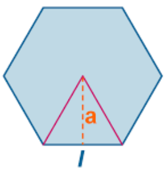
Área:

Perímetro:

Área de un polígono regular



Deduce la fórmula del área de un polígono regular (puedes ir al vínculo de la demostración pulsando en el código) y escríbela en tu cuaderno.



Área:

Perímetro:

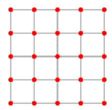
PRACTICA

2.1.– *Cuadriláteros con el geoplano.*

★ Encuentra cuadriláteros diferentes que pueden construirse en el geoplano. Anota su perímetro.

★ Dibuja cuadrados diferentes que se pueden hacer en un geoplano 4 x 4. Anota sus perímetros para comprobar que, efectivamente, son cuadrados diferentes.

★ Construye rectángulos diferentes que se puedan construir. Anota el perímetro y el área de cada uno de ellos.



★ ¿Cuántos rectángulos de perímetro 10 puedes construir?

2.2.– *Rectángulos con la misma área.*

★ ¿Cuántos rectángulos puedes dibujar con longitudes enteras y cuya área sea de 24 cm^2?

★ Si las longitudes de los lados pueden ser números decimales, ¿es posible encontrarperímetros impares?

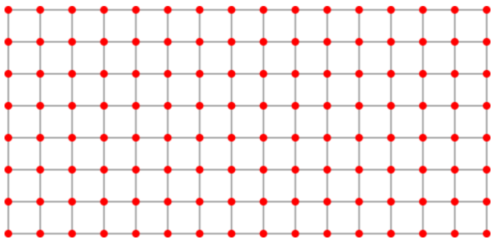
★ ¿Cuál es el perímetro más pequeño que puedes hacer con esa área?

★ ¿Y el más largo?

★ ¿Cuántos rectángulos con perímetros distintos podemos construir?

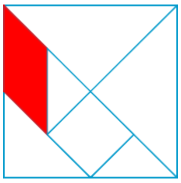
2.3.– *Figuras de área 2:*

Con el siguiente geoplano de trama cuadrada, construye todas las figuras distintas que tengan un área de 2 unidades cuadradas (tomando como unidad de medida el área del cuadrado determinado por la cuadrícula). ¿Cuántas figuras diferentes puedes construir?



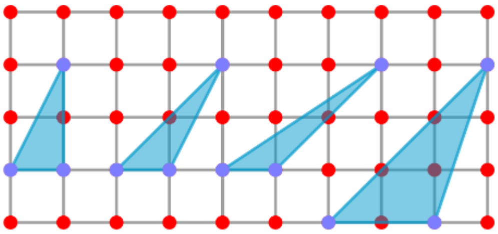
2.4.– *Tres romboides:* Dibuja tres romboides en un geoplano 5×5 y calcula su perímetro y su área.

2.5.– *Tangram.* Las siete piezas en este cuadrado $12\ cm \times 12\ cm$ forman un Tangram. ¿Cuál es el área del paralelogramo sombreado de rojo?



2.6.– *Triángulos y geoplano.* Observa los siguientes triángulos construidos sobre un geoplano:

Completa la siguiente tabla para cada triángulo:

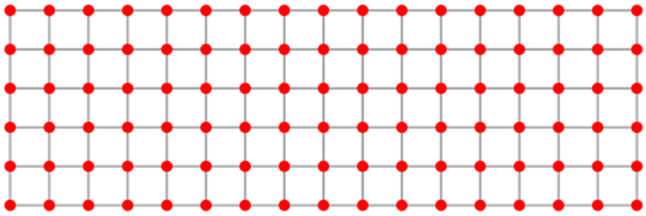


	BASE	ALTURA	ÁREA
TRIÁNGULO 1			
TRIÁNGULO 2			
TRIÁNGULO 3			
TRIÁNGULO 4			

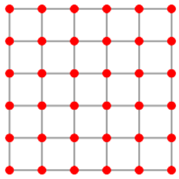
2.7.– Como has podido observar en el ejercicio anterior, base, altura y área están relacionados enun triángulo. Conociendo dos de ellos se puede calcular el tercero. Completa la siguiente tabla:

Base	2 cm		1,5 cm	
Altura	2,5 cm	3 cm		2 cm
Área		9 cm ^{2}	5 cm ^{2}	2 cm ^{2}

2.8.– ***Construyendo triángulos.*** Ahora te toca a ti construir triángulos. Construye varios triángulos distintos, cuya área sea de 4 u^2, en un geoplano como el de la figura.



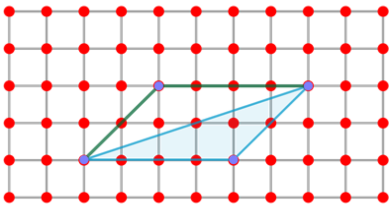
2.9.– ***Triángulos rectángulos.*** Dibuja todos los triángulos rectángulos distintos que se puedan hacer en un geoplano de 5x5.



Calcula el perímetro de cada uno de ellos.

2.10.– ***Triángulos y romboides.***

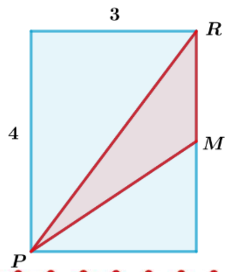
Dado un triángulo cualquiera siempre podemos construir un romboide como se puede ver en la siguiente imagen:



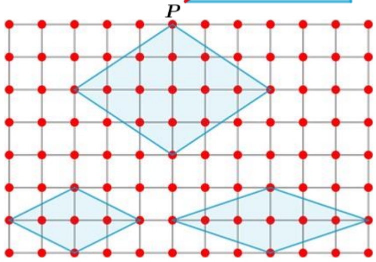
También podemos recortar dos triángulos iguales y superponerlos formando el romboide. Describe como hemos construido el romboide.

1. ¿Qué relación existe entre el área del romboide y del triángulo?
2. Escribe la fórmula que nos daba el área de un romboide.
3. Teniendo en cuenta lo anterior, ¿podrías escribir la fórmula del área de un triángulo cualquiera?

2.11.– Si M es el punto medio del lado del rectángulo de la figura, ¿cuál es el área, en unidades al cuadrado, del triángulo PMR?

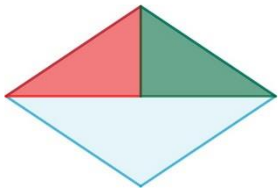


2.12.–***Rombos y geoplanos.***



Observa las siguientes figuras construidas sobre un geoplano. Justifica porqué estas tres figuras son rombos. Calcula su área.

2.13.–*Recorta y compara.* Observa el siguiente rombo:



a) Recorta los triángulos verde y rojo y colócalos debajo del rombo haciendo coincidir las hipotenusas con el lado del rombo.

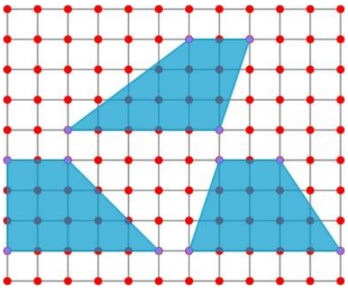
b) ¿Qué figuras has obtenido?

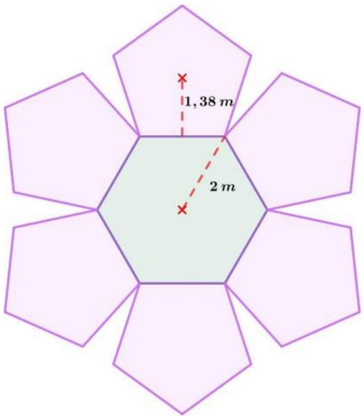
c) El área del rombo original y el área de la figura obtenida son iguales. ¿Serías capaz de deducir una fórmula para calcular el área del rombo?

2.14.–*Trapecios y romboides.* En este apartado hemos deducido la fórmula del área con dos trapecios iguales, ¿se te ocurre otras formas de deducir las fórmulas? Escríbelas.

2.15.–*Trapecios y geoplanos.* Descompón las siguientes figuras en cuadriláteros y triángulos y calcula su área.

Hazlo también con la fórmula.





2.16.–*Haciendo mosaicos.* Calcula el área y el perímetro del siguiente mosaico.

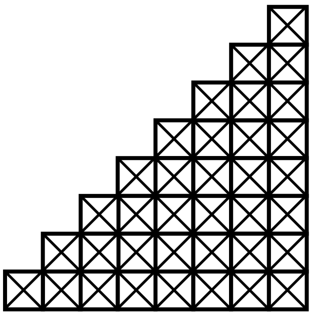
NOTA: Recuerda que el hexágono tiene una característica que lo hace único. El radio y el lado miden lo mismo.

3. Pitágoras y los Triángulos

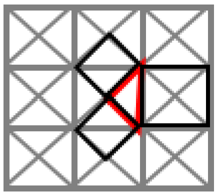
Retos

A) El botellero

Fíjate en este botellero. Es una trama con cuadrados y triángulos que podemos representar como la figura de al lado para trabajar con ella.



Resaltamos con otro color un triángulo rectángulo (hazlo mejor con uno que esté en el interior). Identifica los lados que forman el ángulo recto, llamados catetos, y la hipotenusa, que es el lado opuesto al ángulo recto. En cada uno de ellos, dibuja un cuadrado que tenga como lado en cada caso el cateto o la hipotenusa como hacemos en el ejemplo.



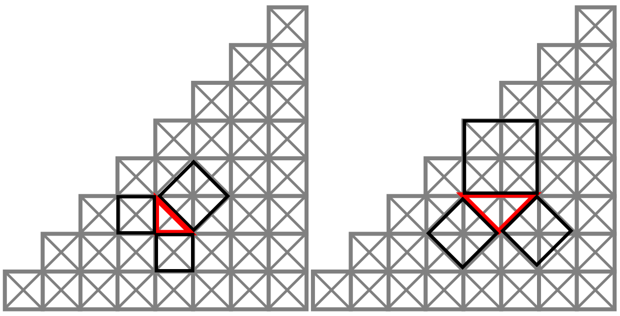
Estos cuadrados nos aparecen descompuestos en triángulos iguales. Rellena:

El área del cuadrado del cateto 1 tiene ___ triángulos iguales

El área del cuadrado del cateto 2 tiene ___ triángulos iguales

El área del cuadrado de la hipotenusa tiene ___ triángulos iguales

Repite la operación con otro triángulo rectángulo de distinta dimensión que encuentres en la representación. Te damos dos ejemplos más:



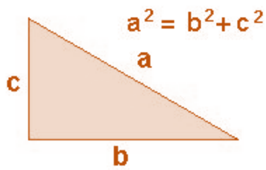
¿Ves alguna relación entre las áreas de los cuadrados que se obtienen en este proceso? ¿Te atreves a enunciar una "regla general"? Inténtalo

B) Para crear la siguiente estructura se construyen varillas de papel.
Si las más cortas (las horizontales y verticales) miden 10 cm, ¿cuánto deben medir las más largas (diagonales)?
Haz un dibujo de la situación y coloca las medidas conocidas y las desconocidas.

APRENDE Y APLICA

En el problema de las varillas se utiliza como modelo de la situación un triángulo rectángulo del que conocemos dos de los lados y desconocemos otro, por lo que necesitaríamos una relación entre los tres lados, los ***catetos,*** que son los que forman el ángulo recto, y la ***hipotenusa*** que es el lado opuesto a dicho ángulo). Esa relación ya la conocían los babilonios, según se puede observar en las tablillas donde escribían, pero sólo en casos muy concretos. Por ejemplo, en el triángulo cuyos lados miden 3, 4 (catetos) y 5 (hipotenusa) se cumple que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Se llaman ***ternas pitagóricas*** a los conjuntos de tres números *a, b y c*, (terna), que cumplen la relación $a^2 = b^2 + c^2$. Como puedes comprobar 3, 4 y 5 es una terna pitagórica. Pero ternas pitagóricas hay muchas más. ¿Nos valdría cualquier terna de números? Trabajando en grupo, intentad encontrar más conjuntos de tres números que verifiquen esa relación.

Lo que dice el ***teorema de Pitágoras***, que se llama así porque se dice que Pitágoras (o el grupo de los pitagóricos, no está muy claro) dio una demostración del mismo para todos los triángulos rectángulos, es que ***en un triángulo rectángulo los lados forman una terna pitagórica***, y también que ***si los lados de un triángulo forman una terna entonces el triángulo es rectángulo***.



En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Un triángulo es rectángulo si el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

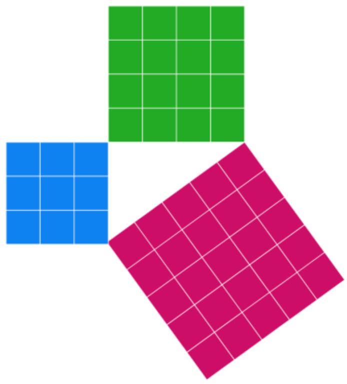
Para aplicar el teorema a situaciones reales y contextualizadas, la situación tiene que representarse con un triángulo rectángulo, así que hay que identificar ángulos rectos, catetos e hipotenusa, y así poder resolver las cuestiones que se nos planteen. Por ejemplo, en la situación de las varillas, los catetos miden 10 cm cada uno, por lo que la hipotenusa, que es lo que se desea conocer, mide:

$$a^2 = 10^2 + 10^2$$

$$a^2 = 100 + 100 = 200$$

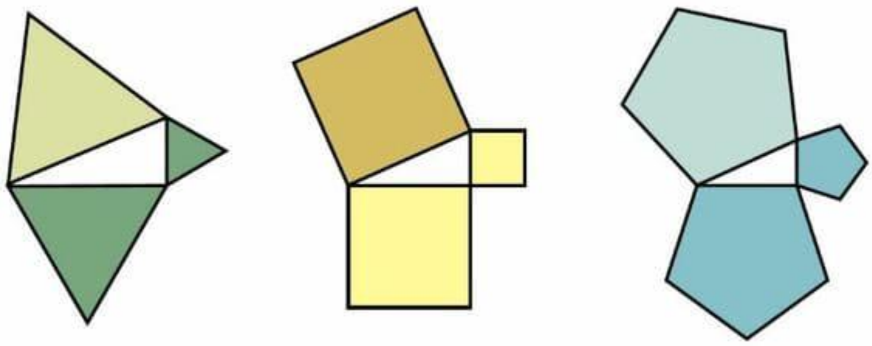
$$a = \sqrt{200} \approx 14{,}1 \text{ cm}$$

El Teorema de Pitágoras tiene también sus implicaciones geométricas. De hecho, las has comprobado en el primer reto. Nos habla de la relación entre las áreas de los cuadrados que se pueden construir en esos lados. El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos:

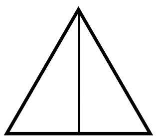


$$a^2 \quad = \quad b^2 \quad + \quad c^2$$

Pero también funciona para áreas de otras figuras:



PRACTICA



3.1.– Sabiendo que el triángulo es equilátero y cada lado mide 6 cm, halla su altura.

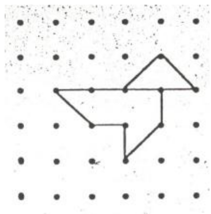
3.2.– Calcula el perímetro de los rombos del ejercicio 2.12.

3.3.– Una escalera se apoya sobre una pared vertical alcanzando una altura de 7m. Si la distancia horizontal entre la base de la escalera a la pared es de 1,80 m. ¿Cuál es la longitud de la escalera? Si el pie de la misma escalera estuviera a 2m, ¿qué altura alcanzaría?

3.4.– Construimos una ventana rectangular de 2 m de largo por 1,20 m de ancho. Para mantenerla mientras estamos construyendo la pared, queremos ponerle un travesaño diagonal que la refuerce. ¿Qué longitud debe tener dicho travesaño?

3.5.– En un geoplano rodea con un hilo una pajarita como la de la figura y mide dicho hilo.

Mide la distancia entre dos puntos consecutivos y, usando lo trabajado, comprueba si obtienes el mismo resultado.



3.6.– ***El portal:*** En el suelo de mi portal tengo este dibujo:

Los bordes de los rombos están desgastados y tengo que comprar una cinta negra fina para remarcarlos. Si el rectángulo mide 3,60 m de largo por 90 cm de alto, ¿cuánta cinta necesito?

3.7.– ***El logo:*** Esta punta de flecha es el logotipo de una marca de coches.

Si la queremos hacer con varitas de metal, calcula la longitud total de las mismas si el lado del cuadrado exterior mide 20 centímetros (el contorno pasa por el centro del cuadrado).

3.8.– ***El botellero:*** En el botellero que hemos visto, (fíjate en la imagen del reto) si el lado de un cuadradito mide 80 cm, ¿cuánto mide la diagonal? ¿Y si el área fuera 0,81 m^2?

Intenta resolver esto último sin hallar el lado del cuadradito.

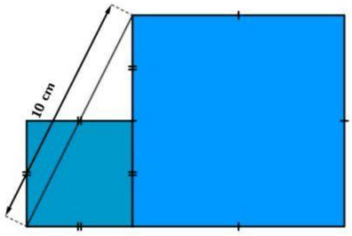
3.9.–*El velero:* En la imagen puedes ver mi barco de vela:

Necesito comprar una vela nueva. Como puedes ver tiene forma de triángulo rectángulo y sé que la parte que va sujeta al mástil mide 5 metros. Si necesito reforzar la tela en los lados de la vela y ésta debe tener un área de 30 metros al cuadrado, ¿serías capaz de hallar cuanto mide el refuerzo que necesito?

3.10.–*La baldosa:* Observa los cuadrados que hay dibujados en el suelo del parque situado en las cercanías de la iglesia de San Esteban de Salamanca.

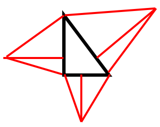
En cada dibujo hay tres cuadrados inscritos uno dentro del otro. Si el cuadrado mayor tiene de lado 1,20 m, ¿cuánto mide el área del cuadrado pequeño?

3.11.– En la figura adjunta, ¿podrías calcular el área del cuadrado de la derecha?

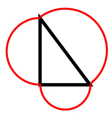


3.12.–*Ampliación:* Investiga y deduce. Construye un triángulo rectángulo. Vamos a trabajar con él. En cada uno de sus lados haz lo siguiente:

a) Dibuja un triángulo que tenga ese lado por base y por altura la longitud del lado. Como sabemos la base y la altura de cada uno de los triángulos que hemos dibujado, podemos hallar su área. ¿Se verifica la relación que hemos visto cuando en cada lado construimos un cuadrado? Intenta buscar una justificación.



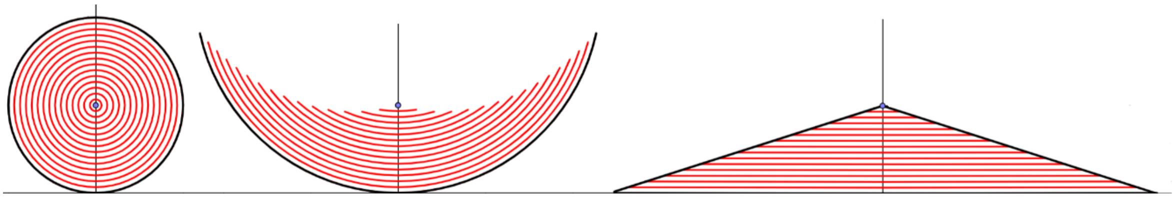
b) Dibuja un semicírculo con centro en punto medio y que pase por los extremos del lado. Como sabemos el radio del semicírculo podemos hallar su área. ¿Se verifica la relación que hemos visto cuando en cada lado construimos un cuadrado? Intenta buscar una justificación.



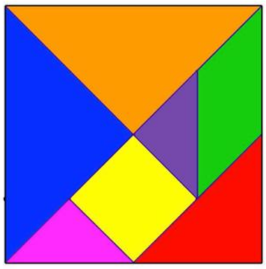
4. MIDIENDO OTRAS FIGURAS

RETOS

A) Observa la siguiente secuencia, describe lo que ves, ¿podrías relacionar el área de un círculo con la de un triángulo?, ¿qué dimensiones tendría el triángulo?

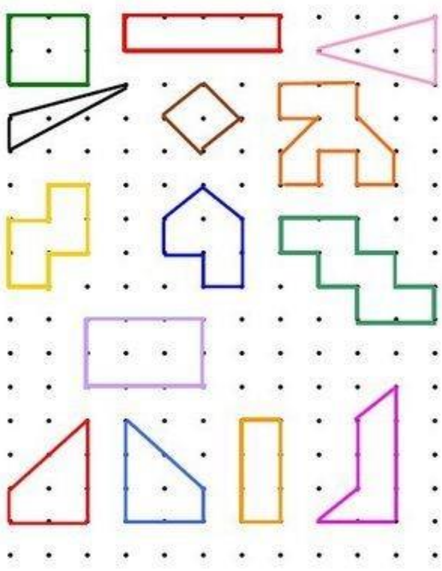


B) Trabajando en grupo crea una figura utilizando todas las piezas del tangram.



- ★ ¿Cuál es el área de la figura construida?
- ★ ¿Coincide el área de todas las figuras?
- ★ ¿Cuál era el área del tangram en su posición original de cuadrado?
- ★ ¿Cuál es el perímetro de la figura construida?
- ★ ¿Coincide el perímetro de todas las figuras?
- ★ A qué conclusión llegas. ¿Por qué?

C) Construye las siguientes figuras con la ayuda del geoplano y luego halla su área y su perímetro.



APRENDE Y APLICA

Ahora que ya sabes calcular distancias, perímetros y áreas de algunas figuras poligonales vamos a estudiar las áreas y perímetros de otras figuras, algunas circulares (círculo y sus partes) y otras que se pueden descomponer en figuras conocidas.

En el tema de razones y proporciones viste que hay una razón muy famosa, la que existe entre la longitud de una circunferencia, que el es perímetro del círculo, y su diámetro. Esa razón es igual a un número que ya has utilizado antes. ***El número π (pi) es la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.*** Es un número con infinitas cifras decimales que no se repiten nunca de forma periódica (no hay un grupo de cifras que se repita siempre: ***π = 3,14159…***

De la definición del número pi y del hecho de que un diámetro mide lo mismo que dos radios, se deduce que ***la longitud de la circunferencia de radio r es $L = 2 \cdot \pi \cdot r$.***

En el primer reto has podido comparar el área del círculo con el de un triángulo de base igual a la longitud de la circunferencia y altura igual al radio del círculo (puedes ver la animación escaneando el código). Así, como el área del triángulo es la mitad del producto de la base por la altura, se obtiene que ***el área del círculo de radio r es $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot r : 2 = \cdot \pi \cdot r^2$.***

La fórmula se puede utilizar cuando se conoce un dato y falta otro, tanto si es el radio como si el perímetro o el área. Observa que debido a que π tiene muchos decimales el resultado final es una aproximación (un redondeo). Observa también que para encontrar un factor que falta hay que dividir. Por ejemplo:

a) Calcula la longitud y el área si el radio es 10 *cm*.

$$L = 2 \cdot \pi \cdot 10 \approx \pi \cdot 20 \approx 63\ cm \qquad A = \pi \cdot 10^2 = \pi \cdot 100 \approx 314\ cm^2$$

b) Calcula el radio si la longitud es de 10 *m*.

$$10 = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow r = 10 : (2 \cdot \pi) \approx 1{,}6\ cm$$

c) Calcula el radio si el área es de 10 m^2.

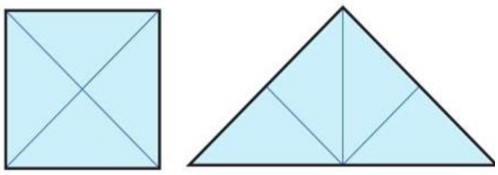
$$10 = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = 10 : \pi \approx 3{,}2 \Rightarrow r \approx \sqrt{3{,}2} \approx 1{,}8$$

De cada circunferencia podemos calcular su longitud y el área encerrada. Vamos a ver qué ocurre al duplicar o triplicar el radio. Completa la tabla y responde a las preguntas:

	Longitud de la circunferencia	Área del círculo
Radio 5 cm		
Radio 10 cm		
Radio 15 cm		

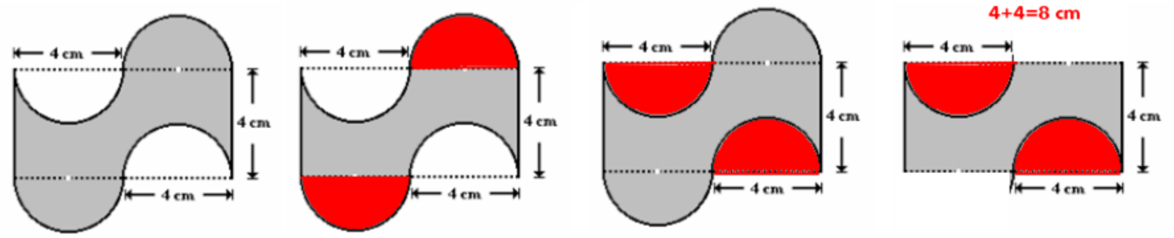
Teniendo en cuenta los datos obtenidos responde: ¿Al ser el radio doble tiene doble longitud? ¿y al ser el triple? ¿Al ser el radio doble tiene doble área? ¿y al ser el triple?

Para el cálculo de áreas es interesante considerar ***figuras equivalentes***, que son aquellas que tienen el mismo área, aunque tengan distinta forma, como por ejemplo el cuadrado y el triángulo siguientes, formados ambos por cuatro triángulos iguales (que pueden servir como unidad de medida), son dos figuras diferentes, pero tienen el mismo área. De hecho, se podría formar una a partir de la otra recortando y recolocando las distintas partes.

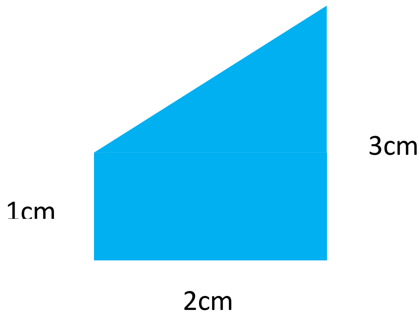


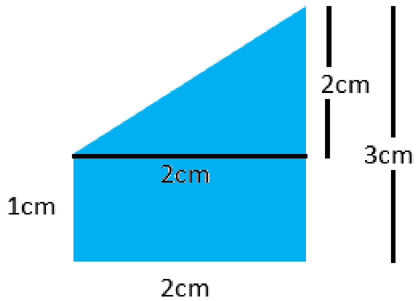
Imagínate que las figuras siguientes representan dos campos cubiertos de hierba. ¿Tiene el campo A la misma cantidad de hierba que el campo B? Pues si dividimos el rectángulo del campo B a la mitad por la línea de puntos y colocamos uno sobre otro haciendo coincidir los lados largos obtenemos el A, por lo que la cantidad de hierba es la misma, ambos campos son equivalentes.

Observa cómo la figura original se convierte en un rectángulo, descomponiendo y recolocando las piezas, eso significa que son equivalentes y calcular el área de una equivale a calcular el área de la otra:



Para calcular el área de alguans figuras es útil ***descomponerlas en figuras conocidas*** (triángulos, paralelogramos, polígonos, circunferencias …) ***y sumar las áreas***. Por ejemplo, para calcular el área de la siguiente figura se puede descomponer la figura en un rectángulo de medidas 1 cm x 2 cm y en un triángulo de base 2 cm y altura 2 cm (3 cm – 1 cm). La superficie total será la suma de ambas superficies.





Calculamos el área del rectángulo:

$$Superficie\ rectángulo\ = 2 \cdot 1 = 2cm^2$$

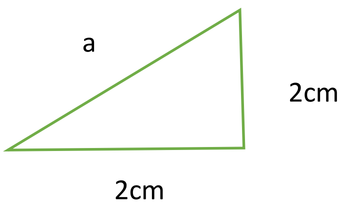
Calculemos ahora el área del triángulo:

$$Superficie\ triángulo = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2cm^2$$

Por tanto, el área total será la suma de ambas, 4 cm^2.

Para calcular el perímetro, sin embargo, no tiene sentido sumar los perímetros de ambas figuras pues al unirlas comparten un lado que deja de pertenecer al borde de la figura total. En este caso sumamos las medidas de los lados. Como se conoce la medida de tres de sus cuatro lados, sólo faltaría calcular la medida del cuarto lado, que resulta ser la hipotenusa del triángulo rectángulo, así que utilizaremos el teorema de Pitágoras para calcular el lado que falta:

$$a^2 = 2^2 + 2^2$$
$$a^2 = 4 + 4$$
$$a^2 = 8$$
$$a = \sqrt{8} = 2{,}83\ cm$$

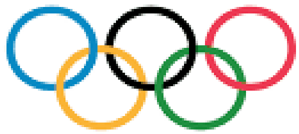


Por tanto, tendríamos: $\text{Perímetro} = 1 + 2 + 3 + 2{,}83 = 8{,}83\ \text{cm}$

A veces, para calcular el área de una figura en lugar de sumar áreas hay que restarlas. Eso ocurre cuando una figura se forma eliminando una parte de otra figura. Por ejemplo, una corona circular está formada por el espacio comprendido entre dos círculos concéntricos, por lo que su área se puede calcular restando al área del círculo mayor el área del menor.

PRACTICA

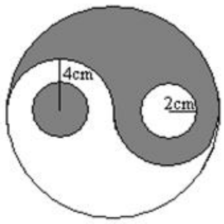
4.1.– ¿Qué longitud de tubo sería necesario para construir los aros olímpicos de la figura, sabiendo que tienen 50 cm de diámetro?

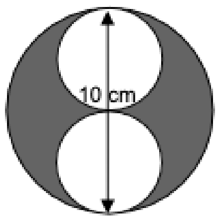


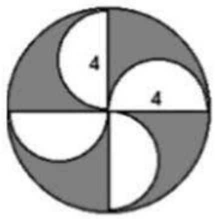
4.2.– La rueda de un camión tiene 1 m de radio. ¿Cuánto ha recorrido el camión cuando la rueda ha dado 100 vueltas?

4.3.– En un parque de forma circular de 70 m de radio hay situada en el centro una fuente, también de forma circular, de 5 m de radio. Dibuja en tu cuaderno el parque y la fuente y calcula el área de la zona de paseo.

4.4.– Calcula el área sombreada de las siguientes figuras:

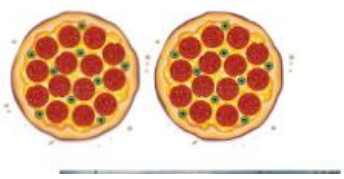






4.5.– Las pizzas de la Pizzería Venecia cuestan, la mediana 8’95€ y la familiar 14’95€, las medianas miden 30cm de diámetro y las familiares 38cm de diámetro.

Lucas y su familia están en duda sobre si coger una familiar o dos medianas.



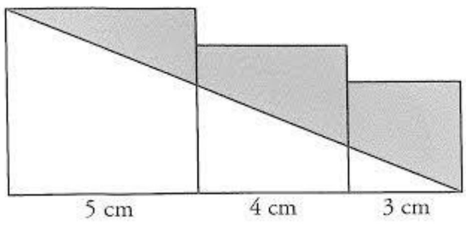
a) Su madre dice que no le gustan los bordes, y que quiere la opción que tenga menos borde. ¿Cuál es?

b) Su padre prefiere comer más cantidad de pizza (más área). ¿Qué opción eligen?

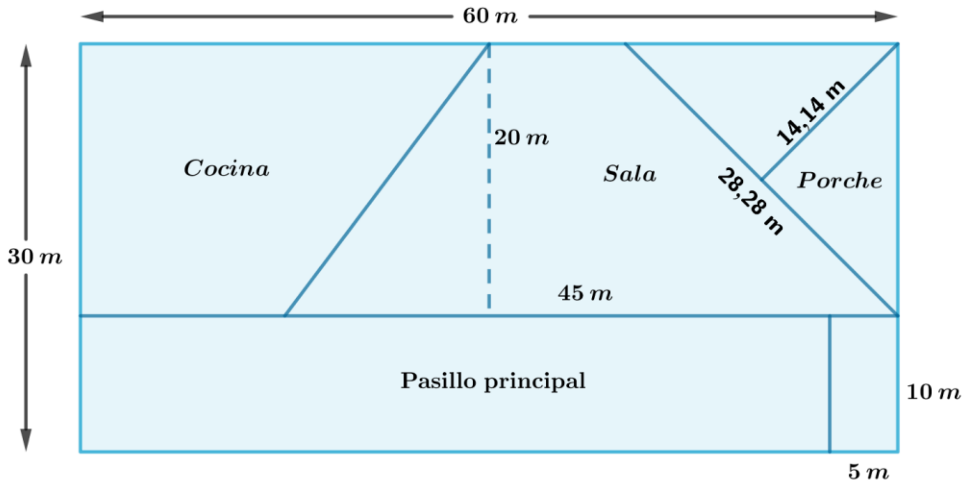
c) Sin embargo, su hermana mayor que es la que invita, dice que mejor la más barata. ¿Cuál es esa opción?

4.6.– Disponemos de tres cuadrados de lados 3, 4 y 5 cm como en la figura adjunta.

Halla el área de la parte sombreada.



4.7.– Calcula la superficie de todas las habitaciones de la casa cuyo plano se adjunta:



4.8.– Estoy trabajando en una empresa de fabricación de señales de tráfico y el trabajo de hoy consiste en cortar las pegatinas para forrar las siguientes señales

Para realizar el trabajo dispongo de los siguientes datos:

- El diámetro de las señales redondas es de 90 cm.
- En la señal de dirección prohibida las medidas del rectángulo son 50 cm x 10 cm.
- En la señal de prohibido aparcar la anchura de la franja roja de alrededor es de 9cm, y la interior 4 cm.
- La cuadrada es de 60 cm x 6 0cm, el rectángulo blanco vertical mide 25 cm de largo y 8 de ancho, la medida del rectángulo rojo es 20 cm x 10 cm y tiene un borde blanco alrededor de 1cm de ancho (tanto el rectángulo rojo, como la señal completa).

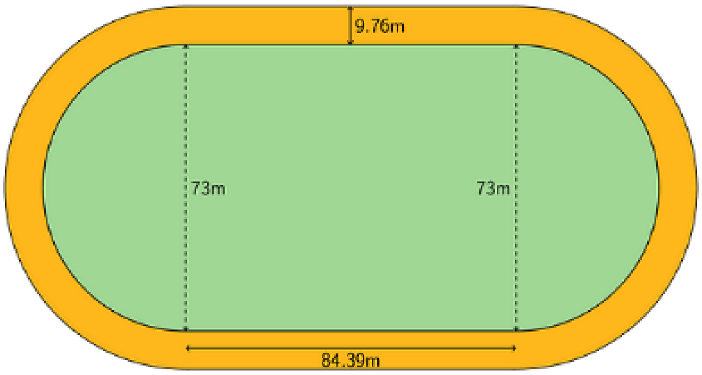
Calcula la cantidad de material adhesivo blanco, rojo y azul que voy a necesitar.

4.9.– Una ventana normanda es una ventana como la de la figura formada por un rectángulo coronado con un semicírculo.

Si tenemos una ventana normanda de 1 m de ancho y 2 m de alto (en total) y otra de 1’5 m de ancho y 1’75 de alto, ¿por cuál entra más luz?

4.10.– Reto final:

El alcalde del pueblo de cara a las próximas elecciones quiere construir unas pistas de atletismo al aire libre para fomentar el ocio saludable de los jóvenes. El arquitecto municipal diseña el siguiente plano:



La parte exterior dispondrá de diez calles de tartán rojo (16€/m^2) y la parte interior será de césped artificial, que se comercializa en rollos de 5 m^2 al precio de 79,99€ el rollo.

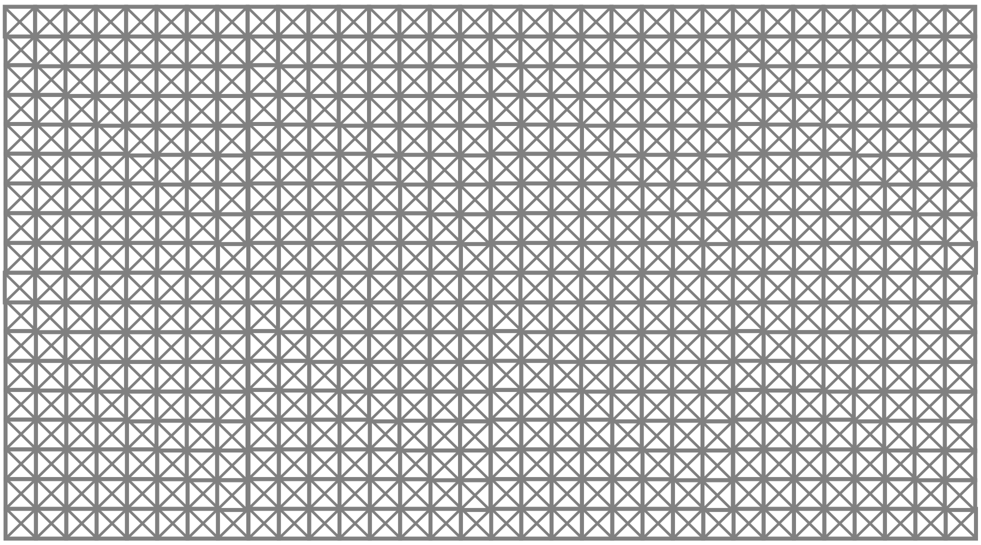
- ¿Cuántos metros cuadrados de tartán rojo vamos a necesitar? ¿Y de césped artificial?
- ¿Cuánto costará la obra?
- ¿Qué distancia recorre un corredor en cada vuelta?

Si observas el dibujo verás que el corredor de calle exterior recorre más distancia que el corredor de la calle interior.

- Calcula ambas distancias. ¿Qué te sugiere?
- Haz un esquema de las posiciones de salida en la prueba de 40 metros lisos.
- ¿Servirían las instalaciones para practicar lanzamiento de martillo? Justifica tú respuesta.

LA VERJA

Fíjate en la verja de esta foto. Aparece una trama muy parecida a la que hemos usado en el botellero. Trabajando en grupo, intentad encontrar triángulos de distintas dimensiones en los que, repitiendo el procedimiento que hemos seguido para el botellero, podamos comprobar si también se verifica la relación anterior. Para trabajar más cómodamente tenéis trama dibujada que podéis utilizar.



LA MANIFESTACIÓN

Cuando se lleva a cabo una manifestación se producen datos dispares sobre el número de participantes en la misma. Vamos a intentar encontrar un método que me permita estimar el número de participantes.

a. ¿Cuántas personas caben en un metro cuadrado? Estando muy, muy apretados, oque haya algo de distancia entre ellos. Realiza el experimento dibujando en el suelo un cuadrado de lado 1 m y situando dentro varios compañeros.

b. Utiliza Google Maps o Internet para conocer la superficie de la Plaza Mayor de tu ciudad.

c. Estima el número de asistentes a una manifestación en la Plaza Mayor teniendo en cuenta varios escenarios:

    i. La Plaza abarrotada y muy pegados unos con otros.
    ii. La Plaza llena, pero se puede caminar entre las personas con holgura.
    iii. La Plaza está a medio gas.

d. Compara los resultados obtenidos con los de otros grupos

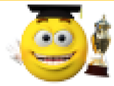
DIBUJA LAS IDEAS PRINCIPALES DEL TEMA:

- ✓ Medir es comparar. Necesitamos un patrón de medida para hacerlo (unidad de medida).
- ✓ El Sistema Internacional de Medida (SI) da esas unidades y sus relaciones para distintas magnitudes.
- ✓ Las magnitudes que vamos a medir son longitudes y superficies. Debemos manejarnos con las distintas unidades.
- ✓ Estimar es dar un valor aproximado de una medida sin hacerla.
- ✓ Idea algebraica del Teorema de Pitágoras: Si los lados de un triángulo verifican la relación $a^2=b^2+c^2$, el triángulo es rectángulo.
- ✓ Idea geométrica del Teorema de Pitágoras: Si construimos un cuadrado en cada lado de un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos es igual al área del cuadrado construido en la hipotenusa.
- ✓ Esa relación no solo se cumple al construir cuadrados.

EVALÚA Y AFIANZA

AUTOEVALUACIÓN

Llegados al final del tema reflexiona sobre lo que has aprendido. Marca en la siguiente tabla lo que corresponde a cada frase, haz la autoevaluación y revisa de nuevo la tabla.

¿CÓMO LO HAGO?	 Me cuesta hacerlo	 Estoy aprendiendo	 Lo hago bien	 Soy un experto
Medir por comparación con un patrón				
Utilizar las distintas unidades de medida y cambiar de unas a otras				
Estimar				
Distinguir entre perímetro y área (longitud y superficie)				
Calcular el área de un rectángulo dados sus lados				
Calcular el perímetro de un rectángulo dados sus lados				
Expresar el perímetro de un rectángulo de al menos dos formas distintas				
Calcular el área de un cuadrado dado su lado				
Calcular el perímetro de un cuadrado dado su lado				
Calcular el lado de un cuadrado dado su área				
Conocer la fórmula para calcular el área de un romboide				
Distinguir entre base y altura de un triángulo				
Conocer el área del rombo.				
Conocer el área de un trapecio				
Conocer la fórmula para calcular el área de un polígono regular.				
Aplicar el Teorema de Pitágoras en distintas situaciones				
Calcular el área y el perímetro de un triángulo calculando la altura si fuera necesario.				
Calcular el área y el perímetro de un rombo calculando una de las diagonales si fuera necesario.				

¿CÓMO LO HAGO?	Me cuesta hacerlo	Estoy aprendiendo	Lo hago bien	Soy un experto
Calcular áreas y perímetros de trapecios calculando los elementos que sean necesarios.				
Calcular áreas y perímetros de polígonos regulares calculando los elementos que sean necesarios.				
Conocer la fórmula de la longitud de la circunferencia				
Conocer la fórmula del área del círculo				
Distinguir entre longitud de la circunferencia y el área del círculo.				
Descomponer figuras compuestas en figuras elementales para calcular áreas y perímetros.				
Completar figuras compuestas para calcular sus áreas y perímetros.				
Identificar en un problema los datos conocidos y los datos que hay que hallar				
Distinguir en el problema qué herramienta matemática se necesita				
Utilizar procedimientos adecuados a los datos del problema				
Explicar la solución de los ejercicios y problemas				
Comprobar la solución del problema				
Trabajar en grupo para resolver problemas				
Aprender de mis errores				
Enfrentar un reto o tarea con ganas y motivación				
Esforzarme para hacer bien las tareas				

AUTOEVALUACIÓN

A1. Mi padre tiene una finca entre Ávila y Salamanca en forma rectangular que de largo mide 100 metros y de ancho 50.

PREGUNTAS

1. ¿Cuál es la superficie de la finca?
2. Expresa el resultado anterior en hectáreas.
3. Mi padre quiere vallar la finca, ¿cuántos metros de alambrada tiene que comprar en la ferretería?
4. Si cada metro de alambrada le cuesta 2,3€, ¿cuánto le costará cercar la finca?
5. Si quiere construirse una casa de 250 m^2, un huerto que tenga 0,1 hm^2 y una piscina de 0,6 dam^2 de superficie, ¿cuánto terreno le queda libre de la finca?

A2. Completa la siguiente tabla:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2	
10	0	78	25	0	0	0	m^2
0	0	22	90	15	0	0	m^2
0	80	0	35	0	0	0	m^2
0	0	0	35	20	15	0	dm^2
0	0	0	0	14	85	31	cm^2
							30 265 412 m^2
							12 301,65 cm^2

A3. Se tiene que embaldosar el patio interior con baldosas cuadradas de 30 cm de lado. El patio es rectangular y sus medidas son 10 m por 12 m. ¿Cuántas baldosas se necesitarán?

A4. En un terreno rectangular de 30 por 12 metros se construyen cuatro fuentes circulares, como se muestra en la figura, y se planta césped en el terreno restante.

PREGUNTAS

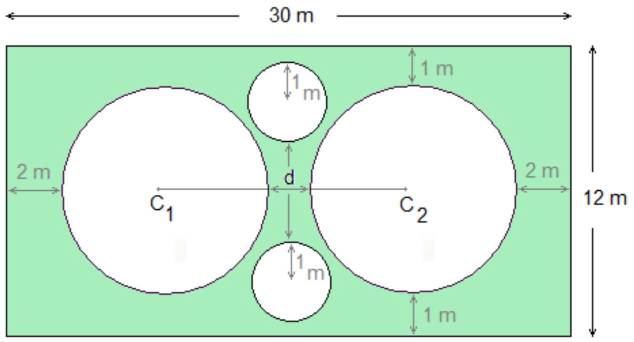
A. ¿Qué superficie ocupa el césped?

B. ¿Qué distancia hay entre en los centros de las dos fuentes grandes?

C. ¿Qué distancia hay entre en los centros de las dos fuentes pequeñas, si la distancia del borde del terreno al borde de la fuente es de medio metro?

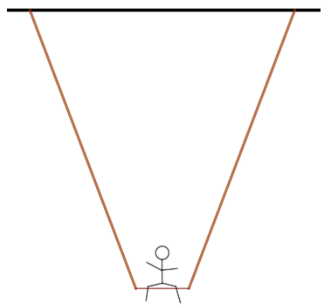
D. ¿Qué distancia de separación queda entre las fuentes grandes?

E. ¿Y entre las fuentes pequeñas?



A5. Un acróbata de circo quiere construir un trapecio para hacer su número.

Para ello consta de 20 m de cuerda que debe dividir en dos y una barra de 1 m. El trapecio irá anclado al techo en dos puntos que distan 2 m el uno del otro.



PREGUNTAS

A. Indica sobre el esquema anterior las medidas de cada lado del trapecio. ¿Cuánto debe medir cada una de las partes en las que se divide la cuerda para que la barra quede como se indica?

B. Calcula la distancia de la barra al techo.

C. Sabiendo que la distancia del techo al suelo es de 12 m, ¿a qué distancia del suelo quedará suspendido el acróbata una vez se suba a la barra?

AUTOEVALUACIÓN

SOLUCIÓN A1: A) 5000 m^2 B) 0,5 ha C) 300 m D) 690 € E) 3690 m^2

SOLUCIÓN A2:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2		
10	0	78	25	0	0	0	1007825	m^2
0	0	22	90	15	0	0	2290,15	m^2
0	80	0	35	0	0	0	800035	m^2
0	0	0	35	20	15	0	3520,15	dm^2
0	0	0	0	14	85	31	1485,31	cm^2
30	26	54	12	0	0	0	30 265 412	m^2
0	0	0	12	30	1	65	12 301,65	cm^2

SOLUCIÓN A3: Necesita 1334 baldosas.

SOLUCIÓN A4: A) 360-52π $m^2 \approx$ 196,63 m^2 B) 16 m C) 9 m D) 6 m E) 7 m

SOLUCIÓN A4: A) 10 m B) 9,98 m C) 2,02 m

SEMEJANZA

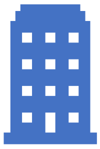
ÍNDICE

PROBLEMAS QUE VAMOS A RESOLVER

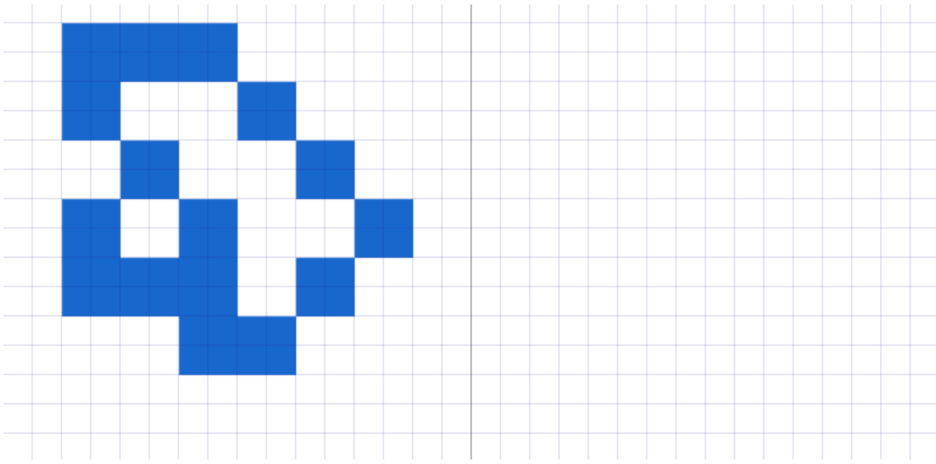
1.– Haz un dibujo para representar la situación de los problema, colocando los datos conocidos y los desconocidos.

a) Si un árbol proyecta una sombra de 21'60 m a la misma hora que una persona de 1'42 m proyecta una sombra de 2'20 m, ¿se podría saber cuál es la altura del árbol?

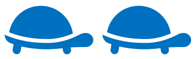
b) ¿Cómo determinarías la altura de un edificio con ayuda de un espejo situado a 10 m del edificio si se ve la parte alta reflejada en el espejo cuando nos alejamos 1 m del mismo y la altura de nuestros ojos es de 1'5 m

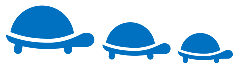


2.– Repite el siguiente dibujo con la mitad de tamaño sin que se deforme.

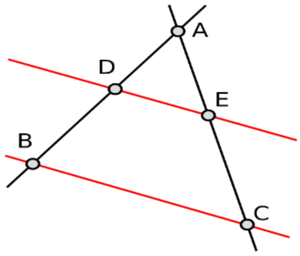


¿QUÉ SABES DE ...?





VEO	PIENSO	ME PREGUNTO



VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

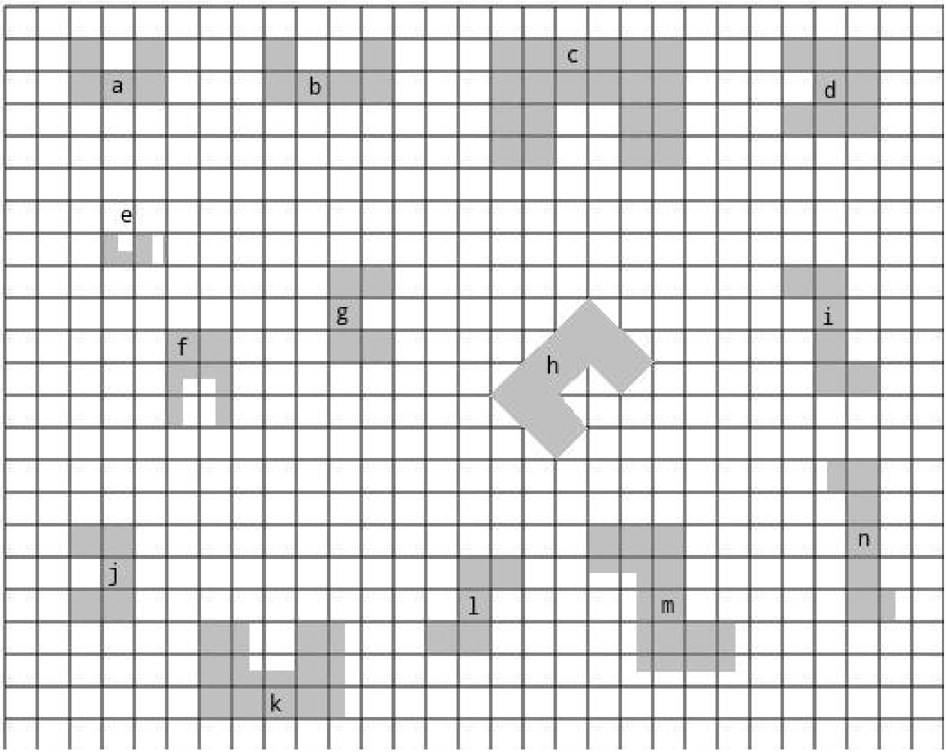
1 : 3 000 000 000

VEO	PIENSO	ME PREGUNTO

1. ¿IGUALES O SEMEJANTES?

RETOS

A) Señala cuál de las siguientes figuras son iguales (tienen la misma forma y el mismo tamaño) y qué figuras son semejantes (tienen la misma forma y distinto tamaño):

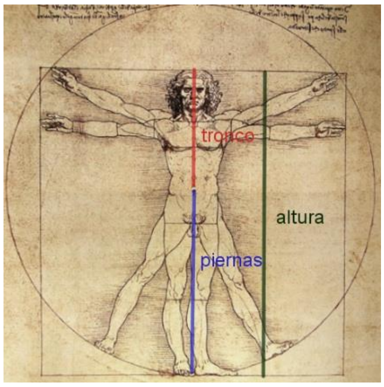


B) Escoge tres figuras semejantes y mide sus lados (toma como unidad un cuadradito), ¿qué observas?

APRENDE Y APLICA

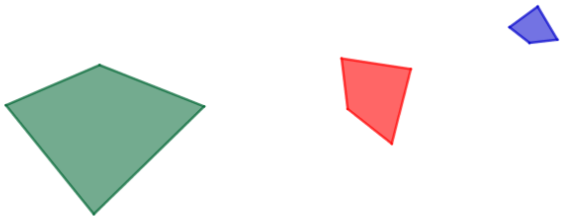
Razones y proporciones. Recuerda que en el tema de proporcionalidad has aprendido a comparar magnitudes mediante sus razones o cociente entre cantidades. En este momento puedes comparar longitudes, las de los lados de las figuras y formar con ellas una razón. También puedes ver si dos razones forman una proporción.

Por ejemplo, en "El hombre de Vitrubio" de Leonardo Da Vinci se cumple que la razón que forman la altura y las piernas (de los pies al ombligo) es la misma que la que forman las piernas con el tronco (del ombligo a la cabeza), lo cual era símbolo de belleza. ¿Eres tú como el hombre de Vitrubio?

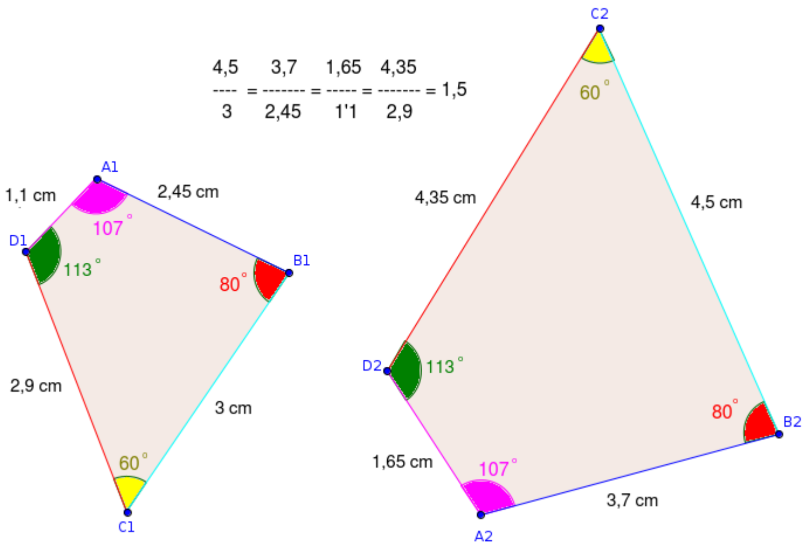


$$\frac{piernas}{altura} = \frac{tronco}{piernas}$$

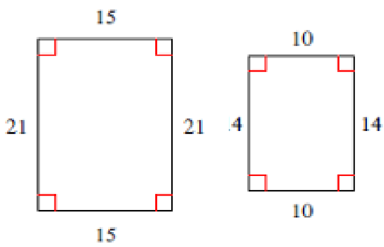
Semejanza. Dos figuras geométricas son iguales si tienen la misma forma y tamaño y semejantes si tienen la misma forma, pero distinto tamaño (una es el resultado de agrandar o reducir la otra sin deformarla). Por ejemplo, las figuras siguientes son todas semejantes, aunque pueda parecer que no por la posición que tienen.



Semejanza de polígonos. Para que dos polígonos sean semejantes los ángulos tienen que ser iguales y los lados correspondientes a esos ángulos tienen que ser proporcionales (forman una proporción).



Por ejemplo:

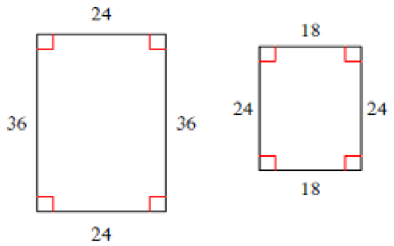


Como son dos rectángulos todos los ángulos son iguales (todos son de 90°). Veamos si los lados correspondientes están en proporción.

La razón entre los lados pequeños de ambos rectángulos es $\frac{10}{15}$ o, simplificando, $\frac{2}{3}$. La razón entre los lados más grandes es $\frac{14}{21}$, es decir, $\frac{2}{3}$. Por tanto: $\frac{10}{15} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$. Los lados correspondientes están en proporción.

Así, los rectángulos son semejantes y la razón de semejanza entre los lados del pequeño y del grande es 2/3 o de 2:3.

Veamos otro ejemplo:

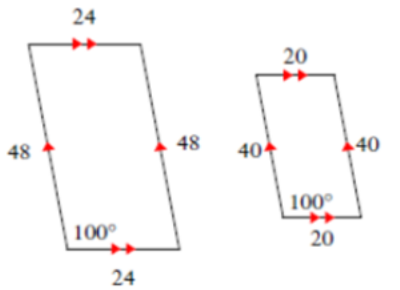


En este caso, ¿ocurre que $\frac{18}{24} = \frac{24}{36}$? Simplificamos cada fracción:

$$\frac{18}{24} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

Por tanto $\frac{18}{24} \neq \frac{24}{36}$. Estos rectángulos no son semejantes.

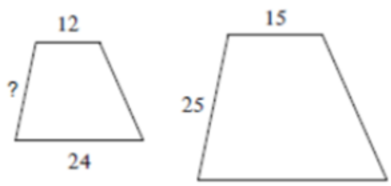
En el siguiente ejemplo tenemos dos paralelogramos. En este caso, los dos paralelogramos tienen ángulos iguales (si tienen uno tienen todos, ¿sabes por qué?) y si calculamos la razón entre lados correspondientes del grande respecto del pequeño:



$\frac{24}{20} = \frac{48}{40}$ ya que ambas fracciones son equivalentes a $\frac{6}{5}$.

Son polígonos semejantes y la razón de semejanza del grande respecto al pequeño es de 6:5.

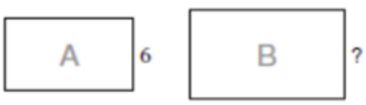
Cálculo de un lado en polígonos semejantes. Cuando dos polígonos son semejantes se pueden calcular medidas de lados de uno de ellos si se conocen las del otro, precisamente por ser proporcionales. Por ejemplo,



Si son semejantes, sus lados están en proporción y la razón de semejanza del pequeño respecto del grande es $\frac{12}{15}$, es decir, $\frac{4}{5}$ o de 4:5. Por tanto, el lado que falta será:

$$\frac{4}{5} \text{ de } 25 = \frac{4}{5} \cdot 25 = 20$$

En el siguiente ejemplo, la razón de semejanza de B a A es 7:2.

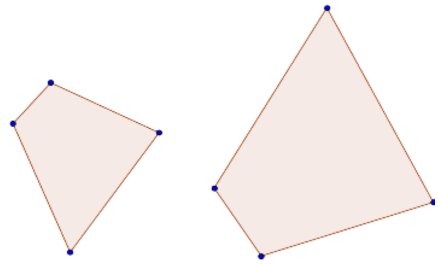


Por tanto, el lado desconocido será:

$$\frac{7}{2} \text{ de } 6 = \frac{7}{2} \cdot 6 = 21.$$

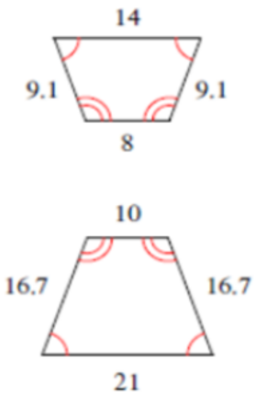
PRACTICA

1.1.- Comprueba que las siguientes figuras son semejantes. Mide los ángulos y los lados en ambos polígonos. Dibuja con el mismo color los lados correspondientes. Calcula la razón de semejanza del polígono grande con respecto al pequeño.

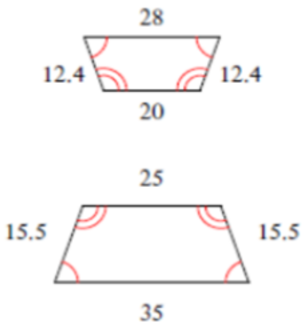


1.2.- Estudia si los polígonos en cada caso son semejantes. Cuando lo sean, encuentra la razón de semejanza del pequeño respecto del grande.

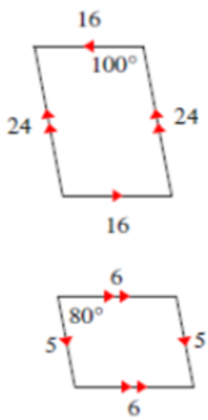
A)



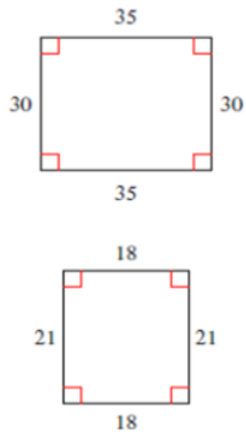
B)



C)

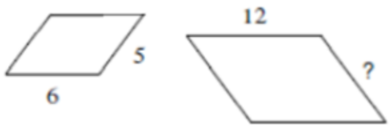


D)

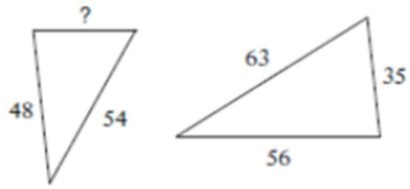


1.3.- Los polígonos de cada pareja son semejantes. Encuentra el lado que falta.

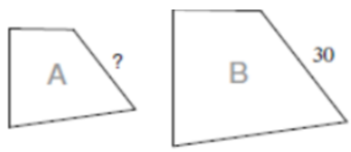
A)



B)



C)



D)

Razón de semejanza de A a B = 5 : 6

Razón de semejanza de A a B = 1 : 7

1.4.- El Formato DINA:

Corta una hoja DINA4 en dos partes iguales (obtienes un DINA5), corta una de las dos partes en otras dos partes iguales (DINA6) y una vez más repite el proceso (DINA7). Comprueba que los rectángulos que forman son todos ellos semejantes (son rectángulos semejantes cuyo área es la mitad del anterior)

2. Triángulos Semejantes

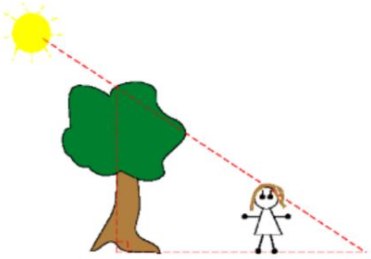
RETOS

A) Los extremos de las sombras de Sara y del árbol coinciden. Sara se encuentra a 3 m de la base del árbol y su sombra mide 1,8 m. ¿Cuál es la altura del árbol si Sara mide 1,5 m?

Escribe sobre el dibujo los datos que aparecen en el problema y el dato desconocido que se pide encontrar.

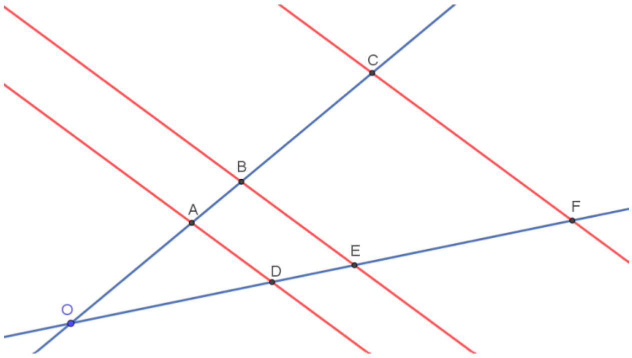
¿Puedes ver dos triángulos?¿Son semejantes?

¿Podrías encontrar la altura del árbol?



B) Observa la figura. ¿Cómo son entre sí las rectas de color rojo?

Mide con una regla los segmentos que determinan las rectas rojas sobre las azules, es decir, los segmentos OA, AB, BC, AD, BE, CF, OD, DE y EF y escribe sus medidas sobre el dibujo.



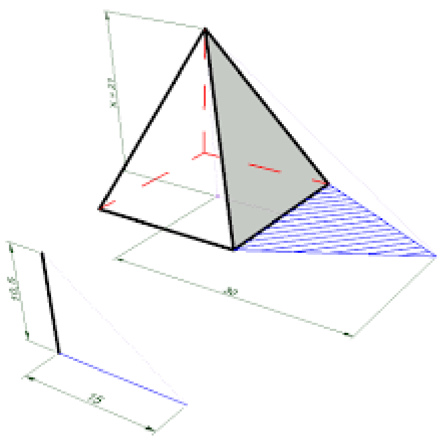
Calcula los cocientes siguientes (redondea a las centésimas):

$\frac{OA}{OD} =$ $\quad \frac{AB}{DE} =$ $\quad \frac{BC}{EF} =$ $\quad \frac{OB}{OE} =$ $\quad \frac{OC}{OF} =$ $\quad \frac{AD}{BE} =$

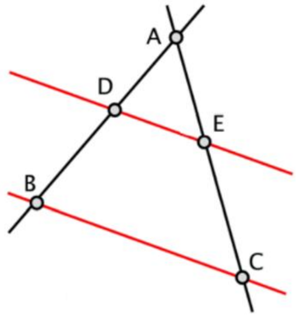
¿Qué observas?

APRENDE Y APLICA

Tales de Mileto (620-546 AC) fue un filósofo, matemático y astrónomo griego, considerado uno de los Siete Sabios de la Antigua Grecia. Busca en Internet una leyenda sobre el viaje que hizo a Egipto y entenderás el dibujo.



Existen diferentes resultados geométricos que llevan su nombre. Uno de los más conocidos es el que ahora vamos a estudiar como el teorema de Tales.

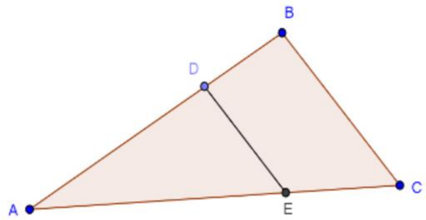


"Si dos rectas no paralelas se cortan por rectas paralelas, los segmentos obtenidos en la primera son proporcionales a los correspondientes segmentos obtenidos en la segunda".

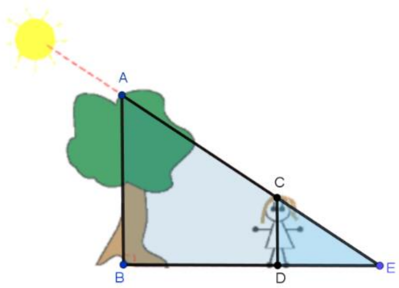
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{EC}}$$

Utilizando el resultado anterior se puede demostrar que "Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado". Dos triángulos así colocados comparten un ángulo y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos, se dice que están en ***posición de Tales***.

Los triángulos ADE y ABC son semejantes, están en posición de Tales (el ángulo A es común y los lados DE y BC, opuestos a A, son paralelos).



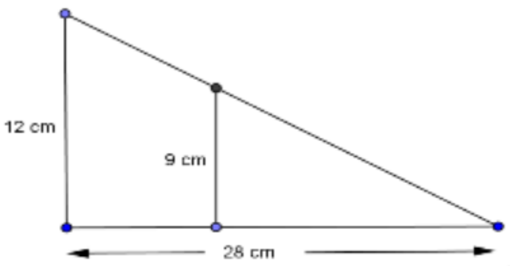
Cálculo de lados en triángulos semejantes. El resultado anterior se puede usar para resolver problemas como el de Sara (reto A) :



La línea CD es paralela al lado AB del triángulo grande. Por tanto, los triángulos ABE y CDE son semejantes.

$$\frac{a}{1{,}5} = \frac{4{,}8}{1{,}8} \qquad a = \frac{1{,}5 \cdot 4{,}8}{1{,}8} = 4 \text{ m}$$

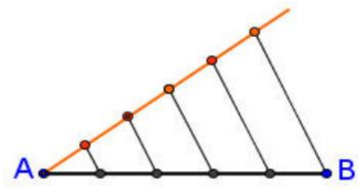
La altura del árbol es de 4 metros.



En el ejemplo de la figura los triángulos son rectángulos y comparten un ángulo. Por lo tanto, su tercer ángulo también es igual porque la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. Son triángulos en posición de Tales. Triángulos semejantes. La razón de semejanza es $\frac{9}{12}$ o $\frac{3}{4}$. Esto significa que los lados del triángulo pequeño son ¾ de los del grande.

La base del triángulo grande es 28 cm, así que la base del pequeño es $\frac{3}{4} \cdot 28 = 21 \text{ cm}$

Una aplicación del teorema de Tales nos permite dividir un segmento en partes iguales. Por ejemplo, el segmento AB se ha divido en cinco partes iguales:



Trazamos una semirrecta a partir de A. Sobre ella marcamos, con el compás, 5 segmentos iguales, de la longitud que queramos. Unimos la última marca con B y trazamos paralelas, una por cada marca de la semirrecta

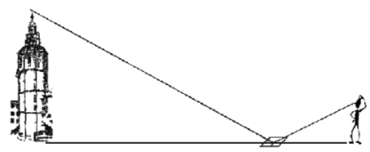
PRACTICA

2.1.- Un árbol de 8 metros de altura proyecta una sombra de 4 metros de largo.

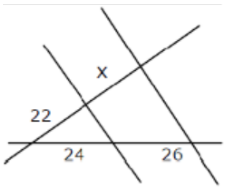
Bernardo mide 1,80 metros de altura. ¿Qué longitud alcanza la sombra de Bernardo en el mismo momento del día? (Haz un dibujo y aplica lo que has aprendido para resolverlo)

2.2.- Si un árbol proyecta una sombra de 21'60 m a la misma hora que una persona de 1'42 m proyecta una sombra de 2'20 m, ¿cuál es la altura del árbol?

2.3.- ¿Cómo determinarías la altura de un edificio con ayuda de un espejo situado a 10 m del edificio si se ve la parte alta reflejada en el espejo cuando nos alejamos 1 m del mismo y la altura de nuestros ojos es de 1'5 m?

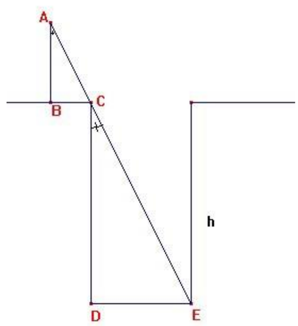


2.4.- Calcula x:



2.5.- Dibuja un segmento AB. Divide el segmento AB en siete partes iguales utilizando el teorema de Tales (usando regla y compás). Después, comprueba midiendo con la regla cada parte.

2.6.- Para calcular la profundidad de un pozo, hasta no hace mucho tiempo, se utilizaba una vara de un metro de largo que se apoyaba en el suelo y se iba separando del borde del pozo hasta que se veía el extremo del fondo. Si te has separado a 75 cm del borde, ¿cuál será la profundidad del pozo de 1,5 m de diámetro?



2.7.- Una escalera de 10 m está apoyada contra la pared. Su pie está a 1,6 m de la base de la misma. ¿Cuánto dista de la pared el escalón situado a 2,4 m de altura?

3. ESCALAS

RETOS

A) Utiliza la regla o una cinta métrica y mide los lados de tu mesa. Anota el largo y el ancho:

Ahora dibuja en este espacio un rectángulo que represente tu mesa, es decir, que sea un rectángulo semejante (misma forma, pero distinto tamaño).

¿Qué razón de semejanza has utilizado para reducir las dimensiones del rectángulo original?

B) Observa este plano y mide las distancias entre los puntos A y B.

¿Qué significa la información que aparece en el extremo inferior del dibujo: ESCALA 1: 400 000?

¿Sabrías calcular la distancia que hay entre A y B en la realidad?

APRENDE Y APLICA

Escala: Es la relación matemática entre las dimensiones reales de algo y las dimensiones de su representación o reproducción.

Las escalas que se utilizan en mapas se llaman <u>escalas cartográficas</u>.

Hay tres tipos de escalas según la relación de la reproducción con lo que representa:

- ***Escala natural***: Si la representación tiene el tamaño real.
- ***Escala de reducción***: Si el tamaño de la representación es reducido. Es la que se utiliza en mapas, planos y maquetas.
- ***Escala de ampliación***: Si el tamaño de la representación es ampliado. Se utiliza para piezas pequeñas como tornillos, células, etc.

Formas de expresar la escala:

- ***Escala Numérica:*** se expresa como ***1: e*** si es de reducción y significa que 1 unidad en la representación equivale a e unidades en la realidad. Por ejemplo, 1:100 se puede interpretar como 1 cm del plano representa 100 cm (1 metro) de la realidad, la realidad es 100 veces más grande. Se puede tomar la unidad que se desee, pero la misma en el objeto y su representación. Si la escala es de ampliación se escribe de la forma ***e:1*** significa que e unidades en la representación son 1 unidad de la realidad. Por ejemplo, un tornillo representado a 50:1 significa que 50 mm de la representación equivalen a 1 mm de tornillo.

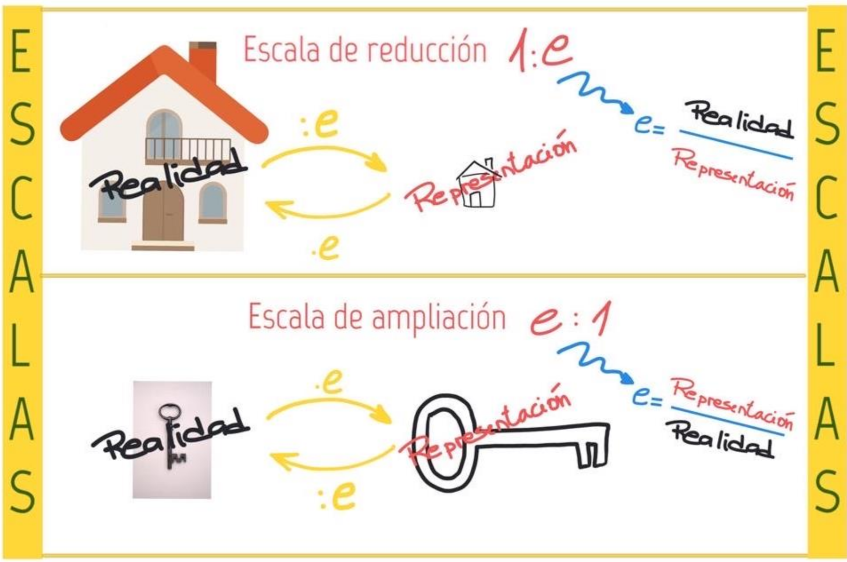
- ***Escala Gráfica:*** Se representa mediante un segmento dividido en partes. Lo que mide cada parte equivale a lo que se indica en la escala. En el ejemplo cada trozo representa un km.

- ***Escala Unidad:*** **1cm : 3km** significa que 1 cm del plano equivalen a 3 km en la realidad.

Por ejemplo, para escribir la escala 1cm : 1 m en forma de razón numérica, hay que tener en cuenta que 1 m es igual a 100 cm y, por tanto, 1 cm : 1 m es equivalente a 1 cm : 100 cm. Como las unidades son las mismas podemos prescindir de ellas y poner 1:100.

La escala 5 mm : 1 m equivale a 5 mm : 1000 mm, y dividiendo entre 5 y prescindiendo de las unidades se tiene una escala 1 : 200.

Problemas de escalas. Hay tres tipos de problemas de escalas, los que nos piden la medida de la representación dada la medida del objeto real y la escala, los que nos piden la medida del objeto real dada la de la representación y la escala y los que nos piden la escala dadas las medidas del objeto real y su representación. En el esquema siguiente se resume la forma de resolverlos.



ESCALAS DE REDUCCIÓN:

Cálculo de la medida real: en el problema del reto B, una distancia en el plano de 4 cm (medida de la representación) equivale a:

$$4 \cdot 400\,000 = 1\,600\,000 \text{ cm} = 16 \text{ km (medida real).}$$

Cálculo de la medida de la representación: Si un campo de fútbol mide 180 metros de largo (medida real) y dibujamos un plano del campo a escala 1 : 5000, la longitud del campo en el plano (medida de la representación) se obtiene dividiendo entre la escala, aunque conviene previamente expresar la distancia real en las unidades del plano (180 metros = 18000 cm)

$$\frac{18000}{5000} = 3{,}6\ cm$$

Por tanto, el plano del campo de fútbol tendrá 3, 6 cm de largo.

Cálculo de la escala: Para saber a qué escala están dibujados los planos de una casa donde una habitación de 4 m x 3,6 m mide en el plano 20 mm x 18 mm, hay que escribir todas las medidas en la misma unidad y dividir las medidas reales entre las medidas del plano:

Medidas reales: 400 cm x 360 cm. Medidas en el plano: 2 cm x 1,8 cm.

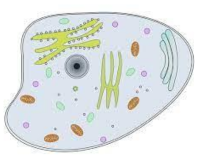
$$\frac{400}{2} = 200\ y\ \frac{360}{1{,}8} = 200$$

La escala del plano es 1 : 200.

ESCALAS DE AMPLIACIÓN:

Cálculo de la medida real: en una fotografía de una pompa de jabón se ha utilizado una escala 5:1. Si en la fotografía la pompa mide 10 cm de diámetro, ¿cuánto mide en la realidad?

10 cm / 5 = 2 cm mide en la realidad.



Cálculo de la medida de la representación: una célula que mide 0,02 mm de longitud se representa utilizando una escala 5000:1, ¿cuánto medirá en la representación? En este caso hay que multiplicar por 5000 la longitud real obteniendo 100 mm = 10 cm para la representación.

Cálculo de la escala: Para saber a qué escala están dibujados los planos de una pieza donde una distancia de 3 mm mide en el plano 30 cm, hay que escribir todas las medidas en la misma unidad y dividir las medidas del plano entre las medidas reales:

Medidas reales: 3 mm Medidas en el plano: 30 cm = 300 mm

$\frac{300}{3} = 100$ La escala es 100 : 1.

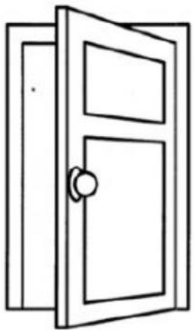
PRACTICA

3.1.– La altura de una farola es de 8 m y quiero dibujarla a escala 1 : 100. ¿Cuántos centímetros tendré que trazar en el plano?

¿Crees que el dibujo de esta farola está a la misma escala?

3.2.– ¿A qué escala estará dibujado el plano del instituto, si sabemos que la puerta principal de entrada tiene de ancho 3,40 m y en el plano hemos medido con la regla 68 mm?

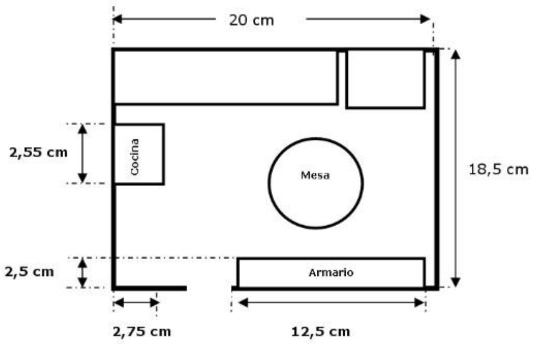
3.3.–¿Crees que este dibujo está hecho a esa escala?



3.4.– En un plano de carreteras realizado a escala 1:50.000, la distancia entre dos ciudades, medida con una regla graduada es de 45 mm ¿Cuál será la distancia real expresada en kilómetros?

3.5.– Calcula las medidas reales de la habitación del plano, de la cocina y del armario.

La escala es 1:20.



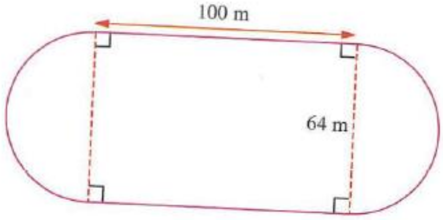
3.6.– Un mapa tiene por escala 3 cm : 18 km. Si las ciudades Bellavista y Campohermoso están a una distancia de 54 km, ¿a qué distancia están en el mapa?

3.7.– Queremos dibujar a una escala de ampliación la aguja de un reloj que mide 1 cm. Si elegimos una escala 5:1, ¿cuánto medirá su representación en el dibujo?

3.8.– El diagrama representa el patio de una escuela.

Dibuja un plano del mismo usando una escala de

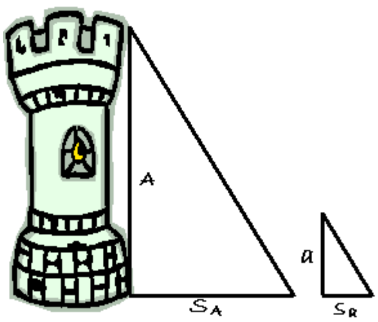
1cm : 20 m



3.9.– Queremos dibujar a una escala de ampliación la aguja de un reloj que mide 1 cm. Si elegimos una escala 5:1, ¿cuánto medirá su representación en el dibujo?

EL TOPÓGRAFO

A. BUSCAMOS TRIÁNGULOS SEMEJANTES CON LA SOMBRA

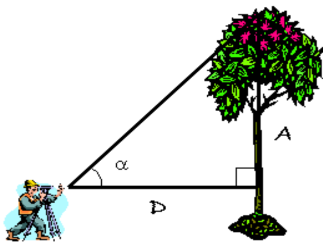


Medimos el las sombras S_A y s_a y la altura a.

Necesitamos un objeto o persona cuya altura conozcamos bien, a. Lo que vamos a medir y el objeto, con sus sombras, S_A y s_a, forman triángulos semejantes (porque ____________), con lo que hay una relación entre sus lados. Si se miden las sombras y la altura del objeto se puede calcular la altura de la casa.

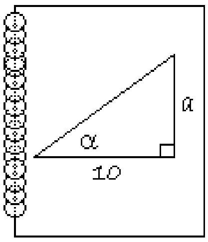
$$\frac{A}{S_A} = \frac{a}{s_a} \Rightarrow A \cdot s_a = a \cdot S_A$$

B. BUSCAMOS SEMEJANZA DIBUJANDO EN EL CUADERNO



Medimos el ángulo a y la distancia D.

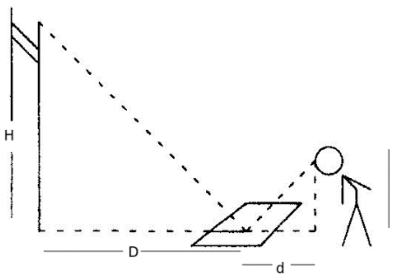
Hay que tener en cuenta la altura del teodolito para sumársela a A.



Con regla y transportador de ángulos, dibujamos en el cuaderno un triángulo rectángulo semejante al real con una base de 10 cm (se puede poner cualquier otra) y medimos la altura, a, con una regla.

Se cumple: $\frac{A}{D} = \frac{a}{10} \Rightarrow A \cdot 10 = a \cdot D$

C. BUSCAMOS SEMEJANZA CON UN ESPEJO

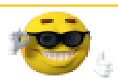
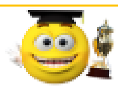


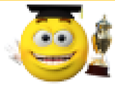
Se trata de medir la altura H de un edificio con ayuda de un espejo y una cinta métrica. Para ello colocamos el espejo en el suelo, entre el edificio y el observador, de forma que éste, en posición erguida, pueda ver la parte más alta del edificio reflejada en el espejo. Medimos la altura del observador, h , la distancia de la base del edificio al espejo, D, y la distancia del espejo al pie del observador, d. Los triángulos que se forman son semejantes porque _______________ y por ello se tiene que h/d=H/D, de donde se puede calcular H.

DIBUJA LAS IDEAS PRINCIPALES DEL TEMA:

- ✓ Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma, pero distinto tamaño. Una de ellas se obtiene a partir de la otra por ampliación o por reducción sin deformar.
- ✓ Una razón entre dos segmentos es el cociente entre sus longitudes. Una proporción es una igualdad entre dos razones.
- ✓ Dos polígonos son semejantes si tienen los mismos ángulos y los lados correspondientes son proporcionales.
- ✓ El teorema de Tales asegura que, si dos rectas no paralelas se cortan por rectas paralelas, los segmentos obtenidos en la primera son proporcionales a los correspondientes segmentos obtenidos en la segunda
- ✓ Si en un triángulo se traza una línea paralela a uno de sus lados, se obtiene un triángulo más pequeño, semejante al original. A los dos triángulos así obtenidos, se les llama triángulos en posición de Tales.
- ✓ Una escala es la relación matemática que existe entre las dimensiones de un objeto en la realidad y el tamaño de su representación o reproducción.

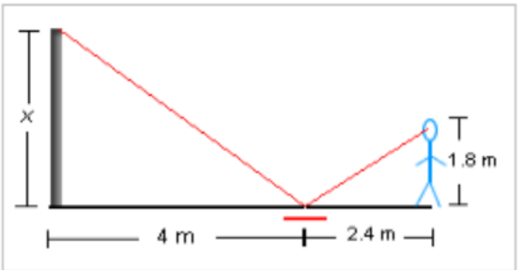
Llegados al final del tema reflexiona sobre lo que has aprendido. Marca en la siguiente tabla lo que corresponde a cada frase, haz la autoevaluación y revisa de nuevo la tabla.

¿CÓMO LO HAGO?	 Me cuesta hacerlo	 Estoy aprendiendo	 Lo hago bien	 Soy un experto
Sé distinguir figuras semejantes de las que no lo son				
Sé comprobar cuándo dos polígonos son semejantes				
Sé comprobar cuándo dos triángulos están en posición de Tales.				
Utilizo semejanza de triángulos para resolver problemas.				
Sé utilizar la escala de reducción para obtener la medida del objeto real.				
Sé utilizar la escala de reducción para obtener la medida del objeto representado.				
Sé calcular la escala de reducción cuando tengo las medidas de los objetos reales y los representados.				
Sé utilizar la escala de ampliación para obtener la medida del objeto real.				
Sé utilizar la escala de ampliación para obtener la medida del objeto representado.				
Sé calcular la escala de ampliación cuando tengo las medidas de los objetos reales y los representados.				
Expresar verbalmente o por escrito, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema				
Trabajar en grupo				
Aprender de mis errores				
Enfrentar un reto o tarea con ganas y motivación				
Esforzarme para hacer bien las tareas				

¿ME SIENTO, ME VEO O PIENSO ASÍ?	 En absoluto.	 De vez en cuando, pero en general no.	 Con bastante frecuencia.	 Casi siempre.
Comprendo las matemáticas				
Estoy deseando aprender nuevas cosas en matemáticas				
Hacer matemáticas es fácil para mi				
Las matemáticas están en todas partes de nuestra vida cotidiana				
Las matemáticas me confunden				
Las matemáticas me cuestan mucho				
Las matemáticas son aburridas				
Saber matemáticas me será útil en el futuro				
Me encantan las matemáticas				
Uso las matemáticas en otras asignaturas				
Se me dan bien las matemáticas				
Me lo paso bien resolviendo pasatiempos o retos matemáticos				
Mucha gente usa matemáticas en su trabajo				
No es necesario saber matemáticas				
No necesitaré nunca saber matemáticas cuando deje de estudiar				
Puedo resolver problemas difíciles de matemáticas				
Reconozco si mis respuestas en matemáticas tienen sentido				
Resolver problemas de matemáticas es divertido				
Resuelvo problemas de matemáticas por mi cuenta solo por gusto				
Saber matemáticas es útil				
Odio las matemáticas				
Me lo paso bien jugando a juegos matemáticos				
Solo uso matemáticas en clase de matemáticas				
Soy muy buena /o en matemáticas				
Me lo paso bien estudiando matemáticas				
Uso matemáticas fuera de la clase de matemáticas				

AUTOEVALUACIÓN

A1. Una estatua se encuentra cerca de la escuela. Usa la información proporcionada abajo para calcular la altura de la estatua.



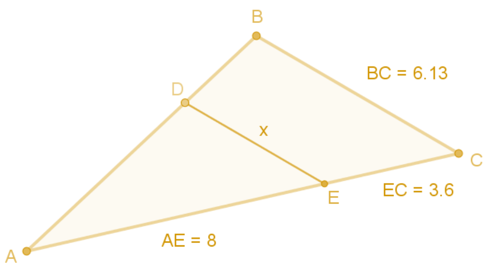
PREGUNTAS

6. ¿Qué figuras geométricas se ven en el diagrama? ¿Hay triángulos semejantes? ¿Por qué?
7. ¿Cuáles son las parejas de lados correspondientes en ambos triángulos?
8. Escribe una proporción correcta entre razones de lados correspondientes.
9. Resuelve la proporción anterior para poder hallar x, que es la altura pedida.

A2. Un mapa de España tiene una escala 1 : 550000.

Quieres viajar de Valladolid a Soria. Mides la distancia entre ambas ciudades en el mapa y es de 40 cm. ¿A qué distancia (en km) está Valladolid de Soria en la realidad?

A3. Completa la frase: En la figura siguiente, .el segmento DE es paralelo a BC, por lo tanto, los triángulos ABC y ADE son triángulos en posición de _______ y ambos son triángulos ___________.



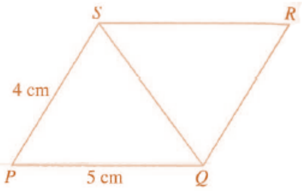
Un alumno, para encontrar el valor de x, escribe y resuelve la siguiente proporción:

$$\frac{x}{6{,}13} = \frac{8}{3{,}6}$$

¿Crees que esto es correcto?

¿Cómo hallarías tú el valor de x?

A4. Test de 5 minutos. Rodea la respuesta correcta:

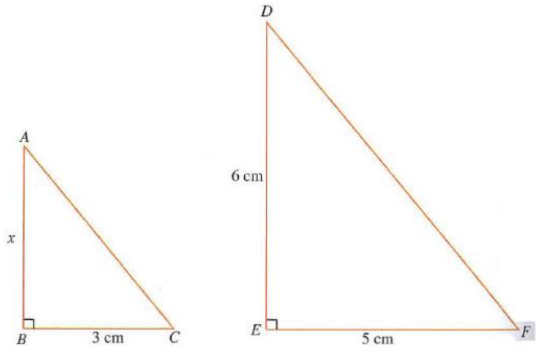


1.- Sabiendo que el triángulo PQS = triángulo RSQ, calcula RS

a) 4 cm b) 4,5 cm c) 5 cm d) 9 cm

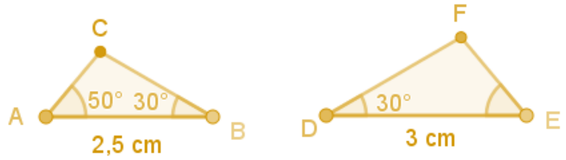
2.– Los triángulos ABC y DEF mostrados en la figura son triángulos semejantes. Sin medir, encuentra el valor de x.

a) 3cm b) 3.6 cm c) 4cm d) 5cm



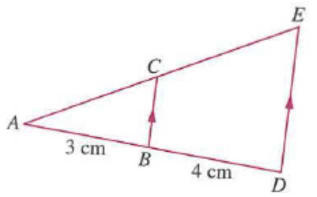
3.– Los triángulos ABC y DEF de la siguiente figura son triángulos semejantes. Encuentra el valor del ángulo del vértice E.

a) 30° b) 36° c) 50° d) 100°



4) El triángulo ADE es una ampliación del triángulo ABC. ¿Cuál es la razón de semejanza del triángulo grande respecto del pequeño?

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{7}{3}$



5) Un mapa tiene una escala de 1 : 10000. ¿Cuál es la longitud real representada por una distancia de 2,5 cm en el mapa?

a) 4000 cm b) 4000 km c) 25000 cm d) 25000 km

AUTOEVALUACIÓN

SOLUCIÓN A1:

A. En el diagrama se ven dos triángulos rectángulos que tienen los mismos ángulos. Son triángulos semejantes.

B. La altura de la estatua y la altura de la persona son lados correspondientes. También lo son las distancias de ambos al espejo.

C. Una proporción correcta es $\frac{x}{1{,}8} = \frac{4}{2{,}4}$.

D. Despejando x en la proporción anterior: $x = \frac{4 \cdot 1{,}8}{2{,}4}$ = 3. La estatua mide 3 m de altura.

SOLUCIÓN A2: Distancia entre Valladolid y Soria: 40 x 550000 = 22000000 cm = 220 km.

SOLUCIÓN A3: La proporción $\frac{x}{6{,}13} = \frac{8}{3{,}6}$ no es correcta porque no son razones entre lados correspondientes de los dos triángulos semejantes. Una proporción correcta sería

$$\frac{x}{6{,}13} = \frac{8}{3{,}6+8} \longrightarrow \frac{x}{6{,}13} = \frac{8}{11{,}6} \longrightarrow x = \frac{6{,}13 \cdot 8}{11{,}6} \cong 4{,}2 \;.$$

SOLUCIÓN A4

1.- C) 5 cm 2.- B) 3.6 cm 3.- C) 50° 4.- D) $\frac{7}{3}$ 5.- C) 25000 cm

ISBN: 978-8-49718-728-2
9 788497 187282
ISBN: 978-8-49718-726-8
9 788497 187268