ACTAS DEL CONGRESO

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Para profesorado de Infantil, Primaria, Secundaria y Universidad.

2014

CASTILLA Y LEÓN

Junta de Castilla y León

CONGRESO: LAS NUEVAS METODOLOGÍAS EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJEDE LAS MATEMÁTICAS

Segovia, 14 y 15 de noviembre de 2014.

Junta de Castilla y León

Editan: Junta de Castilla y León y Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán

Cítese como:

Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (2015). Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Academia de Artillería de Segovia.

Las comunicaciones aquí publicadas, han sido sometidas a evaluación y selección por parte de profesorado en activo de todos los niveles educativos.

Diseño de la portada y contraportada:

Elena Martín Fernández.

ISBN: 978-84-606-6831-2

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

PRESENTACIÓN

Todo profesional que se enfrente al reto de desempeñar con eficacia el ejercicio de su actividad, necesita contar para ello con tres importantes elementos como son la vocación, la técnica y la dedicación. En el ámbito de la docencia, en que los dos primeros, vocación y entrega, constituyen componentes casi imprescindibles para el correcto ejercicio de la profesión, el conocimiento de las metodologías más adecuadas contribuye además de forma muy significativa al incremento de la calidad de la enseñanza impartida.

Es por esto que constituye para mí un motivo de satisfacción, haber podido contribuir desde la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León a la realización de este volumen, que recoge las intervenciones realizadas en el Congreso "Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas", celebrado en una institución de tan dilatada trayectoria en el campo de la difusión científica, como es el Real Colegio de Artillería de Segovia, con motivo del 250 aniversario de su fundación.

Considero por otra parte de gran trascendencia para la mutua relación entre la administración educativa y los foros consagrados al estudio y divulgación de la ciencia, continuar realizando actividades como ésta, que nacen del trabajo y la colaboración conjuntas de la Consejería de Educación con el profesorado. En esta ocasión a través del grupo de Sinergias con las Matemáticas y el convenio de colaboración firmado con la Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán".

Creo por todo ello de gran importancia continuar realizando este tipo de actuaciones, que no sólo contribuyen a crear puntos de encuentro y foros de comunicación de los estudios y avances de la comunidad científica, sino a dotar a los estudiantes de un valioso material para su aprendizaje, al mismo tiempo que dejar constancia de la incesante actividad de tan importantes instituciones.

D. Juan José Mateos Otero.

Consejero de Educación.

PRÓLOGO

PRÓLOGO

El estudio internacional de enseñanza y aprendizaje TALIS 2013, pone de relieve que la elevada cifra del 87% del profesorado español, manifiesta no haber tenido la oportunidad de analizar la tarea docente de otros profesionales de la docencia, ni haberles podido proporcionar sugerencias y comentarios para mejorar su labor.

Sin embargo, constituye un hecho incuestionable, que en los tiempos de la sociedad de la información se hace más que nunca imprescindible compartir ideas, trabajar en equipo, y realizar propuestas de departamento o de centro, superando una forma aislada e individual de impartir la enseñanza, para contribuir con la comunicación de ideas y proyectos al enriquecimiento del sistema educativo de un país o una región.

Partiendo de este perspectiva, queda plenamente justificado el interés de la Consejería de Educación por impulsar el Congreso: “Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”, que celebrado en la Academia de Artillería de Segovia, ha permitido reunir a docentes de todas las etapas educativas, facilitándoles un foro de encuentro y comunicación de nuevas propuestas metodológicas y experiencias de aula.

Celebrado los días 14 y 15 de noviembre de 2014 con la asistencia de cerca de 250 profesores de todas las etapas educativas, el congreso se estructuró en 2 conferencias plenarias, una mesa redonda, 9 ponencias distribuidas en 3 bloques de ponencias paralelas, 8 talleres paralelos y 25 comunicaciones distribuidas en tres bloques de comunicaciones paralelas.

La elección del antiguo Convento de San Francisco para la celebración del Congreso, sede del Real Colegio de Artillería de Segovia, constituyó por otra parte la mejor oportunidad para conmemorar el 250 aniversario de su creación, destacando su papel en la enseñanza y divulgación científicas, como primera escuela de Ingeniería creada en España y centro pionero en el estudio y la enseñanza de las Matemáticas.

La Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León debe mostrar su agradecimiento por la implicación en todo momento de la Real Academia en la organización del congreso, no sólo por haber puesto a su disposición el mejor de los escenarios imaginables para su celebración, sino por haber desempeñado su papel como el mejor de los anfitriones, abriendo sus puertas a los docentes y ponentes participantes, y mostrando un constante desvelo en el desarrollo de las actividades programadas.

Además de la señera institución segoviana, la realización del congreso ha sido posible gracias a la colaboración tan entusiasta como desinteresada del grupo regional “Sinergias con las Matemáticas” y de una manera especial la Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”, que junto a la colaboración del Centro de Formación e Innovación Educativa de Segovia y el Centro Superior de Formación del Profesorado ubicado en Soria, contribuyeron a la fructífera labor del comité organizador, realizando de manera consensuada, la propuesta y selección de ponencias y comunicaciones.

En el seno del congreso se presentaron algunas de las metodologías que están ofreciendo en el aula mejores resultados en la actualidad, como la enseñanza cooperativa, el aprendizaje basado en problemas, la utilización didáctica de la investigación, el aprendizaje dialógico propio de las Comunidades de Aprendizaje, la enseñanza basada en proyectos, o las nuevas estrategias de cálculo que superan los algoritmos clásicos para las operaciones básicas y el uso de las TIC para la enseñanza de las Matemáticas.

Como conclusión solo me resta afirmar que este Congreso, es un primer paso de un camino en el que hay que continuar, por haber sido organizado desde la colaboración, el diálogo y el trabajo en equipo de profesionales de la enseñanza de las Matemáticas, y por haber estado dirigido a todos los niveles educativos, creando espacios formativos de encuentro e interés entre las distintas etapas.

A la vista de esta magnífica experiencia, la Consejería de Educación, continuará propiciando foros de debate, encuentro y comunicación científica para que la reflexión sobre la metodología de la enseñanza, la organización del aula, y la forma de interactuar con el alumnado, siga siendo objeto de análisis e intercambio de experiencias de los profesionales de la docencia, para seguir contribuyendo a la consecución del objetivo constante de la mejora de la calidad del sistema educativo de Castilla y León.

María del Pilar González García.

Directora General de Innovación Educativa y Formación del Profesorado.

CONFERENCIA DE CLAUSURA.

"Tecnologías de la información y de la Comunicación y Aprendizaje basado en la Investigación: ¿Qué sinergias?"

Michèle Artigue.

TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y DE LA COMUNICACIÓN Y APRENDIZAJE BASADO EN LA INVESTIGACIÓN: ¿QUÉ SINERGIAS?

Michèle Artigue

LDAR, Université Paris Diderot

Resumen

Siempre se han considerado las tecnologías informáticas como una manera de mejorar las prácticas de enseñanza y aprendizaje en matemática, haciéndolas más constructivas y experimentales, y dando más importancia a procesos de investigación. Se han explorado de forma sistemática las posibilidades que brinda la evolución tecnológica. Pero ¿Dónde estamos hoy? En este texto, trato de responder esta pregunta, mostrando el rico potencial que las tecnologías digitales ofrecen para procurar un aprendizaje basado en la investigación, preguntándome sobre lo que ofrece la investigación en didáctica para superar las dificultades encontradas para actualizar estas potencialidades.

Palabras clave: *matemáticas, didáctica, tecnología, aproximación instrumental, aprendizaje por investigación.*

1. INTRODUCCIÓN

Siempre se han considerado las tecnologías informáticas como una manera de mejorar las prácticas de enseñanza y aprendizaje en matemática, haciéndolas más constructivas y experimentales, y dando más importancia a los procesos de investigación. Se han explorado de forma sistemática las posibilidades que brinda la evolución tecnológica. Pero ¿Dónde estamos hoy? Esta es la pregunta que voy a tratar de responder.

Quiero primero apuntar unas características del contexto en que se sitúa mi discurso en lo que concierne tanto las tecnologías digitales, como al aprendizaje por investigación. Luego abordaré la cuestión del potencial de las tecnologías digitales para sostener el aprendizaje por investigación en matemáticas a través de tres ejemplos. En la tercera parte, frente a las dificultades encontradas para actualizar estas potencialidades en el aula, apuntaré unas aportaciones de las investigaciones en didáctica, focalizándome sobre las aportaciones realizadas desde las perspectivas instrumentales desarrolladas en las dos últimas décadas.

2. ELEMENTOS CONTEXTUALES

La dimensión tecnológica

Desde la emergencia de las tecnologías informáticas, es claro que existió la ambición de utilizar estas tecnologías para mejorar la enseñanza de las matemáticas, en particular, haciendo más accesible una visión constructiva de las matemáticas y de su aprendizaje, buscando un mejor equilibrio entre las dimensiones deductiva y experimental de esta disciplina en su enseñanza. Esto lo ilustra muy bien por ejemplo la síntesis de las investigaciones e innovaciones existentes, realizada en el primer estudio ICMI, que estuvo dedicado precisamente a este tema en el año 1985 (Churchhouse 1986).

Sin embargo las aportaciones de la tecnología para lograr estas ambiciones han cambiado radicalmente. Inicialmente las tecnologías eran bastante limitadas y promover un enfoque investigador necesitaba la construcción de algoritmos y un trabajo de programación. Pero con la llegada de las interfaces gráficas, se generalizó el potencial de visualización, de manipulación directa de representaciones de objetos matemáticos, y de interacciones dinámicas entre éstas. El desarrollo de los programas de geometría dinámica lo ilustra particularmente bien. Luego, con la generalización del uso de Internet, empezó una nueva era marcada por el énfasis puesto en el potencial comunicativo e informativo de la tecnología y cada vez más en su ubicuidad, induciendo la aparición de nuevas metáforas en términos de colaboración y conectividad.

Asistimos hoy en día a una aceleración dramática de esta evolución de las tecnologías con la irrupción de las tabletas, Smartphones y pantallas táctiles, la influencia de las redes sociales que impactan cada vez más en nuestras vidas personales, sociales y profesionales, la aparición de nuevas prácticas educativas, tales como los MOOC, la pedagogía “inversa”... Son características del contexto que necesariamente afectan nuestra visión del potencial de la tecnología para realizar un aprendizaje por investigación.

El aprendizaje por investigación

La idea de aprendizaje por investigación, o « inquiry based learning » como se dice en inglés, es el otro elemento contextual que quiero comentar brevemente. Observamos desde hace casi 10 años un fuerte impulso de esta forma de aprendizaje a nivel europeo. El informe conocido como informe Rocard publicado en 2007 jugó un papel esencial, al considerar que la falta de atractivo hacia la ciencia de los jóvenes europeos era consecuencia en gran parte del uso de métodos deductivos y formales en la enseñanza y que la solución a este problema debía pasaba por el uso de nuevas formas de pedagogía. Como lo expresa en sus recomendaciones:

> "La mejora de la educación en ciencias debe realizarse a través de nuevas formas de pedagogía: la introducción de métodos basados en la investigación en las escuelas, las acciones para la formación del profesorado en IBSE (Inquiry Based Science Education), el desarrollo de redes de docentes, deben ser promovidos y apoyados activamente." (nuestra traducción).

Habría mucho que decir sobre este análisis, pero no es mi propósito aquí. Lo cierto es que, después de la publicación de este informe, se financiaron muchos proyectos para desarrollar y difundir prácticas de investigación, en ciencias y en matemáticas, como lo muestra por ejemplo el portal Scientix (www.scientix.eu). Estos últimos años participé y sigo participando en tales proyectos, primero en los proyectos Fibonacci y Primas, y actualmente en los proyectos Mascil y Assist-Me. He podido constatar que al inicio de estos proyectos, el propio concepto de aprendizaje por investigación no estaba muy claro, y en los proyectos como Fibonacci y Primas realizamos una intensa reflexión para llegar a una conceptualización compartida y, sobretodo en Fibonacci, para clarificar las diferencias entre investigación en matemáticas y en ciencias (Harlen 2012), (Maaβ 2013), (Artigue & Blomøj 2013). Sin embargo, a pesar de las diversas definiciones, hay sinergias evidentes entre la idea del aprendizaje por investigación promovida en estos proyectos y el trabajo que se ha desarrollado desde hace décadas sobre tecnología en educación matemática. Esta sinergia es evidente cuando se considera el uso que se hace de la tecnología en estos proyectos, tanto para diseñar situaciones de aprendizaje como para lograr su difusión. Sin embargo, en este punto de mi discurso, me parece necesario abandonar este nivel general para entrar en unos ejemplos.

ILUSTRANDO EL POTENCIAL TECNOLÓGICO CON TRES EJEMPLOS

Ejemplo 1: Una explotación clásica de la tecnología

Empiezo con un ejemplo clásico en el sentido de que no precisa de novedades tecnológicas, sino del potencial disponible desde hace muchos años. Es una familia de situaciones diseñada para el proyecto Comenius EDuMatics de formación de docentes europeos para una integración productiva de la tecnología (www.edumatics.mathematik.uni-wuerzburg.de/en/) que parte de una situación diseñada hace muchos años en el IREM de Montpellier. La familia de situaciones es la siguiente. Se trata de diseños luminosos (cf. Figura 1) que se construyen así: una figura geométrica sencilla (aquí un cuadrado), un punto M móvil sobre un segmento ligado a esta figura (un lado, una mediana, una diagonal) que delimita dos formas geométricas dentro de la forma inicial. El costo del diseño depende del área de la parte iluminada y los alumnos deben construir un catálogo para tales diseños y tratar de optimizar sus costos.

En Francia, es un tipo de tarea clásica para introducir a los alumnos en el pensamiento funcional y a menudo en los libros de texto se presenta sin referencia a ninguna tecnología. Por ejemplo una versión clásica de este problema en un libro de texto seria la siguiente. Se introduce la figura y las notaciones; se llama x la longitud del segmento AM medida en cm y se pide expresar en función de x las áreas del cuadrado C(x), del triángulo T(x) y el área total del diseño S(x); luego se pide precisar el dominio de la función $x \mapsto S(x)$, estudiar cómo varía el área, encontrar su máximo y mínimo, y representarla gráficamente. Es decir un trabajo muy guiado, sin ninguna dimensión de investigación.

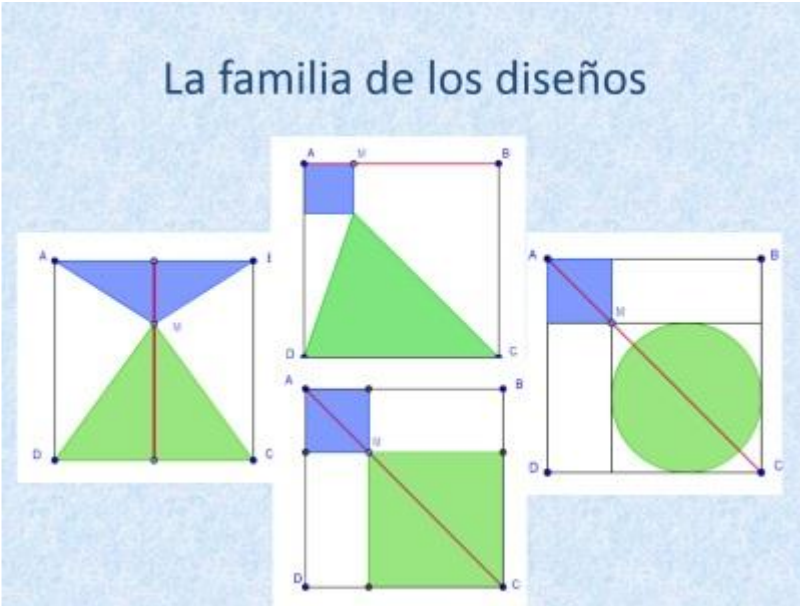


Figura 1 : Familia de los diseños

Evidentemente el uso de un programa como GeoGebra abre las puertas para introducir una dimensión de investigación en esta tarea. Se puede explorar primero la variación del área moviendo el punto M y observar las variaciones cualitativamente en la pantalla geométrica y cuantitativamente en la pantalla algebraica de Geogebra. Sin necesidad de expresar algebraicamente la situación se pueden hacer conjeturas sobre las variaciones y el valor del mínimo. Siempre sin Álgebra, se puede también construir puntos cuya abscisa se corresponda con la longitud AM, y la ordenada con las diversas áreas en juego, y activando la traza de estos puntos o utilizando el comando *Lugar geométrico*, obtener las representaciones gráficas de estas variaciones. Aparecerán así dos parábolas y una recta y se pueden estudiar sus características. Introduciendo las expresiones algebraicas de estas funciones se puede comprobar que coinciden con las curvas ya obtenidas, o que los puntos trazados se ubican en ellas. Hoy en día, el programa simbólico Xcas implementado en GeoGebra permite además realizar un cálculo exacto de las expresiones obtenidas.

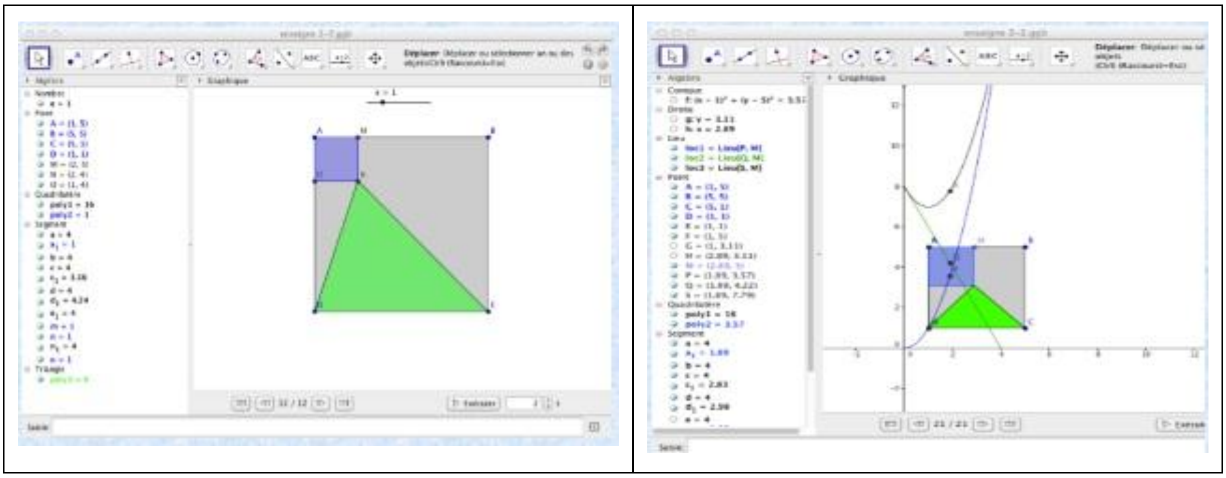


Figura 2 : Investigación con GeoGebra

Resumiendo, en este tipo de situación, la tecnología permite realizar una aproximación experimental al problema y desarrollarla de diversas maneras: con una exploración del problema que no necesita su modelización algebraica, una verdadera interacción entre aproximaciones cualitativas y cuantitativas, entre el trabajo en los marcos numérico, algebraico y geométrico, y entre los diferentes registros semióticos asociados, de mayor importancia en el aprendizaje de funciones. También se tiene la posibilidad de variar fácilmente las dimensiones, las formas, estudiar lo que se generaliza o no. En resumen, la tecnología permite un trabajo más rico, más representativo de una auténtica actividad matemática dotando de más responsabilidad matemática al alumno.

Sin embargo, como sabemos, este potencial tecnológico, a pesar de ser clásico, no se explota incluso hoy en día como se debería en la enseñanza.

Ejemplo 2: Simulaciones y juegos serios

Con este ejemplo, voy a ampliar la perspectiva a situaciones basadas en la modelización de fenómenos visuales de vida cotidiana, usando video clips, donde la investigación incluye un auténtico proceso de modelización y se construyen simulaciones informáticas para luego jugar con ellas. Algo que se aproxima a la idea de "juego serio" de uso creciente en educación, y cuya riqueza matemática hace que pueda servir para diseñar un programa de estudio e investigación, como los llama Chevallard (2007).

La familia de las persecuciones presenta estas características. Es una familia de situaciones que hemos diseñado inicialmente con colegas checos también dentro del proyecto EDuMatics, pero desarrollada luego, adaptándola y experimentándola a diferentes niveles del grado 9 hasta la universidad y la formación de profesores de secundaria, en diferentes condiciones. En esta familia, el trabajo se inicia con la visualización de video clips de persecuciones (cf. Figura 3) y la discusión de sus respectivas características. y juegos con estas simulaciones y juegos con estas simulaciones

Figura 3 : Video clips de persecuciones

Hay por ejemplo persecuciones para las cuales el perseguidor y el perseguido siguen la misma trayectoria rectilínea, otras, como la del ball-trap, donde los dos siguen teniendo una trayectoria rectilínea pero son diferentes porque hay anticipación, y otras como las dos de la parte inferior de la Figura 3 donde hay una adaptación continua de la trayectoria del perseguidor a la posición del perseguido.

Luego, se realizan simulaciones con GeoGebra y juegos con estas simulaciones que conducen a diversas preguntas, fuente de modelizaciones funcionales. En la primera simulación, se simplifica la situación del Correcaminos y el Coyote para construir un modelo de persecución sencilla definido así: el perseguidor C y el perseguido P se mueven sobre una misma recta, con velocidad uniforme. Para facilitar el trabajo colectivo en el aula, se decide también fijar la velocidad de P y la distancia inicial entre los dos. Pero cada grupo de alumnos elige libremente la velocidad para el perseguidor. Después de varios ensayos, los alumnos generalmente consiguen simular la persecución, introduciendo un deslizador único para el tiempo, y definiendo las coordenadas de C y P en función de este deslizador (cf. Figura 4).

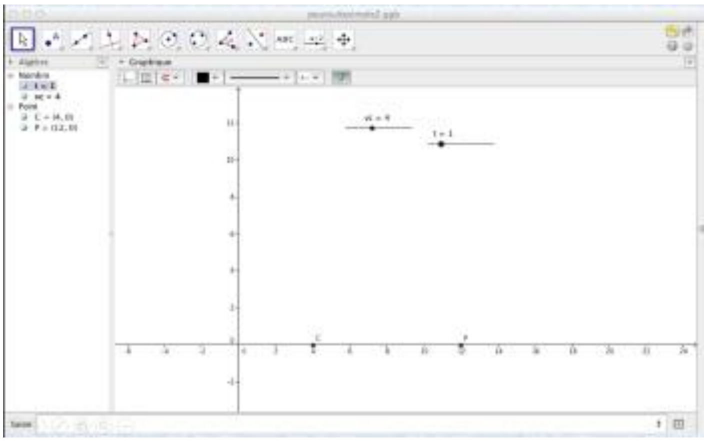


Figura 4: Simulación de una persecución sencilla

Surgen así preguntas sobre la posibilidad o no de que la persecución se acabe en el tiempo de la simulación definido por el deslizador y sobre su duración. Se introduce en este punto un nuevo deslizador para la velocidad de C para trabajar sobre estas preguntas, jugando con las simulaciones. Emergen propiedades que se pueden interpretar fácilmente en términos de la situación de persecución como el hecho de que la duración varía en sentido inverso a la velocidad de C. Después de poner en común estas ideas, se pide a los alumnos anotar en la pizarra los tiempos de duración que obtienen para varias velocidades. Dado que jugando obtienen solo valores aproximados, y además con diferentes niveles de aproximación, esta fase genera discusiones muy interesantes sobre la unicidad del tiempo de duración para una velocidad dada y la naturaleza funcional de la relación.

Los pares (coordenadas) aceptados colectivamente se introducen en la hoja de cálculo de GeoGebra y los puntos asociados se representan en la pantalla gráfica. En las experimentaciones hechas, los alumnos conjeturaron que esta serie de puntos debía corresponder a la función de proporcionalidad inversa. Sin embargo, cuando se introduce f(x)=1/x, se puede comprobar que no se ajusta completamente.

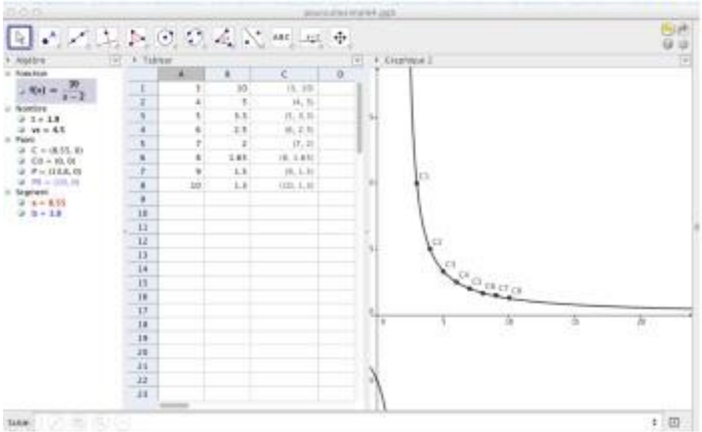


Figura 5: Coplas y expresión algebraica de la función

El docente lo utilizó con el objetivo de buscar una expresión algebraica de la dependencia funcional. Llegar a esta expresión no fue fácil con las experimentaciones realizadas por los alumnos de fin de Primaria y de primer año de Secundaria, y se necesitó para la gran mayoría de ellos de apoyo del docente. De hecho, hay que comprender que el alcance del perseguido por el perseguidor significa que los dos puntos coinciden, interpretar esta coincidencia en términos de coordenadas iguales, escribir la ecuación resultante y utilizarla para expresar t en función de la velocidad de C. Todo esto es un trabajo nuevo y complejo para estos alumnos.

Finalmente, cuando se introduce la expresión de la función usando la letra x para la variable independiente y cuando se comprueba que los puntos se localizan bien en la gráfica (cf. Figura 5), se produce una verdadera emoción en la clase. Esta representación gráfica también es fuente de nuevas preguntas: ¿Qué significado tiene la parte de la curva debajo del eje horizontal? ¿Qué pasa cuando sube la curva ? Las respuestas a estas preguntas establecidas colectivamente combinan argumentos matemáticos y razonamientos involucrando la situación misma de persecución: para que C atrape P, debe de tener una velocidad mayor que 2; cuando la velocidad de C se aproxima a 2, la duración de la persecución crece sin cesar hasta el infinito; inversamente, cuando la velocidad de C crece hacia el infinito, la duración decrece hacia 0. El profesor ayuda a relacionar estos razonamientos con propiedades gráficas, trazando la recta vertical de abscisa 2, y con la expresión algebraica de la función.

Voy a pararme aquí con este ejemplo, no entrando en el trabajo de investigación que emerge del trabajo sobre otros modelos de persecución (cf. (Cazes & Vandebrouck 2014)). Sin embargo, después de una diversidad de experimentaciones, cortas o largas, con alumnos, estudiantes, futuros docentes y docentes, no cabe duda para mí que este tipo de situación tiene una fuerte robustez y un gran potencial para el aprendizaje por investigación de la modelización y del pensamiento funcional. Sin embargo, resulta también claro que este tipo de explotación de la tecnología, más en línea con los intereses de nuestros alumnos, y basado en simulaciones dinámicas que no tienen equivalente en papel y lápiz se sitúa a gran distancia de las practicas usuales en Francia pero no solo en Francia, y tiene por eso una ecología bastante frágil. Es necesaria también una mayor maestría tecnológica del docente.

Ejemplo 3: Tecnología y difusión de prácticas de investigación.

Con este tercer ejemplo, quiero abordar la pregunta inicial con otro ejemplo, partiendo de los proyectos europeos de difusión de prácticas de investigación ya mencionados, y viendo el uso que hacen de la tecnología. Todos estos proyectos presentan recursos para las clases, sea adaptando recursos existentes, sea desarrollándolos dentro del proyecto mismo. Incluyen situaciones que explotan potencialidades similares a las utilizadas en los primeros ejemplos, pero también los hay de otros tipos.

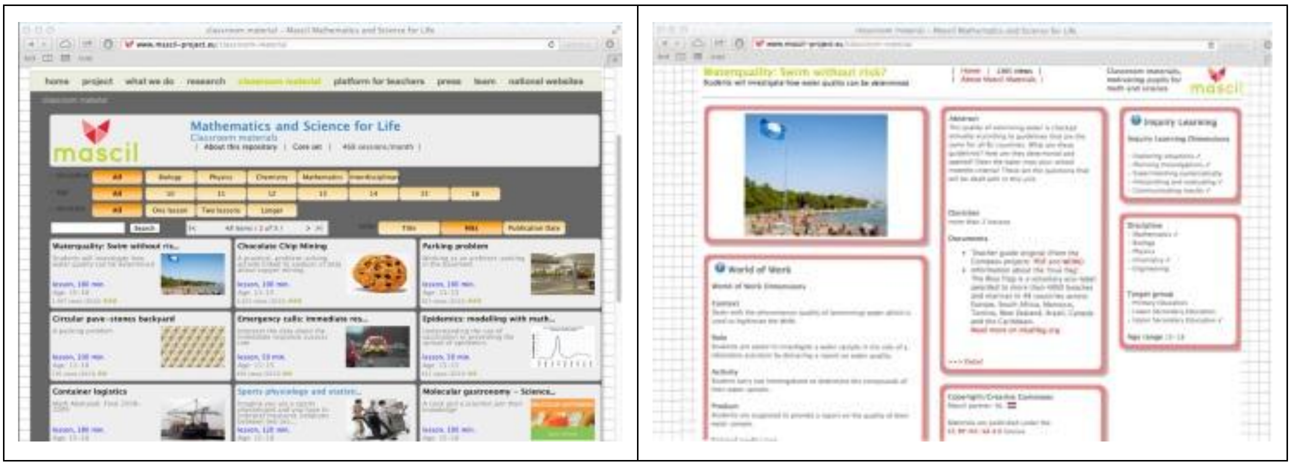


Figura 6 : Recursos para la clase del proyecto Mascil

En la Figura 6, se puede ver el sitio web del proyecto Mascil y el material para las clases que se encuentra en la primera página de los recursos. La primera situación, bastante típica, es la siguiente. Los estudiantes deben entender lo que significa la bandera azul en las playas. ¿Qué criterios se utilizan? ¿Qué fiabilidad tienen? Deben también construir experimentos para evaluar la calidad del agua en su propio entorno. La tecnología sirve para buscar información y datos, Chevallard diría que participa en la dialéctica entre media y medio (Chevallard, 2007). Las matemáticas movilizadas (cálculos sobre magnitudes, estadísticas y eventualmente logaritmos...) se combinan aquí con un trabajo en ciencias que obedece a su propia lógica. Las matemáticas están al servicio de una investigación más amplia que en las situaciones anteriores, y es a menudo el caso de los recursos descritos en este proyecto europeo que tiene también como objetivo establecer relaciones con el mundo profesional.

En estos proyectos, se utiliza también la tecnología para la formación y la auto-formación de los docentes en prácticas de enseñanza basadas en la investigación. El sitio web del proyecto Primas por ejemplo presenta varios recursos de este tipo muy bien estructurados. Cada vez más en estos proyectos se utilizan plataformas que permite intercambios entre docentes como es el caso en el proyecto Mascil (cf. Figura 7).

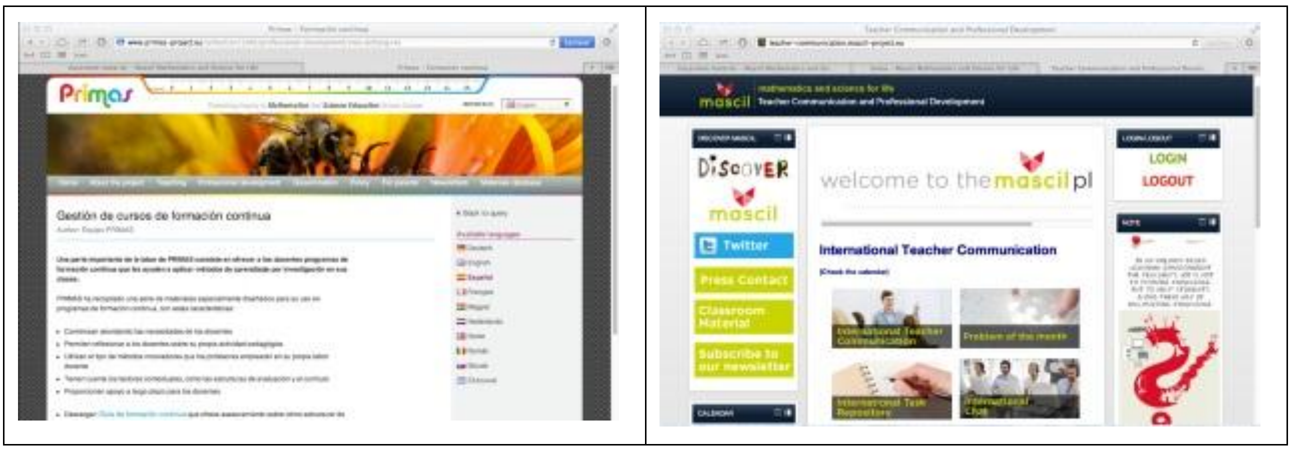


Figure 7: Recursos para la formación y el intercambio entre docentes

Está claro que no se pueden olvidar estas potencialidades hoy día cuando se analiza el papel de las tecnologías digitales para promover y sostener un aprendizaje basado en la investigación, y cuando se investigan sinergias ente uso de la tecnología y el aprendizaje por investigación. Los tres ejemplos que acabamos de presentar representan solo una mínima parte de lo que existe, como lo muestra bien el segundo estudio ICMI dedicado a tecnología (Hoyles & Lagrange, 2010). Las tecnologías digitales ofrecen hoy día un gran potencial para sostener el desarrollo de un aprendizaje por investigación en matemáticas. El problema sin embargo que queda siempre abierto es el de la manera de transferir estas potencialidades a la enseñanza fuera de entornos experimentales y en la formación de los docentes. Esto nos lleva a la última parte de este texto.

TRANSFERENCIA DE LAS POTENCIALIDADES TECNOLÓGICAS: APORTACIONES DE LA INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA

Transferir todas estas potencialidades en la enseñanza no es algo fácil. Lo anticipaba el primer estudio ICMI ya mencionado y el segundo estudio consagrado al tema, 20 años después, constataba que este problema es siempre un desafío para la educación matemática. Pero no podemos decir que frente a este desafío estamos hoy en un estado similar al de los años ochenta. Como lo muestra muy bien el segundo estudio ICMI, gracias al desarrollo de la investigación didáctica y de proyectos innovadores a diferentes escalas, entendemos mejor la naturaleza de este desafío, las dificultades, y como se pueden superar. En este texto, no es posible tratar este tema como lo merecería. Como he anunciado me limitaré a apuntar unas aportaciones de las investigaciones basadas en aproximaciones instrumentales.

Una idea básica en la aproximación instrumental es la distinción entre artefacto e instrumento. Esta distinción proviene del campo de la ergonomía cognitiva y del trabajo en este campo de investigadores como Pierre Rabardel (1995). Estas investigaciones han mostrado la importancia de distinguir entre un artefacto, por ejemplo un programa como GeoGebra, y el instrumento en que se puede tornar para un individuo o un colectivo. Esta distinción permitió prestar atención al proceso de génesis instrumental que acompaña esta transformación y entender su complejidad. En la figura 8, traté de resumir las principales características de tales génesis instrumentales. Primero, el hecho de que tienen una doble dimensión porque afectan tanto al artefacto como a su usuario. Es lo que expresa la distinción hecha entre la instrumentalización que denota la transformación del artefacto y la instrumentación que denota la que corresponde al usuario. La evolución del proceso de génesis instrumental conduce ala creación de esquemas de uso del artefacto y de acción instrumentada, y para entenderlos se necesita tener en cuenta a la vez las restricciones que impone la tecnología y las potencialidades que ofrece.

Figura 8 : Génesis instrumentales

Los trabajos desarrollados dentro de esta perspectiva mostraron que se ha subestimado en gran medida la complejidad de las génesis instrumentales y sus efectos negativos sobre la transferencia del potencial tecnológico (cf. por ejemplo (Guin, Ruthven & Trouche 2006)).

Esta distinción es importante. Sin embargo, para entender lo que cambia utilizando tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas pensar en términos de génesis instrumental no es suficiente. Por esta razón la aproximación instrumental combina las aportaciones de la ergonomía cognitiva con un marco teórico más global, el de la teoría antropológica de la didáctica iniciada por Chevallard (1992, 2002, 2007). Esta conexión permite tener en cuenta, en particular, la importancia de las restricciones, valores y normas institucionales que condicionan el funcionamiento de los sistemas didácticos y por tanto la transferencia del potencial de la tecnología. Nos ha permitido también identificar y traspasar un obstáculo tradicional a esta actualización: la oposición entre conceptos y técnicas. Tradicionalmente, el discurso sobre el uso de la tecnología utiliza el argumento que la tecnología iba a liberar el alumno del trabajo técnico y permitiría focalizarle en el desarrollo del pensamiento conceptual. Las cosas no son así, y como se ha mostrado hay que pensar en las relaciones entre conceptos y técnicas en términos dialécticos. Esta visión dialéctica la sostiene bien la teoría antropológica como lo muestra el papel central que tiene en ella la noción de praxeología.

Esta aproximación dejó también claro que las técnicas tienen un doble valor: un valor pragmático: permiten actuar sobre objetos, obtener resultados, pero también contribuyen de manera esencial a la comprensión de los objetos que involucran. Este es su valor epistémico. Este doble valor es particularmente importante cuando se habla de educación porque la legitimidad institucional de las técnicas resulta tanto de su valor pragmático como del epistémico. Se ha mostrado que el uso espontáneo de las tecnologías digitales tiende a destruir los equilibrios tradicionales entre estos dos valores, reforzando el valor pragmático en detrimento del epistémico, y por tanto se deben lograr nuevos equilibrios, lo que influye en el diseño de tareas y en su gestión (Artigue 2002, 2007).

Todas estas construcciones han permitido comprender mejor las dificultades encontradas por los docentes al transferir el potencial de la tecnología y también las limitaciones de la formación recibida tanto inicial como continua.

Estas fueron las primeras aportaciones de las aproximaciones instrumentales. Pero rápidamente, se extendió esta perspectiva. Primero, se extendió a la clase, pasando de génesis individuales a génesis colectivas y a sus interacciones. Esta extensión condujo a la idea de la orquestación instrumental, pilotada por el profesor, una noción introducida por Luc Trouche (2005), y trabajada después por otros investigadores, particularmente Paul Drijvers quien, observando clases, identificó diferentes categorías de orquestación instrumental (Drijvers 2011).

La aplicación al docente de la idea de génesis instrumental fue también muy productiva. Ha mostrado un nivel de complejidad mucho más alto que para el alumno porque, para entender las génesis instrumentales de los docentes y la manera en que afectan su trabajo, hay que tener en cuenta:

- la combinación de génesis instrumentales personales y profesionales, (instrumentalizar e instrumentar una tecnología para enseñar matemática demanda mucho más que hacerlo para su propia práctica matemática)
- la combinación de actividades instrumentadas dentro y fuera del aula (para preparar un curso, para preparar recursos para la clase, en la clase de modo colectivo por ejemplo con una pizarra interactiva, en una sesión de laboratorio);
- y la interacción entre diferentes niveles de actuación: micro, meso, macro.

Esta extensión ha sido especialmente trabajada en mi equipo dentro del proyecto nacional GUPTEN (Lagrange 2013) y condujó a mis colegas Maha Abboud-Blanchard y Fabrice Vandebrouck a introducir la noción más amplia de génesis de uso (Abboud Blanchard & Vandebrouck 2012), combinando una perspectiva instrumental con el doble enfoque ergonómico y didáctico sobre las prácticas docentes iniciado por Aline Robert y Janine Rogalski que se basa en teoría de la actividad (Robert & Rogalski 2002), (Vandebrouck 2013).

La ultima extensión que quisiera mencionar es la extensión al trabajo documental del profesor, iniciada por Ghislaine Gueudet y Luc Trouche (Gueudet, Pepin & Trouche 2012). Me parece muy prometedora hoy en día esta extensión para pensar en el diseño de recursos y las relaciones que se pueden establecer entre autores y usuarios. Se basa en la idea ya expresada por Rabardel que el diseño se continúa durante el uso (proceso de instrumentalización), y que por esta razón, se deben considerar a los docentes usuarios también como autores, y diseñando recursos, anticipar y preparar este trabajo. Eso impacta más globalmente en la visión de la concepción y difusión de materiales didácticos.

CONCLUSION

En este texto, traté de mostrar el rico potencial que las tecnologías digitales ofrecen hoy día para sostener un aprendizaje basado en la investigación, y me pregunté acerca de lo que ofrece la investigación en didáctica para superar las dificultades encontradas a la hora de transferir estas potencialidades en las aulas. No cabe duda que la investigación didáctica que se ha desarrollado durante las últimas décadas nos permite comprender mejor estas dificultades y las limitaciones acerca de los apoyos que se han proporcionado al profesorado para superarlas, para así poder pensar estrategias más eficaces. Quisiera sin embargo subrayar que, al focalizar en las aportaciones de las aproximaciones instrumentales, mostré solo una parte muy limitada del conocimiento y de los instrumentos conceptuales que tenemos hoy en día.

Referencias

Abboud-Blanchard, M., & Vandebrouck, F. (2012). Analysing teachers' practices in technology environments from an Activity Teoretical approach. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 19(4), 159-164.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning,* 7, 245-274.

Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. In E. Mancera, C. Pérez, *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática, Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, pp. 9-21. Mexico: Edebé Ediciones Internacionales. Reproduced in Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8, 13-33 (2011).

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(6), 797- 810.

Cazes, C., & Vandebrouck F. (2014). Vil coyote rattrapera-t-il Bip-Bip? *Repères - IREM*, 95, 5-22.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 77-11.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. In J.L. Dorier y al. (Eds), *Actes de la Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, pp. 3-22 & 41-56. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2007). La Dialectique des medias et des milieux. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2007* (pp. 344-366). Paris: IREM Paris 7. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=147

Churchhouse, R.F. (Ed.) (1986). *The influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series*. Cambridge: Cambridge University Press.

Drijvers, P. (2011). From 'work-and-walk-by' to 'sherpa-at-work'. *Mathematics Teaching*, 222, 22-26.

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2012). *From text to 'Lived ressources': Mathematics Curriculum Material and Teacher Development*. New York: Springer.

Harlen, W. (2012). *Inquiry in Science Education*. In, S. Borda Carulla (coord.) Resources for Implementing Inquiry in Science and Mathematics at School. www.fibonacci-project.eu.

Hoyles, C., & Lagrange J.B. (Eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*. New York : Springer.

Lagrange, J.B. (Ed.) (2013). *Les Technologies numériques pour l'enseignement. Usages, dispositifs et génèses.* Toulouse: Editions OCTARES.

Maaβ, K. (Ed.) (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(6).

Rabardel P. (1995). *L'homme et les outils contemporains.* Paris : A. Colin. English version (2002), accessible at http://ergoserv.psy.univ-Paris8.fr

Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des mathématiques, des sciences et des Technologies*, 2(4), 505-528.

Rocard M, Csermely P., Jorde D., Lenzen D., Walberg-Henriksson H. & Hemmo V. (2007). *L'enseignement scientifique aujourd'hui:une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe.* Commission Européenne, Direction générale de la recherche, Science, économie et société.

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les aprrentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25, 91-138.

Vandebrouck F. (Ed.) (2013). *Mathematics Classrooms: Students' Activities and Teachers' Practices* (pp. 229-245). The Netherlands: Sense Publishers.

Para hacer referencia a este artículo:

Artigue, M. (2015). Tecnologías de la información y de la Comunicación y Aprendizaje basado en la Investigación: ¿Qué sinergias? En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 17-27). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

PONENCIAS PARALELAS.

METODOLOGÍAS ACTIVAS PARA UN APRENDIZAJE EFICAZ DE LAS MATEMÁTICAS.

Óscar Abellón Martín

Colegio Nuestra Señora del Pilar (Soria)

Resumen

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, ha sido el profesor el que, tradicionalmente, ha tenido mayor protagonismo, abusando de las clases magistrales. En el momento actual, en el marco de las competencias clave, el alumno debe ser el protagonista de su aprendizaje. Ha de desarrollar su pensamiento crítico y capacidad investigadora, trabajar en equipo, realizar exposiciones orales, desarrollar una actitud emprendedora, conectar lo que aprende en la escuela con la vida cotidiana y utilizarlo para resolver problemas reales, etc.

Para ello es necesario un cambio metodológico que permita formar futuros profesionales competentes, preparados para lo que, en la actualidad, la sociedad les exige.

Debemos aprovechar las investigaciones que se han ido realizando en el ámbito pedagógico y perder el miedo al cambio.

Palabras clave: *competencias, cambio, metodologías, proyectos.*

CONTEXTO EDUCATIVO

Tradicionalmente el estilo docente ha centrado fundamentalmente el protagonismo en el profesor, otorgando al alumno un papel más pasivo, incidiendo especialmente en el proceso de enseñanza y menos en el de aprendizaje.

En esa línea de trabajo el profesor ha ejercido siempre de transmisor de conocimiento y eso ha convertido al alumno en receptor pasivo de contenidos.

Las matemáticas no han quedado fuera de esta dinámica de trabajo y el aprendizaje de los alumnos se ha servido de técnicas memorísticas y de dinámicas sistemáticas de trabajo que no han facilitado la comprensión de conceptos y menos aún de su aplicación en situaciones de la vida cotidiana. Esto ha provocado que en numerosos casos el alumnado haya considerado que la escuela estaba al margen de la realidad del mundo y que aquello que se aprendía no era una herramienta útil para resolver los problemas reales a los que se había de enfrentar fuera del aula.

La implantación de las COMPETENCIAS, en primer lugar mal llamadas BÁSICAS, y actualmente consideradas CLAVE por su relevancia para poder desenvolverse en la resolución de problemas en el mundo actual, así como las investigaciones y descubrimientos en el ámbito de la neurociencia, la psicología y la pedagogía, pueden considerarse como una excelente oportunidad para generar un importante cambio en las aulas que permita a los alumnos convertirse en los protagonistas de su propio aprendizaje.

En el aula de matemáticas el profesor ya no debe limitarse a que sus alumnos aprendan contenidos matemáticos, o mejor aún, comprendan y sepan aplicar en otros contextos dichos contenidos, sino que debe contribuir a que sus alumnos adquieran todas las competencias, ahora 7:

- Comunicación lingüística.
- Competencia Matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Aprender a aprender.

- Competencias Sociales y cívicas.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- Conciencia y expresiones culturales.

En el área de Matemáticas, además de conseguir que nuestros alumnos dominen dicha materia debemos contribuir a que aprendan a trabajar en equipo, desarrollen su capacidad investigadora, sepan hablar en público, sean creativos, tomen decisiones con destreza, desarrollen su pensamiento, sean autónomos, tengan una actitud crítica, sean capaces de aprender por sí mismos, desarrollen su capacidad de liderazgo, utilicen de forma eficaz las herramientas tecnológicas, etc.

Esto requiere un cambio importante en la forma de trabajar en el aula con los alumnos. Difícilmente un alumno aprenderá a trabajar en equipo si no se hace uso del aprendizaje cooperativo, tampoco será posible que se exprese bien en público si no se le ha enseñado o no se le ha dado la oportunidad de hacerlo, su autonomía y su capacidad para aprender por sí mismo tampoco se desarrollará si es el profesor la única forma que tiene de adquirir conocimiento, y así un largo etcétera.

Pero también será complicado que el alumnado adquiera dichas competencias si es tan sólo un profesor el que cambia su estilo docente adaptándolo a las necesidades actuales. Dicho cambio ha de producirse en todo un centro escolar para que sea efectivo.

De igual forma, para contextualizar el uso de nuevas metodologías más activas y darle sentido a su aplicación, y consciente de que esta parte es la que generalmente nos atrae menos a los docentes y más aún ante constantes cambios legislativos, es imprescindible una seria programación por competencias y la incorporación de nuevas herramientas de evaluación que permitan medir la adquisición de competencias. Para ello es necesario que el centro escolar cuente con un Mapa de Competencias que desarrolle, a través de descriptores, los indicadores establecidos para las Competencias y sea el marco de referencia para la elaboración de las unidades didácticas de todas las áreas en todos los niveles. Con lo cual también será muy importante la coordinación entre todos los profesores del centro

En la elaboración de las unidades didácticas el profesor no debe resignarse a trabajar en el aula como siempre y tratar, de forma ingeniosa, de relacionar con los contenidos que va a trabajar aquellas competencias que considera más afines. Deberá seleccionar los descriptores que quiere trabajar y concretarlos para su materia y nivel en desempeños, que determinarán las metodologías que deberá utilizar para que sus alumnos desarrollen las competencias seleccionadas y la nueva forma en que habrá de evaluar.

METODOLOGÍAS ACTIVAS. CAMBIO METODOLÓGICO

Justificación del cambio.

Tras esta introducción que nos permite contextualizar el uso de metodologías diferentes en nuestra tarea docente en el área de Matemáticas, y teniendo en cuenta que los destinatarios de este congreso son profesores de Matemáticas de todos los niveles, desde Infantil hasta Bachillerato, paso a enumerar, con ejemplos, un amplio listado de metodologías que pueden ayudar a alcanzar este ambicioso objetivo de trabajar las Matemáticas en el aula de una forma diferente para que nuestros alumnos sean COMPETENTES, modificando el rol del profesor, que pasa de ser un transmisor de conocimiento a lo que hoy se conoce como COACH, convirtiéndose en el puente entre el conocimiento y sus alumnos. Pero antes de ello, de forma breve, dos fundamentos pedagógicos que justifican dichas metodologías.

Encontrar un método que garantice en su totalidad el aprendizaje de los alumnos es realmente imposible. El investigador Cody Blair resume en una pirámide los pasos por los que el alumno ha de pasar para adquirir un conocimiento y muestra el modo en el que el ser humano absorbe conocimientos de manera más efectiva.

De sus estudios se puede extraer una conclusión importante que da la razón a las teorías más actuales, fundamentalmente a la importancia del uso de metodologías activas: Es fundamental **aprender haciendo**.

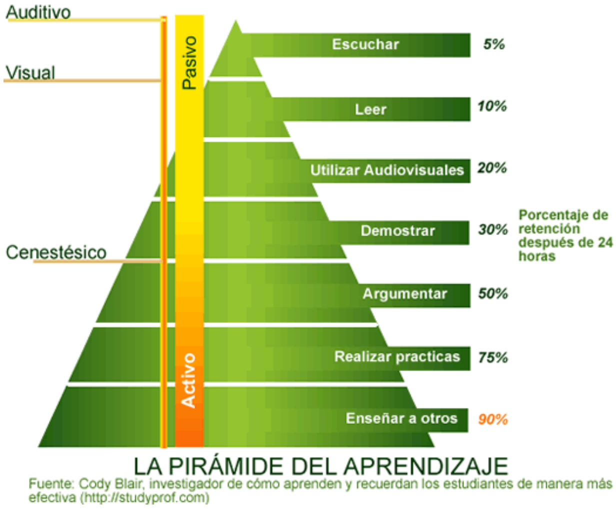


Figura 1. Pirámide del Aprendizaje de Cody Blair.

Mientras que el alumno, después de 24 horas, con un rol más pasivo escuchando o leyendo retiene entre un 5 y un 10 % de la información, realizando prácticas o enseñando a otros, con un rol más activo, retiene entre un 75 y 90 %.

El alumno necesita un aprendizaje activo, encontrar una aplicación práctica de los conocimientos y enseñarlos a otros. Esta dinámica de aprendizaje le permitirá comprender y retener mejor los contenidos y le motivará a profundizar más en ellos. Esto no quiere decir que deba desaparecer la clase magistral en la que la lectura y escucha son piezas clave en el proceso, pero debe integrarse dentro de un modelo que otorga mayor protagonismo al alumno a través de un aprendizaje más activo. La exposición magistral sigue teniendo su hueco, pero dentro de otro estilo metodológico y, en ocasiones, puede ser a petición de los propios alumnos en algún momento concreto o para aclarar algún concepto dentro de la resolución de un PBL, por ejemplo.

La taxonomía de Bloom, recoge por categorías un variado elenco de estrategias enfocadas al aprendizaje, que se organizan en forma de pirámide, de tal forma que el tipo de actividad tiene mayor dificultad cuanto más alto se sitúa en la pirámide. Se trata de una clasificación que incluye las diferentes habilidades que los educadores pueden proponer a sus estudiantes. La idea surgió en una reunión de la Asociación norteamericana de psicología en 1948. La comisión encargada fue liderada por Benjamin Bloom, psicólogo de la educación de la Universidad de Chicago. El esquema resultante fue propuesto por este investigador en 1956 y asume que el aprendizaje a niveles superiores depende de la adquisición del conocimiento y habilidades de ciertos niveles inferiores.

Dichas categorías, desde el nivel más bajo al más alto, son las siguientes:

1. RECORDAR: Traer a la memoria información relevante.
   Objetivos: Reconocer, listar, describir, recuperar, denominar, localizar.
2. COMPRENDER: Construir nuevos significados a partir de lo aprendido y del nuevo contenido.
   Objetivos: Interpretar, ejemplificar, clasificar, resumir, inferir, comparar, explicar, parafrasear.
3. APLICAR: Demostrar lo aprendido tanto en un contexto conocido como en nuevos contextos.
   Objetivos: Ejecutar, implementar, desempeñar, usar.

4. ANALIZAR: Descomponer el conocimiento en diferentes partes, operar con ellas y comprobar cómo se relacionan con el esquema general.
   Objetivos: Diferenciar, organizar, atribuir, comparar, estructurar, integrar.
5. EVALUAR: Reflexionar sobre el estado del propio aprendizaje.
   Objetivos: Comprobar, criticar, revisar, formular, hipotetizar, experimentar, probar, detectar.
6. CREAR: Reunir el conocimiento y relacionarlo con elementos culturales para generar productos o proyectos de valor y originales que no existían con anterioridad.
   Objetivos: Generar, planear, producir, diseñar, construir, idear, elaborar.

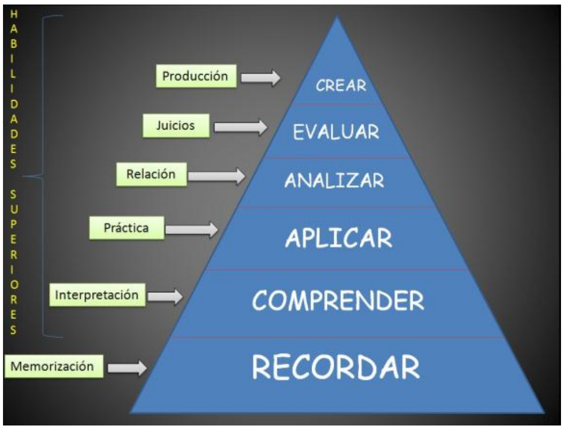


Figura 2. Pirámide de la Taxonomía de Bloom.

Con respecto a las metodologías a aplicar en el aula, teniendo en cuenta el contexto descrito y las justificaciones pedagógicas indicadas, voy a hablar de forma general de la experiencia llevada a cabo en el colegio Nuestra Señora del Pilar, el cual dirijo desde el año 2004 y, de forma particular, en el área de Matemáticas en la etapa de Secundaria en la que imparto docencia desde hace casi 20 años.

Estimulación Temprana.

Aprovechando los avances de la neurociencia y conscientes de la importancia de que, en edades tempranas, el cerebro reciba estímulos, en la etapa de Infantil desde hace más de 5 cursos se puso en marcha un programa de Estimulación Temprana, que se extiende hasta 2º de Primaria. Se trata de un programa para el desarrollo neurológico infantil, basado en las investigaciones de Glenn Doman. Consiste en aumentar la actividad del sistema nervioso mediante estímulos de cualquier índole, antes del tiempo ordinario, durante los primeros años del desarrollo infantil. Para ello nos apoyamos en el Programa de Conocimiento Enciclopédico y en el Programa Físico de Desarrollo Básico. Para ello contamos también con dos escaleras de braquiación.

Este programa nos está permitiendo contribuir de forma muy positiva en el desarrollo cerebral de nuestros alumnos y prevenir problemas de dificultades de aprendizaje, el problema de lateralidad entre ellos. Existen investigaciones que demuestran que un porcentaje elevadísimo de alumnos con dificultades de aprendizaje apenas gatearon, parte fundamental del programa de Estimulación temprana según Doman.

Inteligencias Múltiples.

La Teoría de las Inteligencias Múltiples de Howard Gardner marcó un antes y un después en nuestro centro, fundamentalmente en la etapa de Infantil, ya que dicha teoría se está utilizando con la intención de desarrollar o estimular las 8 inteligencias con las que según Gardner contamos y aprovecharlas para atender de forma individualizada a cada alumno, pudiendo llegar a todos utilizando las 8 inteligencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Esta línea de trabajo se está utilizando para el área de Matemáticas, tanto en la etapa de Infantil como en toda la etapa de Primaria, procurando que los alumnos aprendan matemáticas no sólo a través de la inteligencia Lógico-Matemática, sino también a través de las otras 7, Lingüística, Espacial, Interpersonal, Intrapersonal, Naturalista, Musical y Kinestésica, con actividades ligadas a cada una de estas inteligencias para que aquellos alumnos que tengan menos desarrollada la inteligencia Lógico-Matemática puedan aprender de forma eficaz.

Ingenio Matemático. Tratamiento de la Creatividad.

Por otro lado, consideramos que la creatividad es un aspecto fundamental a tener en cuenta en el desarrollo de nuestros alumnos. En concreto, en el área de Matemáticas es un elemento fundamental para poder resolver problemas de manera eficaz.

Resulta curioso comprobar que en algunos casos alumnos de los primeros cursos de primaria resuelven algunos problemas de forma más ingeniosa, con mayor creatividad, que alumnos del último curso de Educación Secundaria. Lo cual nos lleva a pensar que el propio sistema educativo y la forma en que, tradicionalmente, se ha enseñado y evaluado el área de matemáticas, ha llevado a los alumnos a utilizar una línea de aprendizaje excesivamente centrada en la memorización de fórmulas y modelos generales para la resolución de problemas y no ha facilitado el desarrollo de su creatividad.

Sirva como ejemplo una experiencia que planteamos hace ya más de una década en la que pedimos la resolución de un mismo problema a niños de los primeros cursos de la etapa de Primaria y a jóvenes del último curso de Secundaria. El problema consistía en calcular el número total de partidos que se celebrarían en un campeonato de tenis, en el que participaban 128 jugadores y en el cual se utilizaba un sistema de partidos eliminatorios a través del cual el que ganaba pasaba a la fase siguiente y el que perdía quedaba eliminado del torneo.

Rápidamente los alumnos de Secundaria procedieron a calcular el número de partidos de cada fase y a realizar la correspondiente suma, es decir, realizaron la siguiente operación:

$$Número\ de\ total\ de\ partidos: 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127$$

Sin embargo algún alumno de los pequeños, con 8 ó 9 años de edad, realizaba el siguiente razonamiento:

Si en cada partido se elimina a un jugador, juegan 128 y sólo puede ganar uno, necesariamente han de eliminarse a 127 jugadores y, por lo tanto, habrán de jugarse 127 partidos.

Dos formas diferentes de llegar a la misma solución y, sin embargo, la segunda parece más ingeniosa o creativa.

En general, a medida que los alumnos se van haciendo más mayores, contando con más herramientas o recursos matemáticos para resolver problemas, tienden a hacer uso de estrategias que requieran de un menor esfuerzo de ingenio o creatividad y, en ocasiones, como ocurre en este caso, los más pequeños, que cuentan con menos recursos, nos sorprenden al aprovecharlos de una forma más creativa.

Este ejemplo debe provocarnos, al menos, una reflexión sobre qué estrategias de enseñanza utilizamos para que nuestros alumnos aprendan matemáticas y, posteriormente, plantearnos qué queremos realmente que aprendan. Una de las críticas más frecuentes, con respecto a la asignatura de Matemáticas, que realizan los alumnos de Secundaria, es que no saben para qué sirven muchos de los contenidos que aprenden y que un porcentaje muy alto de su nota en esta materia corresponde a pruebas escritas que no tienen mucho que ver con su desarrollo competencial.

En el colegio Nuestra Señora del Pilar, de Soria, en lo relativo a la creatividad, se han puesto en marcha numerosas iniciativas, que iré citando a lo largo de esta intervención, con el objetivo de desarrollarla desde todos los ámbitos y desde edades tempranas.

Entre ellas está la habilitación de un Aula Multisensorial – Atelier que permite que nuestros alumnos trabajen e interpreten el arte desde todos los sentidos y, a través de un convenio de colaboración con el museo Thyssen, a modo de experiencia piloto, introducir contenidos de todas las áreas a través de sus obras de arte.

También hemos puesto en marcha, en horario lectivo, en la etapa de Primaria, diferentes talleres de Desarrollo de Capacidades, entre los cuales se encuentra uno de Ingenio Matemático, muy importante para el desarrollo de la creatividad.

Pero lo más importante para lograr el desarrollo competencial de los alumnos y, en concreto, para que desarrollen el pensamiento y la creatividad, tan importantes en Matemáticas, las medidas más relevantes implantadas corresponden a la metodología general que se utiliza en el centro desde los más pequeños, de 1 año de edad, hasta los más mayores, de Bachillerato, adaptando cada una de las metodologías a las edades correspondientes.

Aprendizaje Basado en Proyectos. Proyectos de Comprensión.

Las aportaciones realizadas por el doctor David Perkins, de la Universidad de Harvard, al ámbito educativo están resultando de mucha utilidad para que nuestros alumnos comprendan mejor y aprendan a pensar. De entre dichas aportaciones en nuestro centro se están aplicando los Proyectos de Comprensión y las Rutinas de Pensamiento.

Los Proyectos de Comprensión se están utilizando en todo el centro como fórmula eficaz para que nuestros alumnos comprendan, para que adquieran la habilidad de aplicar los conocimientos a situaciones nuevas dentro y fuera del aula y que puedan **realizar una amplia gama de actividades que requieran pensamiento con respecto a un tema,** por ejemplo, explicarlo, encontrar evidencia y ejemplos, generalizarlo, aplicarlo, presentar analogías y representarlo de una manera nueva.

En la etapa de Infantil todos los contenidos se trabajan a través de Proyectos de Comprensión, desarrollando 3 Proyectos diferentes cada trimestre. La Prehistoria, El Universo, La Edad Media, Las Olimpiadas, Educación Vial, El Rock, Egipto, Numancia, La vendimia,… son ejemplos de proyectos desarrollados. En cada uno de estos proyectos las matemáticas tienen su espacio y se trabajan desde la correspondiente temática del proyecto, contextualizando los contenidos dentro del mismo.

En Primaria las dos últimas horas de cada día se trabaja por Proyectos, globalizando contenidos de las áreas de Matemáticas, Lengua, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales, Artística, Educación Física y Religión.

En Secundaria y Bachillerato cada profesor debe desarrollar, con sus compañeros de otros departamentos, al menos 1 proyecto Interdisciplinar por trimestre. Esto supone que cada alumno de dichas etapas, entre todas las asignaturas, realiza al menos dos o tres proyectos interdisciplinares por trimestre y otros tantos PBL (Problem Based Learning) de los cuales hablaré un poco más adelante e impartiré un taller en este mismo congreso.

Actualmente mis alumnos de 2º ESO están iniciando un Proyecto Interdisciplinar, que relaciona Ciencias Naturales y Matemáticas y que tiene como tema central las enfermedades y en el que se toca, como tema de actualidad, el Ébola.

En este proyecto, desde el ámbito de las matemáticas se trabajan las potencias, la notación científica para la medición de cantidades microscópicas (masa de microorganismos) y macroscópicas (crecimientos de población), función exponencial (crecimiento de la bacteria coli, población contagiada en epidemias,…), las diferencias entre una función potencial y exponencial e, incluso, una pequeña introducción al concepto de logaritmo. Todo ello a partir de situaciones reales y de actualidad, resolviendo así otro de los grandes problemas que tradicionalmente se produce en nuestro sistema educativo, el distanciamiento entre la escuela y la realidad.

Esto, evidentemente, requiere de una enorme coordinación entre todo el profesorado del centro, liderada desde el Equipo Directivo del mismo y desde el Equipo Pedagógico y de Innovación.

En cada uno de estos proyectos, para el desarrollo de todas las actividades programadas, se hace uso también de un amplio abanico de metodologías que iremos conociendo a lo largo de la ponencia, entre ellas otra de las aportaciones del Dr. Perkins, de la Universidad de Harvard, las Rutinas de Pensamiento.

Rutinas y Destrezas de Pensamiento

Las **Rutinas de Pensamiento** también se están utilizando en nuestro centro desde Infantil hasta Bachillerato y en todas las áreas, con la intención de que nuestros alumnos aprendan a pensar y desarrollen principalmente sus competencias “Aprender a aprender” y “Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor”. Se trata de una metodología basada en el uso de patrones sencillos de pensamiento que pueden ser utilizados una y otra vez, hasta convertirse en parte del aprendizaje de la asignatura misma.

Para que sean efectivas deben realizarse con cierta frecuencia y en diferentes ámbitos, pero esto no resulta complicado porque todo el profesorado del centro las domina y son de muy fácil aplicación. Se trata de una herramienta metodológica muy potente.

Las Rutinas que se utilizan podemos clasificarlas en:

- Rutinas fundamentales: “¿Qué te hace decir eso?”, “Piensa, conecta, explora”, “Antes pensaba… ahora pienso”, “Veo, pienso, me pregunto”, “Puntos cardinales”.
- Rutinas de comprensión: “Conectar, extender, desafiar”, “Juega a explicar”, “Headline”, “Preguntas creativas”, “Preguntas estrella”, “Think pair share”, “Piensa, conecta, explora”, “¿Qué te hace decir eso?”, “3, 2, 1, puente”, “CSI (Color, Símbolo, Imagen)”, “Generar, clasificar, conectar y elaborar”.
- Rutinas para la creatividad: “Las preguntas estrella”, “¿Encaja?”, “Step inside”.
- Rutinas para profundizar en la verdad: “Expresa, apoya, cuestiona”, “Puntos calientes”, “Para, mira, escucha”, “Luz amarilla, luz roja”.

Aunque algunas de ellas se utilizan con mayor frecuencia en el área de Matemáticas, todas ellas son aplicables como estrategias para, a la vez que se trabajan contenidos, aprender a pensar, integrar el pensamiento dentro de la dinámica diaria de trabajo y, a través del uso rutinario de las mismas, que los alumnos las interioricen y formen parte de sus estrategias de pensamiento.

En Matemáticas pueden servirnos para que los alumnos, comprendan y sinteticen, apoyen con evidencias sus interpretaciones, sepan distinguir los elementos objetivos de sus interpretaciones, compartan diferentes puntos de vista o caminos para llegar a la solución, conecten y desarrollen ideas, sientan curiosidad por profundizar en temas, relacionen las matemáticas con otros ámbitos, etc. En definitiva, que el pensamiento sea el motor de sus acciones.

Figura 3. Paneles habilitados para Rutinas en un Aula de Matemáticas de ESO.

Figura 4. Rutina 3, 2, 1 puente en un Aula de Matemáticas de ESO.

Siguiendo en la línea de APRENDER A PENSAR, también se aplican las Destrezas de Pensamiento, propuestas por el Dr. Robert Swartz, también de la Universidad de Hardvard, dentro del Programa desarrollado por “The National Center for Teaching Thinking” del cual es el responsable. El objetivo es que los alumnos realicen cada tipo de pensamiento de manera cuidadosa, con habilidad, y en mayor profundidad de lo que lo haríamos de manera habitual.

Las Destrezas de Pensamiento ayudan a:

- Generar Ideas
- Clarificar ideas.
- Evaluar la razonabilidad de las ideas.
- Desarrollar y apoyar tareas complejas de pensamiento

En Matemáticas podemos hacer uso con cierta frecuencia de las siguientes **Destrezas de Pensamiento**:

- Relación partes y todo.
- Comparar Contrastar.
- Toma de decisiones.
- Escoger.
- Predecir.

- Explicación causal.
- Generar posibilidades.

Resulta cuanto menos curioso que, con la dificultad que habitualmente existe para que los alumnos comprendan las razones trigonométricas, las interpreten correctamente y tengan claro que los valores de seno y coseno no pueden ser inferiores a -1 ni superiores a 1, que sean capaces de alcanzar un mayor nivel de comprensión sin la intervención del profesor.

Han sido numerosas las ocasiones que me he encontrado en que un alumno no se sorprendía tras la obtención de un resultado superior a 3, por ejemplo, para la razón seno, a pesar de haber repetido más de 50 veces que dicha razón trigonométrica sólo podía tomar valores entre -1 y 1. Sin embargo, utilizando applets interactivos con la representación gráfica en la circunferencia goniométrica de dicha razón trigonométrica y haciendo uso del organizador que proporciona el Dr. Robert Swartz para la Destreza de Comparar y contrastar, sin la intervención del profesor, a ningún alumno se le escapa que el valor de seno y coseno se encuentra comprendido entre -1 y 1.

Con esta estrategia, sin la tradicional explicación del profesor, ha sido posible una mejor comprensión de las razones trigonométricas seno y coseno, un mayor conocimiento sobre la relación entre ambas razones trigonométricas y, además, los alumnos han mejorado su destreza para comparar y contrastar dos cosas, algo con lo que siempre hemos tenido problemas porque nunca se ha enseñado a los alumnos una estrategia para ello y, por el contrario, desde muchos ámbitos, siempre se ha pedido. Normalmente los alumnos se limitan a describir los dos conceptos que se pide contrastar sin llegar a relacionarlos.

Con el organizador, por este orden, los alumnos buscan semejanzas entre los dos conceptos, después localizan las diferencias y con respecto a qué se producen, seleccionan los patrones de semejanzas y diferencias más significativos de los dos conceptos y, por último extraen las conclusiones relativas a la comparación entre ambos conceptos. Algo tan, aparentemente, obvio resulta que no lo era.

Esta estrategia me ha resultado muy útil para, por ejemplo, comprender la función potencial y la exponencial y sus diferencias o para comparar dos cilindros formados con la misma hoja de papel en vertical o en apaisado, comprobando que con la misma superficie tienen diferente capacidad.

Figura 4. Destreza Compara-Contrasta en un Aula de Matemáticas de ESO.

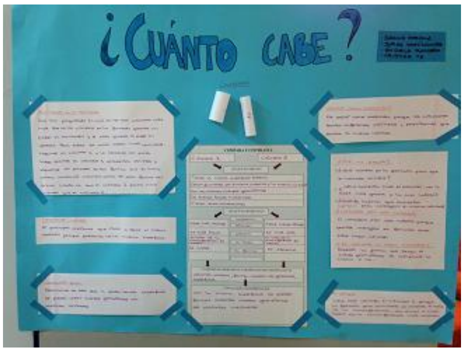


Figura 5. Resultado de una Destreza Compara-Contrasta en 2º ESO.

Aprendizaje Cooperativo

Por otro lado, otra de las metodologías con presencia en todas las etapas, es el **Aprendizaje Cooperativo**. Ya no se puede discutir la eficacia del aprendizaje cuando se realiza de forma cooperativa porque ya se han realizado las investigaciones y demostraciones oportunas. Por este motivo, en nuestro centro se hace uso de esta estrategia metodológica en todas las áreas y niveles.

Se utilizan tanto las estructuras Informal o Formal (con roles definidos dentro del grupo) propuestas por Johnson & Johnson (Roger y David), como las estructuras simples propuestas por Spencer Kagan, entre las cuales se encuentran "Lápices al centro", "Folio giratorio", "La mesa redonda", "Cabezas numeradas", "Lectura compartida", "1-2-4", "Parada de 3 minutos", "Los 4 sabios", "Lápices al centro", "Las páginas amarillas", "Pensando en parejas", etc. Todas ellas muy útiles en la resolución cooperativa de problemas y en el aprovechamiento de los conocimientos de los miembros de un grupo para lograr que todo el grupo domine dicho conocimiento.

Los Grupos Formales están resultando muy útiles trabajando por Proyectos, ya sean de Comprensión, PBL, o Proyectos Interdisciplinares.

Hasta ahora, trabajando en grupos de 3 ó 4 alumnos, se han asignado los siguientes roles con las siguientes funciones:

- Secretario-Portavoz: Recoge las aportaciones del equipo, representa al equipo en la asamblea, elabora documentos grupales y lleva el Cuaderno de equipo.
- Moderador: Da el turno de palabra, procura que todos participen, controla el nivel de ruido.
- Coordinador: Ayuda al grupo a seguir los pasos que marca la tarea, centra la atención en el trabajo, controla el tiempo.
- Observador: Observa el buen funcionamiento de los roles, ayuda a los demás, completa la ficha de observación grupal.

Sin embargo esta distribución genera cierto desequilibrio entre las competencias de cada miembro del grupo, ya que hay un rol, como el de Secretario-Portavoz, que requiere mayor esfuerzo que el de los demás, mientras que el rol de observador, del cual se prescinde si los grupos son de tres, tiene menor carga de trabajo.

En la actualidad aplicamos otros roles para los 4 miembros de un grupo. A través de Alfredo Hernando Calvo, psicólogo, investigador, profesor y escritor, director del proyecto escuela21.org, y más en concreto de su libro "La revolución de las escuelas21", tuvimos oportunidad de conocer los roles que aplican en *Escuela Nueva* en Colombia y los incorporamos a la línea de aprendizaje cooperativo de nuestro centro.

Escuela Nueva es el nombre que, en los años 80, un reconocido grupo de pedagogos colombianos dieron a un modelo pedagógico. Desde la década de los 60, un equipo de investigadores, liderados por la doctora Vicky Colbert, desarrollan una forma de estar en el aula que se caracteriza por la organización en círculos de aprendizaje, la generación de roles y la creación de secuencias didácticas que implican la participación activa y autónoma de los alumnos.

Basándonos en esta experiencia los roles y funciones que aplicamos son los siguientes:

- **Líder**: Se encarga de explicar y trasmitir las tareas a todos los miembros, orienta el trabajo del grupo y está atento a los roles y al proceso de trabajo, lleva registro del grupo, redacta informes sobre decisiones o presentaciones del grupo, verifica la validez del trabajo del grupo, se encarga de animar para ampliar y mejorar los resultados de cada tarea, presenta o representa al grupo, se comunica en tareas con otros grupos.
- **Dinamizador**: Fomenta la participación, se asegura de que todos los miembros participen y contribuyan por igual con sus ideas y opiniones, está atento a controlar el tiempo de cada intervención para que todos puedan hablar, anima en el reparto de tareas, ofrece apoyo verbal y no verbal a las ideas y a la participación de cada miembro, media en conflictos emocionales.
- **Pensador**: Está atento para que todos hayan entendido las instrucciones: Las explica, se asegura de que todos sepan llegar a la conclusión del resultado de la tarea, plantea preguntas que animan a profundizar más sobre cada actividad, lidera el uso de las estrategias cognitivas, anima al grupo para obtener más respuestas, integra las ideas de todos en las respuestas, media en conflictos sobre ideas y opiniones, anima a buscar fundamentos para defender las propuestas o respuestas.
- **Ordenador**: Controla el tono de voz para que todos hablen, de modo que se pueda trabajar, está atento al tiempo de cada actividad y al tiempo total del proyecto, controla el orden de los materiales, recoge los materiales al final y al principio de cada tarea, controla que los compañeros se muevan entre los grupos sin hacer ruido, registra frecuencias y tiempos.

Esta nueva distribución de roles y funciones nos resulta mucho más equilibrada, nos está dando mejor resultado al trabajar en cooperativo a través de Grupos formales y cumple mejor con el primero de lo que podemos considerar los componentes esenciales del aprendizaje cooperativo:

- Reparto equitativo de tareas: Existen diversas técnicas de aprendizaje cooperativo (grupos estables para un mes o para un trimestre o un curso, grupos menos formales para iniciar, desarrollar o concluir el trabajo de una actividad, grupos de alto rendimiento,…). Una de las claves del éxito para trabajar en equipo es que haya un reparto equitativo de tareas y que cada uno conozco bien las funciones a desempeñar en su rol.
- Distribución de los tiempos: Es necesario marcar plazos para las diferentes tareas. Si se pide la realización cooperativa de un trabajo y se espera a ver qué ocurre lo más probable es que el trabajo no salga adelante ni se quiera volver a trabajar de esta manera. Es mejor fijar tareas breves, de entre 10 y 20 minutos, donde cada uno tenga clara su tarea individual.
- Objetivo común: Los objetivos grupales sólo podrán alcanzarse si cada miembro logra sus objetivos individuales.
- Organización del aula: La disposición de mesas y sillas debe facilitar el cara a cara entre los alumnos miembros de cada grupo y entre los grupos debe haber distancia suficiente para que no se molesten entre ellos.
- Espacios y profesores: Las paredes del aula, corchos o tableros expositores pueden mostrar los trabajos realizados y se pueden organizar diferentes rincones que faciliten la realización de

diferentes tareas. El profesor debe moverse entre los grupos, interactuando con sus miembros, y ha de controlar los tiempos de las diferentes secuencias didácticas.

- Evaluación: En el proceso de aprendizaje cooperativo no debe evaluarse sólo el producto final. A través de rúbricas ha de valorarse también, entre otras cosas, las habilidades sociales que han puesto en práctica y debe tener su peso en la nota.

Este formato cooperativo de trabajo es muy útil cuando se utiliza la metodología de aprendizaje por proyectos. Tal y como he comentado anteriormente en nuestro centro se utiliza con frecuencia esta metodología, ya sea a través de Proyectos de Comprensión, PBL o Proyectos Interdisciplinares.

Figura 6. Alumnos trabajando en cooperativo con grupos formales

Figura 7. Alumnos trabajando en cooperativo con grupos formales

Aprendizaje Basado en Proyectos. PBL (Problem Based Learning)

Quizás en el área de Matemáticas, en las etapas de Secundaria y Bachillerato, el formato más frecuente sea el de PBL (Problem Based Learning) o ABP (Aprendizaje basado en problemas).

Se trata de una metodología centrada en el aprendizaje, en la investigación y reflexión que siguen los alumnos para llegar a una solución ante un problema planteado por el profesor. Se plantea como medio para que los estudiantes adquieran conocimientos y los apliquen para solucionar un problema real o ficticio, sin que el profesor utilice la lección magistral.

En este caso, en lugar de que el profesor explique contenidos que luego se aplican en la resolución de problemas, se utiliza un problema como punto de partida para que los alumnos investiguen y encuentren las herramientas que les permitan resolver el problema planteado inicialmente. De esta forma los alumnos son los protagonistas de su propio aprendizaje y, con este planteamiento, resolvemos el histórico problema de que los alumnos consideren que lo que están aprendiendo no sirve para nada, porque realmente están aprendiendo para resolver problemas.

En realidad el origen de esta metodología no es tan reciente. Surge en los años 60, en la Universidad de McMaster (Canadá), donde un grupo de educadores médicos reconoció la necesidad de replantear la forma de enseñar medicina con la intención de conseguir una mejor preparación de sus estudiantes. La Facultad de Ciencias de la Salud de la Universidad de McMaster estableció una nueva escuela de medicina, con una propuesta educacional innovadora que fue implementada a lo largo de los tres años de su plan curricular y que es conocida actualmente en todo el mundo como Aprendizaje Basado en Problemas.

En los últimos treinta años el aprendizaje basado en problemas ha sido adoptado por escuelas de medicina en todo el mundo. Más recientemente ha sido aplicado en una diversidad de escuelas profesionales y el interés en su incorporación en la educación superior en general ha ido incrementándose día a día. En la actualidad esta metodología se ha ido incorporando también en algunos colegios e institutos.

Sirvan como ejemplo de PBL en Matemáticas, en la etapa de Secundaria, los siguientes:

Para trabajar el cálculo de áreas y volúmenes en 2º de ESO:

Una prestigiosa empresa de verduras navarras en conserva, ubicada en Fitero, quiere conmemorar su XL Aniversario con una edición especial limitada de latas de tomate triturado.

Para ello decide preparar una remesa de 1.000 botes iguales (de diseño) de tomate triturado que regalará a todos sus clientes hasta que se agoten las existencias.

Por todos es conocida la excelente calidad del tomate que envasa esta empresa y consideran que será un regalo que, además de bonito, recogerá la esencia de la exquisitez de sus productos y permitirá premiar la fidelidad de sus clientes.

Para este bello cometido te han encargado el diseño de sus botes que deberán contener 1 kg de este excelente tomate triturado.

El material con el que se fabricarán dichos botes es un tipo especial de cristal que tiene un coste de 0,26 céntimos de € por cm^2. En total se han presupuestado 1.225 € para poder cubrir el coste de dicho material con el que se van a fabricar los botes y, bajo ningún concepto, se podrá exceder dicha cantidad presupuestada.

La forma de los botes puede ser cualquiera entre las siguientes: Cubo, Paralelepípedo, Ortoedro, Prisma, Pirámide, Cono, Cilindro, Tronco de Cono, Tronco de Pirámide, Esfera, Tetraedro, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro, o cualquier modificación o combinación que se pueda confeccionar con dichos cuerpos geométricos.

Es conveniente, para que puedas realizar los cálculos, que conozcas que la densidad del tomate que se va a envasar es de 1,27 kg/dm^3.

Haz uso de tu elevado nivel de cálculo y explota toda tu creatividad para que esta empresa consiga conmemorar su aniversario como la ocasión lo merece y realiza un bonito diseño que permita cumplir con los requisitos marcados y sin sobrepasar la partida económica presupuestada.

Para ello has de indicar todos los cálculos realizados con cada uno de los cuerpos geométricos que hayas seleccionado y has de explicar por qué has seleccionado el que será el diseño definitivo.

Por último exprime tu imaginación para diseñar la etiqueta, creando un símbolo que permita relacionar el contenido del envase con el trabajo matemático realizado.

De esta forma los alumnos, al contar con un presupuesto limitado, tienen la necesidad de relacionar superficie y volumen de los diferentes cuerpos geométricos. Habrán de ser creativos para encontrar un diseño atractivo, pero a la vez habrán de ser prácticos y seleccionar un cuerpo geométrico que con menor superficie (para no sobrepasar el presupuesto con que cuentan) tenga capacidad suficiente para contener la cantidad que se indican. Por otro lado habrán de relacionar masa y volumen y realizarán cálculos de superficies y volúmenes de diferentes cuerpos geométricos, tal y como lo harían con un listado de problemas repetitivos tradicionales.
En este caso no será el profesor quien explique los conceptos necesarios para resolver el problema, serán los propios alumnos los que realizarán las investigaciones oportunas siguiendo los pasos descritos por Morales y Landa en 2004.
A través de esta metodología los alumnos no solamente han trabajado de forma eficaz dichos contenidos matemáticos, sino que además dichos alumnos:

- Trabajan con mayor motivación.
- Su aprendizaje es más significativo.
- Desarrollan habilidades de pensamiento.
- Desarrollan habilidades para el aprendizaje.
- Integran un modelo de trabajo:
- Retienen mejor la información:
- Integran mejor el conocimiento.
- Las habilidades que desarrollan son perdurables.
- Incrementan su autodirección.
- Mejoran la comprensión.
- Desarrollan habilidades interpersonales y de trabajo en equipo.

Otro ejemplo para Secundaria es el siguiente, en concreto para 4º de ESO:
El ejército del aire ha detectado un objeto volante no identificado situado a una determinada altura sobre la recta que une dos localidades de nuestra provincia: Matalebreras y Villaciervos. Sin embargo dicho objeto ha conseguido salvar todos los controles de sus dispositivos tecnológicos y no consiguen saber a qué altura se encuentra exactamente. El único dato que manejan es que desde Villaciervos se divisa dicho objeto bajo un ángulo de 70° y desde Matalebreras bajo un ángulo de 40°, ángulos medidos sobre la recta que une dichas localidades.

Al estar acostumbrados a manejar los medios tecnológicos los técnicos del ejército del aire no son capaces de obtener manualmente la altura a la que se encuentra el OVNI, ni sobre qué punto se encuentra. Además, en caso de que la altura sea inferior a 5.000 metros deberán declarar el estado de alarma, motivo por el cual deberán obtener estos datos a la mayor brevedad posible.

Conscientes de que los alumnos de 4º de ESO del colegio nuestra Señora del Pilar han demostrado un alto nivel en la resolución de problemas, han solicitado su ayuda, pidiendo permiso al director del centro a través de un FAX, solicitando urgentemente los datos que precisan: ***Altura a la que se encuentra el OVNI y punto exacto sobre el que está situado****, indicando claramente el resultado sobre un mapa de la provincia.*

Además, dado que existe la posibilidad de que este problema se vuelva a repetir, también han solicitado un ***listado con todos los conceptos y fórmulas trigonométricas*** *necesarias para resolver este tipo de situaciones.*

Dicho listado debe elaborarse de tal forma que resulte claro y atractivo, pudiendo realizarse tanto sobre papel o cartulina como en soporte digital, haciendo especial énfasis en las fórmulas trigonométricas asociadas a los triángulos, tanto triángulos rectángulos como de otro tipo.

Finalmente todos los materiales generados habrán de presentarse y exponerse de forma clara, junto con los datos solicitados relativos a la posición del OVNI, a los altos mandos del ejército para su conocimiento.

¡Muchísima suerte en esta peligrosa misión! El futuro de nuestra provincia y, posiblemente, de la humanidad está en vuestras manos.

Tradicionalmente era el profesor el que facilitaba y explicaba las fórmulas y, posteriormente, realizaba y luego proponía problemas del tipo al que aquí se plantea. Pero en este caso es al revés, se plantea el problema de inicio y son los alumnos los que han de investigar y encontrar las herramientas para resolverlo. La experiencia me dice, después de hacer uso durante más de 5 años de esta metodología, que aunque se realicen menos problemas en el aula de los que se realizaban con un modelo más tradicional, los resultados en las mismas pruebas escritas son mejores con este modelo. La comprensión de los contenidos es mayor y su habilidad para aplicarlos se dispara.

En ocasiones las investigaciones que se trabajan a través de los PBL van mucho más allá. Tal y como se muestra en el siguiente PBL, dirigido a alumnos de 2º ESO, un fragmento de un artículo de una publicación científica puede servir para introducirlo. En este caso se propone el siguiente PBL dentro de la Unidad Didáctica de Potencias:

Has sido contratado por un famosa empresa de elaboración de fármacos, para su prestigioso laboratorio de I+D+I, para poder trabajar en las investigaciones de Stephen J. Hagen, que en su artículo sobre crecimiento bacteriano "Exponential growth of bacteria: Constant multiplication through division" de American Journal of Physics 78, de Diciembre 2010, dice en uno de sus párrafo:

"…El mejor ejemplo del crecimiento exponencial es el crecimiento de las bacterias en un cultivo. Una sola bacteria Escherichia coli a 37 °C se puede dividir una vez cada 20 minutos; repitiendo este proceso durante 11 horas se obtiene una colonia con casi diez mil millones de individuos. Si hubiera nutrientes suficientes en dos días la masa de esta colonia excedería la masa de la Tierra. Obviamente, no los hay. Una sola célula que crece durante 10 horas en un volumen de 10 mililitros de un cultivo con nutrientes se puede dividir unas 30 veces para dar lugar a unos mil millones de células con una densidad cercana a 10 millones de células por mililitro…"

Desde el laboratorio para el que has sido contratado se quiere contrastar dichas afirmaciones y para ello serán necesarios tus excelentes conocimientos sobre potencias. Dispones de un microscopio de alta precisión que te ha permitido obtener las siguientes mediciones, realizadas a 37 °C el día 5 de noviembre:

Hora	08:00	08:20	08:40	09:00	10:00	11:00	12:00
Nº de bacterias Escherichia coli	7	14	28	56	448	3584	28672

¿Estas mediciones te permiten confirmar las afirmaciones realizadas por Stephen J. Hagen?

Además de responder a esa cuestión la empresa que te ha contratado no se conforma con esto, te pide hacer lo siguiente:

- *Realiza un gráfico, indicando la hora en el eje OX y el número de bacterias en el eje OY que te permita visualizar el crecimiento de esta bacteria.*

- *Realiza de nuevo la tabla, indicando el nº de bacterias en forma de potencia, y estimando el resultado de la medición a las 12:20, 12:40, 13:00, 13:20, 13:40 y 14:00.*
- *Expresa la fórmula que permite obtener el nº de bacterias, N(t), en función del tiempo t, expresado en intervalos de 20 minutos transcurridos desde la primera medición.*
- *Indica a cuánto ascenderá la masa de la colonia a las 13:00 y a las 14:00.*
- *Indica a partir de qué hora, si hubiera nutrientes suficientes, la masa de esta colonia superará la masa de la luna.*

Por otro lado, tras la situación de alarma generada con la propagación de la enfermedad del Ébola, esta empresa considera necesario concienciar a la sociedad de la importancia de prevenir la enfermedad y tomar medidas drásticas en caso de padecerla. Para ello te solicita que hagas una estimación del tiempo que tardaría en padecer la enfermedad toda la humanidad en caso de no tomar ninguna medida para evitar el contagio. Es conveniente que para ello hagas una estimación media del número de personas al día con las que un enfermo de Ébola puede estar en contacto. Razona tu respuesta.

A través de este PBL los alumnos profundizan mucho más en el conocimiento de las potencias, en su aplicación y en su utilidad en el tratamiento de un tema de actualidad.

Aunque se están tocando contenidos que corresponden a cursos superiores, como son la función exponencial o la introducción del logaritmo, todos los alumnos, de forma cooperativa, resuelven el problema y comprenden mucho mejor los correspondientes contenidos, a la vez que desarrollan las 7 competencias clave.

Gestión de los espacios.

Por último no quiero dejar pasar la oportunidad de hablar de los espacios. La aplicación de este tipo de metodologías requiere también replantearse los espacios de trabajo. Cuando se produce este cambio metodológico es necesario desprenderse de la tradicional distribución de mesas en fila, a través de la cual el alumno sólo ve el cogote del compañero de delante, e incorporar nuevas distribuciones de los espacios.
En los últimos años se ha experimentado con éxito en los diseños escolares. David Thornburg propone la creación de tres espacios polivalentes en el aula, que bautiza (con más o menos acierto) como Fuego de campamento, Abrevadero y Cueva. Dichos espacios consisten en lo siguiente:

- Fuego de campamento: Zona dedicada a presentaciones y ponencias. Espacio en el que los alumnos pueden sentarse para escuchar a un comunicador. Es interesante que disponga de pantalla de proyección. Lo ideal es que los alumnos puedan sentarse en forma de semicírculo o siguiendo un ángulo de 90° o superior. Lo ideal es un pequeño anfiteatro de 3 ó 4 peldaños.
- Abrevadero: Espacio para el trabajo en equipo. La disposición de las mesas será para el trabajo cooperativo, mesas circulares por ejemplo, y permiten dar autonomía a los alumnos en su aprendizaje.
- Cueva: Espacio para el trabajo individual. Debe ser un espacio cómodo, dotado de pufs, alfombras, sillones, sillas con cojines o sofás, por ejemplo.

A todo esto se le pueden añadir paneles para exponer organizadores de pensamiento o los trabajos que se producen, aprovechar también las paredes como pizarras (con vinilos adhesivos o papel continuo), pintar con rotuladores en las ventanas o llenarlas de post it, crear tendederos para colgar trabajos o imágenes, o extender el aula a los pasillos considerando todas las instalaciones como un espacio de aprendizaje en su totalidad.

Figura 8. Zona Cueva en un Aula de Matemáticas de ESO.

Figura 9. Zona Abrevadero en un Aula de Matemáticas de ESO.

Para terminar, una frase de Antonio Paz que invita a la reflexión:

"Las masas humanas más peligrosas son aquellas en cuyas venas ha sido inyectado el veneno del miedo… del miedo al cambio."

Para hacer referencia al artículo:

Abellón, O. (2015). Metodologías activas para un aprendizaje eficaz de las Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 31-47). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

APRENDIZAJE COOPERATIVO: ¿CUÁLES SON LAS CLAVES PARA QUE FUNCIONE?

Paloma Gavilán Bouzas

Consejería de Educación, Cultura y Deportes de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha.

I.E.S. Luis de Lucena, Guadalajara.

E.A.E.H.D., Guadalajara

Resumen

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas requieren una metodología activa que impulse tanto la autonomía de los estudiantes como su colaboración. El aprendizaje cooperativo se nos presenta como una alternativa eficaz para lograrlo, facilitándonos además atender a la diversidad en el aula. Se trata de un método de trabajo que, como todos, tiene sus ventajas y sus limitaciones. Es necesario conocer cómo hay que estructurarlo para que dé sus mejores resultados. La respuesta a la pregunta "¿Cuáles son las claves para que funcione?" nos irá marcando el camino. Una vez que conozcamos las claves, tendremos que seguir avanzando y conocer distintas técnicas, métodos y dinámicas que nos faciliten trabajar cooperativamente en clase.

Palabras clave: *aprendizaje cooperativo, claves de funcionamiento, interdependencia, interacción entre iguales, doble responsabilidad, habilidades sociales.*

INTRODUCCIÓN.

Cuando los estudiantes entran en clase por primera vez y miran a sus compañeros y compañeras de aula, piensan el tipo de relación que van a establecer entre ellos. Pueden ver en ellos contrincantes a los que hay que ganar, como ocurre a veces en 2º de Bachillerato; en este caso el estudiante piensa que su éxito depende de que los demás no logren el suyo. La presión por las notas de selectividad lleva a los estudiantes a establecer entre ellos una relación competitiva. No pueden sacar todos matrícula, ni cursar todos los estudios que desean. Esta relación se establece también en otros cursos aunque no tengan tan cerca la selectividad. También pueden mirar a los demás estudiantes y pensar que su éxito no tiene nada que ver con el de ellos; que su éxito depende de sí mismos y de la relación que establezcan con el profesor, su auténtico interlocutor. En este caso los estudiantes no se sienten vinculados académicamente entre ellos. En el aula se trabaja de forma individual, cada uno con su material, no se comparte nada y no se habla. Por último, pueden percibir que sus compañeros de clase van a ser sus aliados en el estudio, que pueden contar con ellos, que les van a ayudar y van a aprender juntos. Que su éxito personal está vinculado al éxito de todos los demás. En este caso estarán haciendo aprendizaje cooperativo en clase.

Morton Deutsh, discípulo de Kurt Lewin, ya en 1949 formuló su teoría de la interdependencia social; y David Johnson, junto con su hermano Roger, ampliaron el trabajo de Deutsch al aula, afirmando que los resultados que se logran en educación dependen del tipo de interdependencia social que se estructure en el aula. Así, según se estructure la interdependencia en el aula se obtendrán unos resultados u otros. Entienden los hermanos Johnson que la clase se puede estructurar de tres formas a las que denominan interdependencia negativa, positiva y ausencia de interdependencia.

La interdependencia negativa da lugar a una interacción opositora donde cada persona dificulta y obstruye los esfuerzos de los demás por aprender, ya que no hacerlo iría en perjuicio propio. Este es el caso de la situación competitiva.

La interdependencia positiva da lugar a una interacción que promociona a los individuos, facilitando el esfuerzo de los demás por aprender. Éste es el caso de la situación cooperativa.

Y la ausencia de interdependencia social da lugar a una situación individualista, donde cada persona trabaja únicamente en beneficio propio.

Como afirman los hermanos Johnson (1989: 167), “La interdependencia social existe cuando los individuos comparten metas comunes y cada resultado individual se ve afectado por las acciones de los otros. Debe diferenciarse de la dependencia social (los resultados de una persona son afectados por las acciones de una segunda persona pero no viceversa) y de la independencia social (los resultados individuales no se ven afectados por las acciones de cada una de las otras personas). Hay dos tipos de interdependencia social: cooperativa y competitiva. La ausencia de interdependencia y de dependencia da lugar a los esfuerzos individualistas. Para los humanos esta interdependencia social es como el agua para los peces. Porque estamos inmersos en ella no consideramos su presencia o importancia. No hay nada más básico para la vida que trabajar con, en contra o separadamente de las demás personas. Y de los dos tipos de interdependencia social, la más importante es la cooperación”.

Después de trabajar cooperativamente con estudiantes durante varios años hemos comprobado las ventajas que a su juicio aporta esta forma de trabajar en el aula, de las que destacamos aquí algunas respuestas:

- Que te puede costar menos entenderlo al explicarlo con sus propias palabras y que puedes dedicarle más tiempo para entenderlo del todo.
- Que los compañeros lo explican con un lenguaje diferente, el lenguaje que todos sabemos usar y por eso me siento mejor.
- Que van más a tu ritmo, se explican “más con tus palabras”
- Que te lo explican a su forma y que si no lo entiendes te lo explican de otra. Aunque la profesora te lo explique algunas veces no te enteras y es bueno que te lo explique un compañero.
- Que te lo repiten más veces, saben igual que tú.
- Que aprendes a expresarte mejor y a colaborar con los demás. También a expresarte de varias formas y te das cuenta si tú lo sabes o no.
- Otros métodos para solucionar un ejercicio por ejemplo y quizás de una manera más rápida.
- Aprendes a explicarte de una manera correcta para que te entiendan y comprendan.
- Lo asimilas mejor y además ayudas al compañero.
- Que se te queda mejor porque recuerdas lo que ya te han explicado.

Pero estas ventajas y estos beneficios no se obtienen siempre y en cualquier circunstancia. Para que el Aprendizaje Cooperativo dé sus mejores resultados es necesario que esté bien estructurado. ¿Y cuáles son las claves para que funcione? Los hermanos Johnson (1994) ya definieron los cinco elementos básicos sin los cuales no es posible formar un grupo cooperativo. Estos cinco elementos constituyen la condición necesaria para que un grupo trabaje cooperativamente.

PRIMERA CLAVE: SOMOS UN EQUIPO.

¿Qué quiere decir somos un equipo? ¿Por qué somos equipo? Ser un equipo es algo más que sentarnos juntos en grupos de cuatro. Ser un equipo quiere decir que no es posible alcanzar mi éxito a no ser que lo alcancen también mis compañeros. Quiere de decir que tenemos una tarea que resolver entre todos, una meta común que alcanzar y compartimos una recompensa que va a depender de los esfuerzos que hagamos cada uno de nosotros. Es lo que se conoce como interdependencia positiva. Tener clara la tarea y la forma de realizarla es una de las claves para que funcione el equipo. Los profesores, a la hora de preparar nuestras clases, nos preguntamos qué les vamos a contar, cómo se lo vamos a contar y qué actividades les vamos a proponer, pero generalmente no pensamos en cómo van a hacer las actividades para que todos participen y se potencien. Los estudiantes deben saber qué hay que hacer (tiempo de que disponen, nivel de exigencia, resultado esperado); cuál es el objetivo (por qué y para qué hacemos esto); cómo lo vamos a hacer (técnica cooperativa que vamos a emplear); con qué materiales contamos y cuál es la producción visible final que tenemos que entregar. Proponer tareas interdependientes, es decir, que tengan que resolver entre todos los miembros de un equipo, es una de las claves para que el aprendizaje cooperativo funcione. Y hay muchas formas de proponer tareas interdependientes; en función del tipo de tarea que queramos realizar, escogeremos una técnica cooperativa u otra.

No sólo la tarea tiene que ser interdependiente; también la meta a alcanzar que es lograr el mayor aprendizaje de todos los miembros, es interdependiente. No basta con que algunos hayan aprendido lo que se está haciendo. Es misión del equipo que todos lo aprendan; todos. Si no, no se consigue la meta. Se trata de una meta interdependiente.

La recompensa, la nota, también es interdependiente. Es decir, la nota de cada estudiante se va a ver afectada en mayor o menor grado por la calidad de los esfuerzos individuales de sus compañeros de grupo. Lo que haga cada uno va a repercutir en su nota y en la de los demás. Hay muchas formas de establecer los criterios de calificación de modo que exista una nota grupal, que proviene de lo que los estudiantes hacen cuando trabajan en equipo, y una nota individual, proveniente de lo que cada estudiante hace cuando trabaja de forma individual. Para la configuración de la calificación final de cada estudiante existen variadas opciones en función del peso que queramos dar a la nota de grupo.

Cuando la interdependencia positiva está bien estructurada es cuando surgen los conflictos cognitivos. Cuanto mayor sea la interdependencia positiva con más seguridad se producirá el conflicto intelectual. Al conflicto se llega cuando las personas del grupo se involucran en una discusión en la que vierten sus puntos de vista, sus diferentes posturas, sus opiniones, etc. En el proceso de resolución del conflicto se produce un cuestionamiento de las posturas de cada persona, una búsqueda activa de información, se reconceptualiza el conocimiento; y, consecuentemente, aumenta el dominio y la retención de la materia discutida y se observa un nivel mayor de estrategias de razonamiento. La resolución del conflicto cognitivo es, sin duda, motor y fuente de aprendizaje. Tanto los que dan explicaciones como los que las reciben se benefician de esta situación.

SEGUNDA CLAVE: NOS AYUDAMOS.

Los estudiantes se encuentran cara a cara con sus compañeros a fin de realizar las tareas y contribuir con el esfuerzo propio al éxito de los demás. Como somos un equipo, nos ayudamos; eso quiere decir que cada uno de nosotros nos esforzamos para que los demás alcancen la meta prevista. Es lo que se conoce como interacción cara a cara; interacción que ayuda a la promoción de cada estudiante. Esta interacción incluye dar y recibir ayuda de los compañeros del grupo, mantener con ellos una comunicación efectiva, manejar constructivamente los conflictos que surjan y mantener actitudes de confianza hacia los demás. La interacción cooperativa se caracteriza por los esfuerzos que hace cada persona por ayudar a los demás.

Pero ¿qué hacer para que los estudiantes se ayuden?

1.- Formar grupos pequeños de 2, 3 o 4 personas. En los grupos pequeños se nota más la necesidad de cooperar y hacer la tarea; es más difícil escaparse. El grupo pequeño contribuye a que los estudiantes se sientan más comprometidos con su trabajo y el trabajo de sus compañeros.

2.- Facilitar que el grupo disponga de tiempo suficiente para encontrarse. En caso contrario, los integrantes no logran establecer auténticas relaciones de trabajo con sus compañeros.

3.- Alentar a los integrantes del grupo para que contribuyan con su ayuda y esfuerzo al bienestar de todos los componentes. Esto lo conseguimos observando el trabajo de los grupos y recompensando su buen hacer.

El hecho de que el profesor se acerque a cada grupo con una guía de observación en la mano facilita su compromiso con la tarea.

4.- Anticipar que sólo apoyándose entre ellos podrán conseguir el objetivo que tienen como grupo. Ellos son su principal recurso de aprendizaje.

5.- También ayuda la presencia de un estudiante con el rol de observador; este rol consiste en anotar y comprobar el trabajo de los compañeros de grupo.

¿Cuál es la clave de la interacción cooperativa? Sin duda, la ayuda que se prestan unos a otros. El hecho de dar y recibir ayuda desempeña un papel fundamental. La petición de ayuda es una habilidad necesaria que debe fomentarse, ya que permite a los estudiantes participar más activamente en la resolución de la tarea. Es muy frecuente que los estudiantes que necesitan ayuda, no la pidan por miedo a parecer inferiores a sus compañeros o a ser juzgados por el profesor al evidenciar sus deficiencias. También es común que estos estudiantes, cuando se deciden a solicitar ayuda del profesor, tengan que esperar el tiempo necesario para poder ser atendidos. En los grupos cooperativos los estudiantes pueden preguntar sin reparos y el número de personas que les puede responder se multiplica, aumentando las oportunidades de esclarecer sus dudas (Nelson-Le Gall, 1995). Pero no todo tipo de ayuda resulta beneficiosa ni es siempre conveniente.

¿Cuáles son las características de una buena ayuda? Las características de una buena ayuda han sido detalladamente estudiadas por Vedder (1985) y su efectividad depende de:

- El momento en que la ayuda es ofrecida.
- La relevancia de la ayuda en relación con lo que se demanda.
- La elaboración de la ayuda dada.
- Si es o no comprendida por la persona que la necesita.
- Si quien la recibe tiene la oportunidad de usarla para resolver el problema y efectivamente la pone en práctica.

Los estudiantes que trabajan en grupos cooperativos, se encuentran en la situación ideal para que sucedan las circunstancias anteriores: están presentes para que la ayuda llegue en el momento oportuno, conocen las dificultades de los compañeros porque acaban de pasar por ellas, pueden dar las explicaciones al nivel de quien las va a recibir y con un lenguaje entendible; y pueden verificar si lo expresado ha sido entendido y puesto en práctica. En ocasiones, el mero hecho de hacer el esfuerzo y verbalizar qué es lo que el estudiante no entiende hace que lo comprenda: “No entiendo por qué… (y expresa lo que no entiende)… Ah! Ya! Ya lo acabo de entender!”. Esto se da con bastante frecuencia. Pero si sigue sin comprenderlo, la persona que tiene al lado se encarga de ayudarle en el mismo momento en que necesita la ayuda. Tan importante como no demorar la atención al estudiante que la necesita es que éste formule su petición de ayuda en cuanto la detecte. Es decir, que no espere y deje pasar el tiempo hasta que la necesidad de ayuda sea total. Pedir y recibir la ayuda en el momento adecuado contribuye al aprendizaje, al buen funcionamiento de los grupos y a la ejecución en tiempo de la tarea.

Además de pedir la ayuda en el momento en que se necesita, la forma de pedirla también es importante. Se debe pedir de forma explícita y ajustada a lo que se necesita. No es forma de pedirla poniendo mala cara y diciendo que no se entiende nada… “Por favor, me acabo de perder y no entiendo esto. Me lo puedes explicar?” Esto, se refiere a algo concreto. Verbalizo exactamente qué es lo que no entiendo en el momento en que lo detecto. Y, como contrapartida, alguien del grupo me dedica su atención en el momento en que la necesito y ajustada a lo que necesito (sin remontarse a los inicios…). Finalmente, se comprueba si la ayuda ha sido entendida y, quien la recibe, la pone en práctica de manera inmediata.

¿Quiénes se benefician de la ayuda? Cuando decimos “Nos ayudamos” queremos decir que realmente nos ayudamos unos a otros. No sólo se beneficia el estudiante que recibe la explicación, sino también el que la da. Explicar es una buena forma de aprender. Webb (1995: 108) ha estudiado los beneficios que reciben quienes dan ayuda: “Dar explicaciones debe tener importantes beneficios tanto para quien da como para quien recibe. Bargh y Schul (1980) propusieron que el proceso de clarificación, organización y reorganización del material, que forma parte de formular y dar explicaciones, aumentan la propia comprensión. Y, además, posiblemente los descubrimientos más consistentes en estudios previos es que dar explicaciones está asociado positivamente con el aprendizaje, aun después de controlar la habilidad o el aprendizaje previo”. No en vano, muchos de nosotros, profesores de Matemáticas, hemos experimentado cómo vernos en la necesidad de hacer entender a nuestros estudiantes ciertos conceptos ha hecho que realmente los comprendiéramos nosotros. Vernos en la situación de tener que explicarlos, ejemplificarlos, aplicarlos… nos ha llevado a su auténtica comprensión.

Así pues una ayuda efectiva tiene un positivo impacto en el aprendizaje; pero una ayuda que no reúna las características anteriores, como puede ser el mero hecho de transmitir información o dar respuestas y soluciones hechas, no produce o produce escasos beneficios.

Las conclusiones a las que conducen los trabajos de investigación sobre la ayuda dada y solicitada en los grupos cooperativos se pueden resumir así (Gavilán, 2012):

- Cuando los estudiantes expresan la necesidad de ayuda y reciben la ayuda adecuada, aplicándola a la solución del problema, mejoran su aprendizaje. Por el contrario, si falla alguna de estas condiciones, no se produce o se producen escasas mejorías.
- Los efectos de no participar en las discusiones del grupo dependen del nivel de habilidad de los estudiantes.
- Una ayuda elaborada mejora los resultados.
- Otros factores determinantes son: persistir en la petición de ayuda a los compañeros hasta lograr la ayuda necesitada; hacer uso inmediato de la ayuda recibida para comprobar que ha sido entendida; explicar lo aprendido a otros estudiantes para consolidarlo.

¿Cómo podemos potenciar que se ayuden? Para potenciar el intercambio de ayudas es importante estructurar una recompensa a la cooperación basada en el aprendizaje de todos los miembros. Es decir, que la nota del grupo se mejore si todos logran superar un determinado nivel de ejecución. De este modo, se sienten más responsables del aprendizaje de sus compañeros y consecuentemente más inclinados a dar y recibir ayudas de calidad. También puede ser una forma indirecta de potenciar la ayuda el establecer una tarea interdependiente; una tarea que tengan que resolver entre todos y llegar a unos resultados compartidos por todos, de modo que los estudiantes tengan que compartir lo que han aprendido con el resto del grupo.

La ayuda mutua también se potencia promoviendo que los estudiantes firmen la tarea resuelta en el cuaderno de sus compañeros; eso quiere decir, primero, que están de acuerdo con lo que está escrito; segundo, que ellos también saben resolverlo; y tercero, que garantizan que las demás personas del grupo también saben.

TERCERA CLAVE: SOMOS MÁS QUE RESPONSABLES.

¿Por qué decimos que somos más que responsables? Cuando trabajamos de forma individual, solo somos responsables de nuestro aprendizaje; pero cuando trabajamos en equipo, somos también responsables del aprendizaje de los demás. Asumimos así una doble responsabilidad: individual y grupal. Aprendemos juntos y sabemos poner en práctica lo aprendido de manera individual. La finalidad del aprendizaje cooperativo es formar estudiantes cada vez más capaces y autónomos, por eso decimos que aprendemos en grupo y después somos capaces de actuar de forma individual. Cuanto más arraigada esté la interdependencia positiva, los estudiantes sentirán con más fuerza la implicación de su responsabilidad personal en el progreso del grupo.

Por lo tanto, se debe dar una doble evaluación: evaluación de la responsabilidad del grupo y evaluación de la responsabilidad individual. Con ello se trata de evitar el camuflaje de personas que van a rastras del grupo, aprovechándose del trabajo de los demás.

¿Cómo fomentamos esta doble responsabilidad?

- Formando grupos de tamaño reducido. Cuanto menor es el grupo mayor es la responsabilidad individual y grupal.
- Pasando pruebas individuales a los integrantes de cada grupo, de modo que sus resultados reviertan en la nota del grupo (dando una recompensa a la cooperación basada en el aprendizaje de sus miembros).
- Observando la participación de cada persona y su contribución al trabajo del grupo y registrando las observaciones en la guía de observación.

CUARTA CLAVE: NOS CUIDAMOS.

El aprendizaje cooperativo incide de manera especial en la educación integral de los estudiantes, promoviendo tanto su desarrollo personal, como intelectual y social. Por ello hacemos especial insistencia en el desarrollo de las habilidades sociales. Cuando los estudiantes trabajan cooperativamente se ocupan tanto de su aprendizaje como del aprendizaje de sus compañeros: se ayudan, se apoyan, se animan; en definitiva, se cuidan. Dejan de mirarse a sí mismos para mirar también a los otros. Esta es una aportación, a mi juicio, muy interesante que supone un cambio en el paradigma tradicional de la educación, que prima el trabajo individual. Desde esta nueva perspectiva decimos: ocúpate de lo tuyo y de los de tu alrededor. Cuida tu entorno y a las personas que están en él.

¿Y por qué hacemos tanta insistencia en la puesta en práctica de las habilidades sociales? Porque sin ellas no es posible trabajar en grupo. Es más, sin ellas no es posible vivir en sociedad. La socialización es posible gracias al contacto interpersonal y este proceso comienza desde el nacimiento. Entre los agentes de socialización hay que destacar la importancia de las interacciones entre niños; los propios niños influyen en el proceso de socialización de los demás niños, fundamentalmente en tres aspectos: facilitando un contexto donde se pueden aprender y practicar las destrezas sociales; ofreciendo la posibilidad de participar en actividades de grupo, comparando su situación con la de los demás y formándose una idea ajustada de sí mismo; y aumentando la seguridad y confianza que proviene de sentirse miembros de un grupo (Gavilán, 2010).

Hacia el final de la infancia, como ha evidenciado la psicología evolutiva, es cuando los grupos adquieren mayor importancia. Se da un cambio cualitativo en el proceso de socialización, pasando de la vinculación al mundo de los adultos a la socialización por el grupo de iguales, lo que desarrolla la autonomía e independencia de los niños. Es precisamente en esta etapa de la socialización cuando el aprendizaje cooperativo se hace más necesario. Pero no cualquier tipo de interacción entre estudiantes desemboca en beneficios; es el tipo de interacción lo que va a determinar la consecución de los logros.

¿Y cuál es la clave para que los estudiantes tengan interacciones cooperativas y se cuiden? Pues no es otra que trabajar las habilidades sociales con continuidad, revisarlas, premiarlas y potenciarlas. Trabajamos habilidades sociales de comunicación, confianza, liderazgo, resolución de conflictos, fiabilidad, toma de decisiones… Algunas de las que enfatizamos son:

- Conocer a cada persona del grupo y respetarla.
- Comunicarse con sinceridad y escuchar a los demás.
- Aceptar a los demás y servirles de apoyo cuando lo necesiten.
- Resolver los conflictos constructivamente.
- Aportar el propio trabajo y no aprovecharse del de los demás.

Una buena forma de ver qué comportamientos son necesarios para trabajar bien en grupo puede ser poner a los estudiantes un trabajo de grupo, pero sin indicarles ninguna pista de cómo lo tienen que hacer, de qué tiempo disponen, qué se espera de ellos, cómo deben hacerlo… ni siquiera observarles cómo lo hacen; y analizar después cómo se han sentido y las causas por las que no ha funcionado. Esa reflexión les llevará a determinar en pequeños grupos las habilidades sociales necesarias para trabajar cooperativamente. A continuación, en una puesta en común, podemos delimitar las diez más importantes y hacer el decálogo para todo el grupo. Cada semana o cada quince días se trabajará de forma más intensa una de ellas y su buen hacer proporcionará puntos extra al grupo, que influirán en la mejora de su calificación. Es importante que quede claro qué entendemos por cada una de las diez cosas que hemos escrito en el decálogo; para ello pondremos ejemplos o haremos dramatizaciones de cada una de las conductas esperadas.

QUINTA CLAVE: REFLEXIONAMOS SOBRE LO QUE HACEMOS.

El hecho de que el aprendizaje cooperativo no sea la forma habitual de trabajo en nuestras aulas hace que sea necesario insistir y tener muy en cuenta las claves de su funcionamiento. Aprender cooperativamente no es poner a los estudiantes a trabajar en grupos y sentarse en la mesa del profesor. Para que el aprendizaje cooperativo funcione ya hemos dado cuatro claves y la quinta es revisar cómo funcionan las otras cuatro. Tenemos que pararnos periódicamente a reflexionar sobre cómo estamos actuando: cuáles son las acciones útiles y que ayudan al aprendizaje de cada uno de los miembros del grupo y por lo tanto, debemos potenciar; y cuáles no lo son y debemos evitar. Es importante que cada grupo disponga de tiempo suficiente para valorar la calidad de sus interacciones. Nuestro papel como profesores mientras los grupos están trabajando consiste en observarles y escucharles atentamente, tomando notas en la guía de observación. Los debates de nuestros estudiantes son ventanas abiertas a su forma de pensar y de discurrir; está pensando en voz alta y eso nos va a dar valiosas pistas sobre su forma de aprender.

¿Qué hacemos para que los estudiantes reflexionen sobre lo que hacen? Les facilitamos un tiempo y un modo de hacerlo. Cada diez, quince o veinte días, dedicamos los últimos minutos de clase a esta reflexión, que será individual o grupal, dependiendo de lo que nos interese enfatizar en cada momento. Para ello, prepararemos con antelación el cuestionario de revisión de su funcionamiento preguntándoles cómo han actuado, qué actuaciones han ayudado al grupo y cuáles hay que mejorar, cómo ha sido su compromiso con su aprendizaje y el de las demás personas de su grupo… y todo aquello sobre lo que veamos necesario reflexionar. De todo ello quedará constancia por escrito, lo que nos permitirá leerlo, alabar las buenas conductas y reconducir las otras.

Las conclusiones de las investigaciones llevadas a cabo por Stuart Yager sobre los resultados académicos y no académicos de grupos cooperativos en los que se discute su funcionamiento y se trata de mejorar su efectividad, grupos cooperativos en los que no se hacen revisiones de grupos y grupos de aprendizaje individual, indican que tanto los estudiantes de alto, medio y bajo nivel, en el primer caso puntuaron más alto en el rendimiento y retención que los estudiantes en las otras dos situaciones (Johnson y Johnson, 1994).

Referencias.

Deutsch, M. (1949). A Theory of Cooperation and Competition. *Human Relations*, 2, 129-152.

Gavilán, P. (2012). *Aprendizaje Cooperativo en Matemáticas en Educación Secundaria*. Saarbrücken. Editorial Académica Española.

Gavilán, P. y Alario, R. (2010). *Aprendizaje Cooperativo. Una metodología con futuro. Principios y aplicaciones*. Madrid. Ed. C.C.S.

Johnson, D.W. y Johnson, R. T. (1989). *Cooperation and Competition: Theory and Research*. Edina, M. N., Interaction Book Company.

Johnson, D.W. y Johnson, R. T. (1994). *Learning Together and Alone. Cooperative, Competitive and Individualistic Learning*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Nelson-Le Gall, S. (1995). Children's Instrumental Help-Seeking: Its Role in the Social Acquisition and Construction of Knowledge. En R. Hertz-Lazarowitz, y N. Miller (ed.), *Interaction in Cooperative Groups*. *The Theoretical Anatomy of Group Learning*. Cambridge, Cambridge University Press.

Vedder, P. (1985). *Cooperative Learning: A Study On Processes And Effects Of Cooperation Between Primary School Children*. Westerhaven Groningen, Netherlands, Rijkuniversiteit Groningen.

Webb, N. (1995). Testing a Theoretical Model of Student Interaction and Learning in Small Goups. En R. Hertz-Lazarowitz y N. Miller, *Interaction in Cooperative Groups. The Theoretical Anatomy of Group Learning*. Cambridge, Cambridge University Press.

Para hacer referencia al artículo:

Gavilán, P. (2015). Aprendizaje cooperativo: ¿Cuáles son las claves para que funcione? En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 49-56). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

INTUICIÓN VISUAL Y RAZONAMIENTO EN MATEMÁTICAS

Inés Mª Gómez-Chacón,

Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid

Resumen

En estas últimas décadas los estudios han puesto de manifiesto que las actividades que promueven la construcción de las imágenes pueden mejorar enormemente el aprendizaje de las matemáticas. En este trabajo se reflexiona sobre dos aspectos: la comprensión visual en análisis y el razonamiento matemático visual en contextos tecnológicos. Nos referiremos a visualización matemática, no sólo como las matemáticas reconocidas a través de imágenes, sino como clave de significado en la comprensión e inspiradora en los descubrimientos matemáticos. A través de datos empíricos se reflexiona desde la Educación matemática, sobre las características de visualización geométrica y sobre algunos obstáculos y oportunidades de la enseñanza de la visualización con alumnado en la transición del Bachillerato a la Universidad. Finalmente se ofrecen una colección materiales para apoyo del profesor.

Palabras clave: Representaciones, Visualización, Intuición, Formación de profesores, Pensamiento Matemático Avanzado

INTRODUCCIÓN

En estas últimas décadas son numerosas las investigaciones a nivel universitario que describen las dificultades de los estudiantes en su entrada a la Universidad. Como causa de dichas dificultades se señala el nivel de abstracción y formalismo en el *Pensamiento Matemático Avanzado* (Artigue, Batanero, & Kent, 2007) y los problemas derivados del cambio de cultura entre dos instituciones educativas diferentes, el Instituto y la Universidad (Gueudet, 2008). En esta conferencia, aunque no dejamos de lado los elementos institucionales, vamos a tratar de avanzar en la línea de Pensamiento Avanzado centrándonos en dos aspectos menos abordados: la visualización matemática y las relaciones entre los procesos de intuición y razonamiento: ¿Por qué traer este tema a debate? Destacamos tres de las razones por las que planteamos estudios sistemáticos desde 2006 son: razones epistemológicas sobre el conocimiento matemático, la reflexión generada por el impacto real o potencial de la tecnología en la Educación matemática y la promoción de una *Educación STEM*, entendida como una educación que prepara en competencias y habilidades en cuatro disciplinas (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas).

Se espera que una educación STEM exitosa proporcione a los estudiantes de ciencias, matemáticas e ingeniería / tecnología competencias aplicables al mundo real. En España tenemos un gran reto, existe un decrecimiento del alumnado en la opción científico-tecnológica en el Bachillerato, con su consiguiente consecuencia en la elección de carreras científicas universitarias. Por tanto, constituye una urgencia mantener las experiencias positivas del alumnado en matemáticas. Esto implica la comprensión matemática más allá de la mera manipulación de técnicas.

Hemos elegido este tema de la visualización por considerarlo parte fundamental del "*quehacer matemático*". Coincidimos con Miguel de Guzmán cuando afirmaba que "*la visualización aparece como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones ente los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático*" (Guzmán, 1996, p. 17).

No obstante, aunque se reconozca la importancia de la visualización en la comprensión de las *Matemáticas Avanzadas* son escasas las experiencias de docencia y de investigación que la tienen en cuenta a nivel universitario; esta misma afirmación podríamos extenderla a nivel de Bachillerato y de Secundaria.

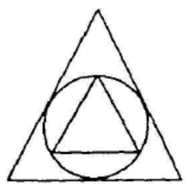
Hoy en el marco del congreso *"Las nuevas metodologías para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas"*, tratamos de explicitar la relevancia de la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje y ofrecer propuestas. Nuestra intervención se estructura de la forma siguiente: en primer lugar, conceptualización de visualización de la que partimos, seguidamente pasaremos a presentar dos tipos de investigaciones realizadas a en nuestro contexto, una referida a comprensión visual y concepto de integral en la enseñanza universitaria y otra relativa a aprendizaje matemático en contextos tecnológicos y; por último terminamos con la presentación de materiales que ofrecen una reflexión epistemológica en torno a las ideas y visualizaciones matemáticas desde el punto de vista de un colectivo de matemáticos vinculados a la Cátedra de Miguel de Guzmán de la Universidad Complutense de Madrid.

MARCO DE REFERENCIA Y CONCEPTUALIZACIÓN DE VISUALIZACIÓN

Como hemos indicado pretendemos hacer del razonamiento visual una práctica habitual para el aprendizaje. Dicho objetivo, no es original nuestro, en el ámbito de Educación Matemática se hizo prioritario a partir de los años noventa. Los estudios de matemáticos como Zimmermann y Cunningham (1991) o los monográficos de la revista Zentralblattfür Didaktik der Mathematik (Peters et al., 1992 y 1992 II) llamaron la atención de la comunidad matemática sobre aspectos diversos de la utilización de diagramas visuales.

El término visualización se usa de distintas maneras en el contexto de las matemáticas y la didáctica de las matemáticas. Tomemos el siguiente ejemplo para especificar nuestra conceptualización:

> *Disponemos de un triángulo equilátero inscrito en un círculo y de otro circunscrito al mismo círculo, como se muestra en la figura. Hallar la proporción entre las áreas de los triángulos.*



Puedes ver a simple vista la solución mediante un procesamiento visual que te hace rotar 180º el triángulo inscrito en el círculo. Así se crea un problema equivalente, en el que aparecen de forma visible cuatro triángulos. Por tanto, la conclusión es obvia: el área del triángulo pequeño es 1/4 de la del mayor. Lo que René Thom denomina "*el teorema es objeto de la visión*". Aquí el significado de "*visualización*" está referido a captar esa experiencia. Visualizar en este sentido viene rápidamente, prediciendo la verbalización o representación simbólica y también se puede perder –el mismo diagrama exacto o estímulo puede dejar de provocar la misma experiencia en otra ocasión ante otro problema-.

En nuestro caso el concepto de visualización no estará referido a esta–aproximación de percepción de imágenes (largamente documentado en trabajos como Presmeg (2006)), sino que nos referiremos al proceso de producir o utilizar representaciones geométricas o gráficas de conceptos, principios o problemas matemáticos. Nuestro punto de vista son las representaciones semióticas de los estudiantes. A nivel cognitivo nos parece importante profundizan en el proceso de traducción entre una imagen visual y su correspondiente analítica, y las condiciones que pueden hacer que una imagen intuitiva facilite o limite el razonamiento y la resolución de un problema. En las secciones siguientes nos referiremos a las representaciones intuitivas y geométricas que pueden presentar las ideas y los conceptos matemáticos, que permiten al estudiante la exploración de un problema y su solución. Así mismo al proceso de visualización, como la actividad de encontrar la imagen o la relación entre esa imagen y el problema que se está resolviendo. Por tanto, vamos a entender la visualización desde una concepción global:

> "*Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión*" (Arcavi, 2003:217).

En propuestas metodológicas que puedan ayudar a la transición del Bachillerato a la Universidad en matemáticas nos parece operativo tener en cuenta cuatro roles fundamentales de la visualización para el estudiante:

1) Actuar como soporte e ilustración de resultados simbólicos.

2) Resolver el conflicto entre soluciones correctas simbólica se intuiciones incorrectas.

3) Reorganizar ciertas características de los conceptos, muchas de las cuales pueden ser obviadas por las soluciones formales.

4) Usar heurísticamente las imágenes para la resolución de problemas y para transitar entre pensamiento analítico y geométrico

COMPRENSIÓN VISUAL Y CONCEPTO DE INTEGRAL EN LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA

El ejemplo que se recoge en esta sección está basado en un estudio sobre el concepto de integral realizado con estudiantes universitarios de primero de la Licenciatura de Matemáticas (Souto y Gómez-Chacón, 2011). Estudios previos al nuestro pusieron de manifiesto (Mundy, 1987, González- Martín y Camacho, 2005) que los estudiantes, en los primeros años de Universidad, poseen un manejo mecánico y operativo del concepto. Entre las posibles causas se señalan las grandes diferencias que existen entre la forma en que se aborda la enseñanza de la integral en Bachillerato y en la Universidad. También se destaca la falta de integración entre el concepto de área y el de integral por parte de los estudiantes, lo que conlleva a algunos de los autores reseñados a prestar especial atención a la coordinación entre el registro visual y analítico de cara a mejorar la comprensión del concepto. Estos resultados han hecho que consideremos las teorías cognitivas de registros de representación y las de visualización para analizar las dificultades de los estudiantes con el concepto de integral.

En este contexto, la pregunta de investigación que nos hemos planteado ha sido la siguiente: ¿cómo puede mejorarse la comprensión de la integral (y por tanto disminuir las dificultades y errores de este concepto) desde el punto de vista de los estudios sobre visualización?

No pretendemos responder exhaustivamente en esta conferencia a la pregunta planteada, sino que lo que nos interesa es proporcionar algunos puntos clave de reflexión de cara a elaborar una propuesta didáctica de la integral que tenga en cuenta los procesos de visualización. Para ello, trataremos de profundizar en la naturaleza del problema planteado identificando errores y dificultades relacionadas con la comprensión visual de la integral, poniendo la atención especialmente en los siguientes aspectos:

- Errores y dificultades cometidas en el registro analítico que podrían evitarse con la coordinación del registro visual.
- Errores y dificultades con el manejo del registro visual que han impedido o dificultado la resolución con éxito del problema.

Análisis de resultados

Se describen los resultados de tres problemas del cuestionario que involucran el concepto de integral y resultan relevantes porque tienen un índice alto de respuesta y porque explicitan distintos aspectos del concepto, completando estos datos con los procedentes de las entrevistas. A continuación mostramos en la tabla (Tabla 1) el enunciado de cada problema, del concepto de integral y qué aspectos de la visualización permite evaluar.

Nº	ENUNCIADO	Aspecto del concepto de integral	Visualización
1	¿Qué está mal en el siguiente cálculo de la integral? $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{1} x^{-2}dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right\|_{-1}^{1} = \left.\frac{-1}{x}\right\|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$	Dominio del concepto de integral y sus propiedades. Es no rutinario por la formulación (buscar un error y no resolver)	CV[i] PV
2	Calcula $\int_{-3}^{3} \|x+2\|dx.$	Dominio en el cálculo de integrales, con la dificultad de involucrar un valor absoluto.	CV PV HV
3	Si f es una función impar en $[-a,a]$ calcula $\int_{-a}^{a} (b+(f(x)))dx$	Dominio en el cálculo de integrales, mayor grado de abstracción (función desconocida y uso de parámetros) lo que obliga a emplear razonamientos y propiedades con más generalidad que el anterior.	CV PV HV

Tabla 1: Enunciados de los problemas analizados, objetivos y criterios que permiten evaluar.

Análisis de resultados globales

El recuento de las respuestas dadas por los estudiantes atendiendo a los cuatro indicadores que especificamos a continuación, nos permite dar una panorámica global del conocimiento y dominio de los estudiantes del concepto de integral. Los resultados se recogen en el gráfico de la Figura 1.

- 1ª columna: Porcentaje de alumnos que no dejan la respuesta en blanco (Resp.)
- 2ª columna: Porcentaje de alumnos que responden de forma correcta (Corr.)
- 3ª columna: Porcentaje alumnos que emplean un argumento visual. (AV)
- 4ª columna: Porcentaje de alumnos que realizan algún dibujo. (Dib)

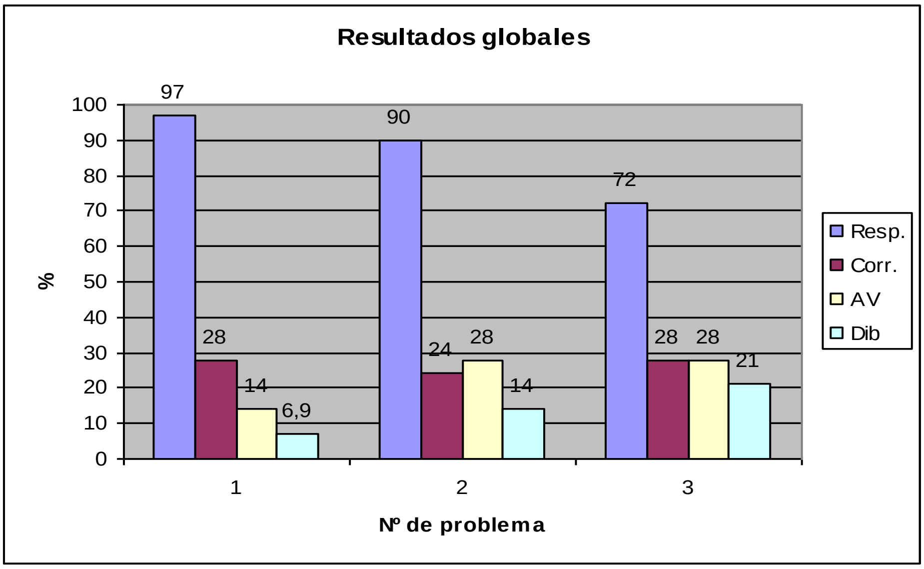


Figura 1: Gráfico de los resultados globales de las respuestas a los tres problemas

Como puede observarse, para estos tres problemas, el porcentaje de intentos de respuesta es bastante elevado, no habiendo demasiadas respuestas en blanco (1ª columna). Sin embargo, este porcentaje desciende cuando sólo contamos las respuestas correctas (2ª columna), no siendo superior al 30% en el mejor de los casos. Este resultado corrobora la existencia de dificultades asociadas al concepto de integral con nuestros estudiantes. Finalmente, las dos últimas columnas se refieren al uso del registro visual, y como puede observarse es bastante limitado. En particular, la última columna mide el uso explícito de representaciones visuales, mientras que la tercera, hace referencia al uso de argumento visual, que no tiene por qué venir acompañado necesariamente de una imagen visual externa. Por tanto, la diferencia de alturas entre ambas columnas representa la existencia de un mayor uso implícito que explícito del registro visual.

Respuestas a los problemas

A continuación mostramos con más detalle las respuestas a los problemas. Incluiremos una reflexión respecto a las expectativas iniciales, y comentaremos aspectos relevantes en relación con los objetivos planteados.

¿Qué está mal en el siguiente cálculo de la integral?

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{1} x^{-2}dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{-1}^{1} = \left.\frac{-1}{x}\right|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2}$$

El 97% de los estudiantes responde a este problema, aunque solamente un 28 % responde de forma correcta. Entre las respuestas incorrectas, encontramos que 7 de los 29 estudiantes responden que está bien. Tres de ellos incluso repiten el mismo cálculo. El resto, también tratan de realizar de nuevo el cálculo o indican cómo debería hacerse correctamente cometiendo alguno o varios de los siguientes bloqueos y errores:

- Emplear otra primitiva distinta.
- Intercambiar los signos al aplicar la regla de Barrow (en ese caso se obtiene 2, que es coherente con las propiedades de la integral).
- Tener en cuenta la constante de integración.
- Errores de cálculo.

Llamamos la atención sobre el hecho de que sólo 2 alumnos de los 29 emplean el registro gráfico de forma explícita, es decir, realizan dibujos, y resulta que ambos dan con la respuesta correcta. Por lo que en este problema, parece que emplear el registro gráfico o al menos tener una idea visual de lo que está ocurriendo, resulta de gran ayuda. Sin embargo, esta interpretación visual de la integral, también da pie a algunos problemas que podrían deberse al hecho de haber aprendido esta conexión mecánicamente y no a través de la visualización de una imagen (ninguno de los dos dibuja):

- Las integrales dan áreas bajo curvas, que son siempre positivas (alumno 1.27).

- Como -1/x es negativo, al hacer Barrow se debe cambiar los signos (Alumno 1.19).

De hecho el análisis detallado de la red sistémica asociada al problema, permite observar cómo la posesión de diversidad de representaciones de los conceptos involucrados en un problema junto con un adecuado manejo de las mismas, proporciona una buena comprensión de los conceptos así como del problema. De modo que existe mayor posibilidad de éxito en su resolución.

Este problema tiene dos conceptos en juego, por un lado el de integral definida y por otro el de función. Como hemos podido observar, la integral la identifican principalmente con procesos de cálculo de primitivas, y como es definida, con aplicar la regla de Barrow, pero sin tener en cuenta las hipótesis necesarias para ello (salvo el alumno 4). Algunos incluso recurren a la noción de integral como proceso inverso de la derivación y tratan de utilizar esta idea para calcular la primitiva (ver 10). Tan sólo los alumnos 22, 27, 28 la relacionan, a través del uso del registro visual, con el producto: área bajo una curva. Este resultado podría estar provocado por el propio enunciado, que alude directamente al "cálculo de la integral", pero también, a una causa institucional, y es que es desde este enfoque como se introduce este concepto en el Bachillerato. Por otro lado, el concepto de función aparece contemplado como algo global, ya sea porque forma parte de las hipótesis de algún teorema o porque consideran alguna propiedad de la función, deducida o no de imaginar su gráfica: continuidad, dominio de definición, si está acotada, etc. Aunque también hay algunos alumnos a los cuales les basta con poner la atención en el punto x=0, que identifican como problemático (ver 7, 17).

Esta elección del tipo de representaciones escogidas para los conceptos involucrados, determina prácticamente el éxito que se tendrá en la resolución del problema. Así puede verse cómo todos los alumnos que dan respuestas correctas o válidas, o bien se centran en la función, o bien contemplan a la integral como producto (área bajo una curva). Sin embargo, la mayoría como hemos visto, interpreta la integral como un proceso, lo que les impide comprender qué está ocurriendo. Si a esto le añadimos los errores de cálculo que pueden cometerse en cualquier momento de dicho proceso (tanto a la hora de calcular la primitiva, como en el orden de aplicación de la regla de Barrow o en las operaciones), obtenemos la gran variedad de respuestas incorrectas que aparecen reflejadas en la red.

Además del tipo de representaciones escogidas, también es muy importante el uso que se hace de ellas. Por ejemplo, el alumno 4, es el único que pone la atención en un inicio en la integral como cálculo de primitivas, y acaba dando una respuesta correcta. Esto lo logra gracias a que complementa de forma flexible el cálculo de la primitiva con otro argumento sobre el dominio de definición de la función. Por otro lado, también se pone de manifiesto cómo la combinación de registros de forma adecuada lleva a una mejor comprensión de la situación del problema (ver alumnos 28, 22). Pero como señalábamos, es importante que esta coordinación entre registros no se haga de forma automática pues puede dar lugar a errores (alumnos 19 y 27), sino que debe acompañarse de reflexión.

Son de destacar los resultados procedentes del problema 3: Si f es una función impar en $[-a,a]$ calcula $\int_{-a}^{a}(b+(f(x)))dx$

En este problema, al aumentar el grado de abstracción, aumenta la dificultad y se requiere una mayor comprensión de los conceptos involucrados: función impar e integral definida. Además resulta muy recomendable poseer una visión global de lo que está ocurriendo. El hecho de que se diga que la f es impar, está incitando al uso del registro visual, o al menos a la combinación de registros. Sin embargo, el paso por el registro visual no es estrictamente necesario para resolver el problema, es opcional.

La estrategia seguida por la mayoría de los estudiantes, 12 de 29, -eminentemente analítica- es la siguiente:

$$\int_{-a}^{a}(b+(f(x)))dx=\int_{-a}^{a}bdx+\int_{-a}^{a}f(x)dx=bx\big|_{-a}^{a}+0=2ab$$

Sólo a la mitad (6 de 12) les sirve para dar la respuesta correcta. El resto de estrategias seguidas consisten o bien en separar el intervalo de integración en el 0, o bien son de carácter más abstracto, dando lugar a errores lógicos. Por ejemplo, un estudiante (13) trata de razonar probando que f par implica f' impar, y de ahí concluye que F es par. Es decir, prueba una implicación, pero luego la utiliza en sentido contrario. En menor número están las que utilizan como base el registro visual.

A continuación se presenta la resolución de un estudiante que sí utiliza el registro visual para la resolución:

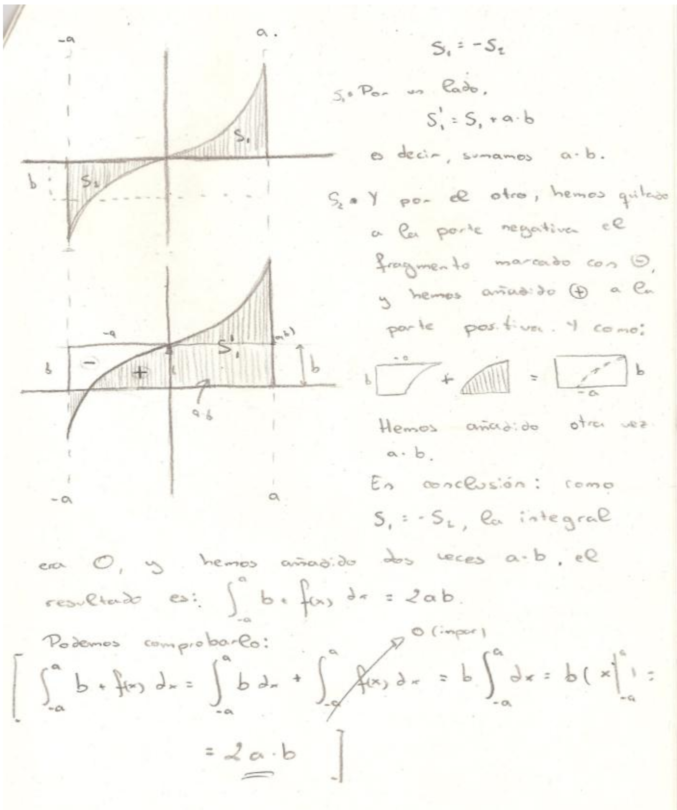


Figura 2: Respuesta al problema del alumno 1.28

Esta resolución pone de manifiesto la dificultad cognitiva propia del uso del registro visual, ya señalada por Zimmermann y Cunningham (1991) como una de las tres causas para el rechazo de la visualización. La respuesta analítica, que en este caso aparece al final como comprobación, sigue un proceso lineal: se suceden ciertas operaciones que, realizadas con corrección, acaban dando como resultado 2ab.

En el caso visual, es necesario contemplar el proceso desde una perspectiva global. Deben tenerse en cuenta mayor número de conceptos y relaciones de forma simultánea: requiere de la interpretación visual de la integral como área y de las funciones impares como simétricas respecto al origen, debe recordarse que sumar una cantidad constante a una función es trasladarla a lo largo del eje (este concepto no aparece en el argumento analítico) y, finalmente, son precisas ciertas transformaciones del tipo de "cortar" y "pegar" áreas, teniendo en cuenta sus signos. Obviamente, en ambos casos, el resultado es el mismo. Sin embargo, cada tipo de argumento nos conduce a ver el problema de distinta manera.

Con este ejemplo, queremos remarcar el tipo de comprensión tan diferente que nos proporciona cada registro, y lo conveniente que resulta combinarlos. Si logramos que nuestros estudiantes dominen ambos tipos de razonamiento, estaremos contribuyendo a que posean una mayor comprensión de los objetos y relaciones matemáticas

VISUALIZACIÓN Y TRABAJO GEOMÉTRICO CON ORDENADOR

La preocupación por el conocimiento matemático y didáctico del profesor en la enseñanza y aprendizaje con tecnología nos ha hecho buscar respuestas a distintas cuestiones: ¿Qué rechazo o preferencia por el razonamiento visual se produce en contextos computacionales? ¿Cómo la tecnología media en el pensamiento matemático e interactúa con las estructuras matemáticas? ¿Cómo se producen las transiciones entre génesis figural-semiótica, instrumental y discursiva en el trabajo geométrico? Con objeto de dar respuesta a algunas de estas cuestiones a continuación hemos elegido algunos resultados y ejemplos procedentes de nuestras investigaciones recientes (Gómez-Chacón, 2012 y 2014).

Rechazo o preferencia por lo visual en los estudiantes

Distintas investigaciones han señalado que una de las dificultades que pueden encontrar los profesores para trabajar la matemática mediante razonamiento visual es el rechazo o la no valoración por parte de los estudiantes (Eisenberg y Dreyfus, 1991; Eisenberg, 1994). En el estudio descrito en la sección primera sobre la influencia del método visual para la comprensión del concepto de integral realizado con 29 estudiantes de primer curso de la Licenciatura de Matemáticas (Souto y Gómez-Chacón, 2011) se constató el uso limitado que hacen los estudiantes del registro visual y la dificultad cognitiva propia del uso del registro visual, como una de las causas para el rechazo de la visualización.

Sin embargo, cuando se plantean estudios de aprendizaje matemático y con ordenador los datos pusieron de manifiesto que todos los estudiantes consideraban que el razonamiento visual es algo central en la resolución de problemas matemáticos (Gómez-Chacón, 2012 y 2014). Sin embargo, pudimos observar que frente a esta misma creencia se produjeron emociones diferentes. En un primer momento estas emociones fueron categorizadas como: gusto (77%), disgusto (10%), e indiferencia (13%) hacia el objeto. Las razones que aducen para justificar estas emociones son: a) placer/gusto como una indicación de que uno puede lograr un conocimiento experto (30% de los estudiantes); b) placer/gusto cuando se progresa en la esquematización y se logra una forma conceptual suave (35%); c) placer y gusto como control y creación de aprendizaje profundo (40%); d) placer y gusto porque está asociado con aspectos intuitivos y lúdicos del conocimiento matemático (20%); e) emociones de indiferencia ante la visualización (13%); f) no placer y gusto cuando la visualización tiene una demanda cognitiva más fuerte (10%).

Una respuesta similar se obtuvo cuando se exploraron las creencias relacionadas con el uso de software de Geometría dinámica, como una ayuda para la comprensión y la visualización del concepto de lugar geométrico. Todos los estudiantes afirmaron que les resultó útil y el 80% expresaron emociones positivas sobre la base de su fiabilidad, rapidez de ejecución y el potencial para desarrollar su intuición y visión espacial. Agregaron que la herramienta les ayudó a superar bloqueos mentales y mejorar su confianza y motivación.

Como futuros docentes hicieron hincapié en que el programa de Geometría Dinámica (GeoGebra) puede favorecer no sólo el pensamiento visual, sino que ayuda a mantener una vía afectiva productiva. Indicaron que el trabajo con la herramienta les favorece creencias positivas hacia las matemáticas y hacia sí mismos como aprendices y estimula su propia capacidad y voluntad de participar en el aprendizaje de las matemáticas.

Circulación entre tipos de razonamiento

Los estudios muestran la preferencia de los estudiantes por lo visual cuando el contexto de aprendizaje es el tecnológico, la cuestión es si esta motivación impulsa realmente el trabajo matemático y favorece la circulación entre el pensamiento visual y el analítico. Mediante experimentos de enseñanza de geometría hemos tratado de explorar cuestiones como las siguientes: ¿Cómo se articulan las tres tipologías de génesis (visual, instrumental y discursiva) necesarias para la construcción de pensamiento geométrico en la integración de software de sistemas dinámicos (Cabri, GeoGebra, etc.) en el trabajo geométrico? ¿Qué rol desempeña el instrumento (software, p.e GeoGebra) en la construcción del espacio geométrico? ¿Cómo interviene la utilización de los SGD (Sistema de Geometría Dinámica) en el paso de la Geometría natural a la Geometría axiomática natural) o de la Geometría axiomática formal, particularmente en los procesos visualización e intuición geométrica y cómo influye el uso de este software?

En nuestro caso, utilizando el marco teórico de los espacios de trabajo geométricos (ETG) (Kuzniak, 2011) y el enfoque instrumental (Artigue, 2002) hemos podido constatar varios hechos en los estudiantes: no dominio del ciclo de razonamiento y la necesidad de profundizar en la visualización icónica versus la visualización no icónica.

Para dominar todo el ciclo de razonamiento, los estudiantes deben dominar al mismo tiempo las técnicas aplicadas en tres génesis -figurativa, instrumental y discursiva- y mostrar un grado de flexibilidad cognitiva en el uso de diferentes facetas del trabajo geométrico (Figura 3).

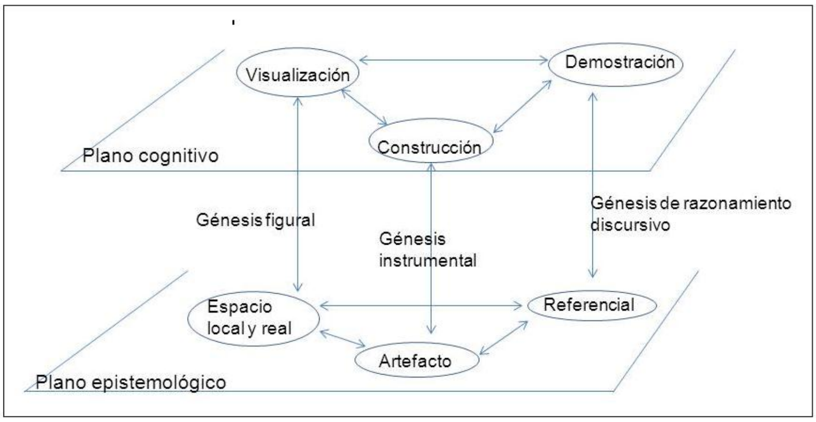


Figura 3: Espacio de trabajo geométrico: planos y génesis (Kuzniak, 2011)

Volver al instrumento para poner fin al ciclo puede ser problemático entre los estudiantes, que apoyan su investigación en la resolución de los problemas sobre los aspectos figurativos y discursivos, cuando no hay congruencia entre el instrumento teórico y un instrumento informático.

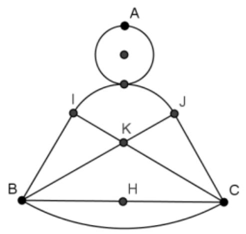
Para ilustrar este carácter incompleto del ciclo de razonamiento tomamos los resultados de dos experimentaciones, una primera con 30 estudiantes de matemática, futuros profesores de Secundaria, confirmada por una experimentación complementaria con cuatro grupos de clase, con un total de 98 estudiantes (Gómez-Chacón y Kuzniak, 2011 y 2013).

La tarea propuesta fue la siguiente:

Agranda la siguiente campana de tal manera que A'H' mida el doble que AB.

Escribe un protocolo de resolución del problema detallado. Algunas pistas que te pueden ayudar a dibujar la campana son:

1. Observa que A está sobre la recta BI y sobre la recta CJ.
2. H es el punto medio de BC.



3. Los ángulos IBC y JCB miden 60º.
4. Los ángulos BIC y CJB son ángulos rectos.
5. BC pertenece a una circunferencia de centro A.

La metodología de investigación es cualitativa mediante observación participante en las sesiones de formación y análisis de las producciones de los estudiantes. Como instrumentos de recogida de datos se utilizaron grabaciones en video, notas de campo y protocolo de resolución de problemas de los estudiantes.

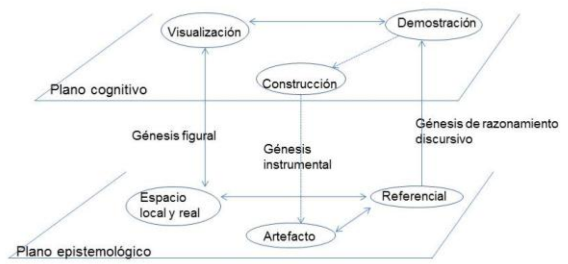


Figura 4. Trabajo geométrico apoyado sobre la génesis discursiva

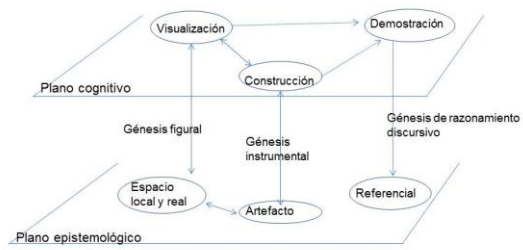


Figura 5. Trabajo geométrico promovido por la génesis instrumental

Aunque las tareas geométricas sean sólo de construcción, como es en el caso de esta tarea, se observaron dos tendencias de espacio de trabajo matemático personal. La primera Fig. 4, referida implícitamente a Geometría axiomática natural, se centra principalmente en una génesis discursiva de prueba, apoyada por un trabajo visual analítico sobre la figura, sin prestar específica atención a las herramientas de dibujo. En este caso, un aspecto que puede subrayarse es la incompletitud del trabajo geométrico global; corresponde a estudiantes que se basan en los aspectos visuales-figurales y discursivos. El retorno a la génesis instrumental puede ser problemático cuando no hay congruencia, en el sentido de Duval (2006), entre la herramienta teórica y el instrumento informático.

El trabajo geométrico de los estudiantes que no tienen estas dificultades es porque se apoya sobre una génesis figural apropiada respecto al artefacto: estos estudiantes hicieron un tratamiento semiótico de una manera estructurada y la deconstrucción instrumental correspondiente. El razonamiento geométrico a menudo requiere la movilización en paralelo de dos registros de representación, de manera que las conversiones se producen de forma continua, aunque a veces éstas son implícitas. Nuestros datos muestran, que las posibilidades que ofrece el software en su doble relación con los significados personales y matemáticos, se conviertan en un potencial semiótico del artefacto para ETM. Sin embargo, este potencial no está activo de forma espontánea en la mayoría de los futuros profesores en el grupo.

La Segunda tipología (Fig. 4) es un espacio de trabajo matemático que promueve la génesis instrumental articulada con la génesis figural-visual. Este resultado no es sorprendente para tareas de construcción, si se produce una buena adaptación al instrumento. Se observa que se mueven en la Geometría Natural con un trabajo geométrico instrumental. De hecho, la mitad de los estudiantes construyeron tanto la campana original como la agrandada mediante una construcción basada en los ángulos. En este caso, se identifican las propiedades de la simetría y la invariancia de ángulos, y se guían tanto por la percepción y la visualización de la figura, como por el uso de instrumentos. Como resultado, se mantuvieron en el plano (Figural-Instrumental) ya que podían usar los mismos comandos de software para ambas tareas.

Para interpretar por qué este uso tan fuerte de la Geometría Natural hemos considerado el contexto de la tarea, de una parte en un medio tecnológico y de otra en un contexto institucional, la formación de profesores de Secundaria. Lo que puede que haya condicionado la búsqueda de soluciones elementales y la identificación de dificultades que puede tener un alumno de Secundaria.

También, el estudio muestra que al punto de vista sobre el desarrollo del razonamiento geométrico hay que añadir el mantenimiento de la construcción de una génesis discursiva relacionada con los elementos visuales de la deconstrucción de figuras. Esta forma de razonamiento requiere una reflexión sobre el papel de las definiciones y teoremas en el proceso de desarrollo de lo geométrico, de cara a que los estudiantes pasen de un trabajo práctico perteneciente a Geometría básica, a una Geometría más axiomática.

LA ACTIVIDAD DEL MATEMÁTICO EJEMPLO DE VISUALIZACIÓN

Tras la ejemplificación de distintos estudios empíricos, donde hemos reflexionado sobre dificultades que los profesores encontramos en nuestro día a día, queremos poner de relieve una fuente de inspiración para abordar las mismas.

En esta última sección usaremos el concepto de visualización como "una manera de ver las cosas" (Davis, 1993). Esta expresión de Davis sugiere que los conceptos matemáticos son "cosas" para la persona en cuestión, y por lo tanto, "una manera de mirar" es una síntesis (a menudo) tácita de comprender las propiedades de estas cosas y requiere de una comprensión de los conceptos más allá de la presentación visual.

En este marco, se ha situado la reflexión epistemológica en torno a las ideas y visualizaciones matemáticas y la preparación de materiales que hemos llevado a cabo. Las preguntas que nos hemos planteado han sido: ¿Qué conocimiento Matemático necesita el profesor para “enseñar a visualizar”? ¿Cómo realizar una transposición del conocimiento procedente de la investigación Matemática (y de Educación Matemática) al espacio de docencia universitaria? ¿Cómo transmitir el sentido epistémico de la visualización en los contextos de enseñanza?

En la actividad global del matemático se pueden destacar distintas fases que tienen influencia en la docencia: descubrimiento, explicación, justificación y aplicaciones. El contexto de descubrimiento precisa las condiciones que permiten el hallazgo y la elaboración de los conceptos a partir de la resolución de problemas. La explicación matemática a menudo involucra imágenes, representaciones, diagramas o imágenes mentales. La justificación se relaciona con la forma en que un resultado se presenta, se defiende, se justifica en una comunidad investigadora. Estas diferentes fases o contextos de la actividad del matemático no se refieren a lo puramente científico sino que, como han señalado distintos matemáticos a lo largo del siglo pasado, apuntan la necesidad de tener en cuenta en la invención matemática la naturaleza psicológica. Tal es el caso de los ensayos de Hadamard (1908/1945) o, posteriormente, los trabajos de Lakatos y Kuhn que permitieron enriquecer el contexto de descubrimiento, introduciendo una perspectiva más sociológica, como un contexto destinado a favorecer el trabajo de los matemáticos: "como seres humanos que hacen avanzar la comprensión humana de las matemáticas" (Thurston, 1995).

Por tanto, definir las matemáticas a partir de la actividad de los matemáticos nos obliga a mirar sus trabajos para comprender mejor la naturaleza y el contenido de las mismas. A lo largo de dos cursos académicos 2009-10 y 2010-2011 coordiné junto a la profesora Capi Corrales, dentro del Proyecto de la Cátedra Miguel de Guzmán, en la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Seminario de Ideas y Visualizaciones Matemáticas (Corrales & Gómez-Chacón, 2011), cuyo punto de partida está muy bien recogido en las siguientes palabras de Miguel de Guzmán: "*Con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa (no es la visualización psicológica). Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo. […] Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemáticas*". (Guzmán, 1996, p.15).

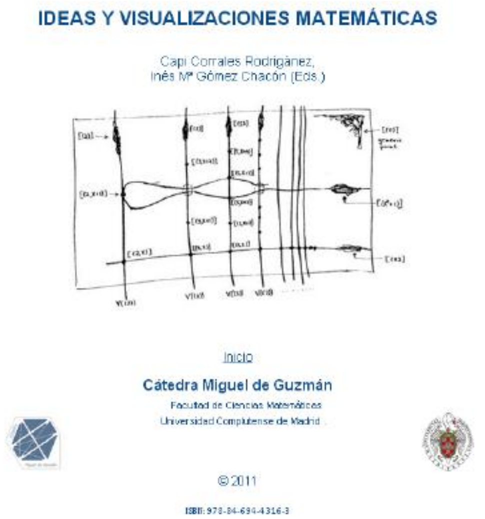


Figura 6: Portada del DVD Ideas y visualizaciones matemáticas

Basados en los principios del debate científico, a lo largo de dieciséis sesiones recogidas en los materiales incluidos en (Corrales & Gómez-Chacón, 2011 o http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/ideas/), matemáticos expertos en distintas áreas de conocimiento reflexionamos sobre algunos conceptos, textos y problemas esenciales al devenir de las matemáticas y, ya sea construyendo ejemplos de situaciones de visualización en términos "de ver", ya sea presentando los elementos conceptuales que sirvieron para dar origen o cuerpo a la obra matemática, intentan extraer de las propias Matemáticas ideas e imágenes que, al contribuir a la interacción entre lo visual y lo analítico, puedan ayudar a los estudiantes del Grado en Matemáticas a comprender mejor esta disciplina. Los temas tratados estuvieron articulados en tres categorías Temas, Textos y Problemas: Temas (Número, El infinito, Límite, Dimensión, Espacio abstracto, Incertidumbre); Textos (Elementos de Euclides, Aritmética de Diofanto, Introductio de Euler, Disquisiciones Aritméticas de Gauss, Fundamentos de la geometría); y finalmente Problemas (Mecánica de fluidos, Los sistemas dinámicos de biología, La topología geométrica y dinámica, Algoritmos y su diseño, Visualización e Intuición: Investigación en Educación Matemática).

La visualización en estos trabajos tiene un sentido epistémico, tratando de responder a cuestiones de cómo y hasta qué punto se deben utilizar las representaciones visuales, además de como evidencia y medio de descubrimiento de un enunciado matemático, como parte de su justificación. Los materiales recogidos en esta publicación permiten a un profesor universitario y también un profesor de Bachillerato y Secundaria no sólo encontrar un banco de recursos sino también precisar algunos principios de diseño de materiales para potenciar la visualización como producto y habilidad en sus clases.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-24.

Artigue, M., C. Batanero y P. Kent (2007), "Mathematics thinking and learning at post-secondary level", En F. Lester (ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Greenwich, Connecticut, Information Age Publishing, pp. 1011-1049.

Corrales Rodrigáñez, C. y Gómez-Chacón, I.M. (2011). *Ideas y Visualizaciones Matemáticas*. Publicaciones Cátedra Miguel de Guzmán, Facultad de Matemáticas, UCM.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems, *Educational Studies in Mathematics* 24(4), 333-344.

Dreyfus, T. (1991).On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education.In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conferenc*e, 1, 33-48.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics* 61, 103–131

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics.En W. Zimmemann, W. y Cunningham (Eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA Notes n. 19, 25-37. Washington, D.C

Gómez-Chacón, I. Mª (2012). Visualización matemática: intuición y razonamiento. En Castrillón, M; Garrido M. I.; Jaramillo, J.A.; Martínez, A.; Rojo, J., *Contribuciones matemáticas en homenaje a Juan Tarrés* (pp. 201-219.) Universidad Complutense de Madrid. Madrid.

Gómez-Chacón, I. Mª y Kuzniak, A. (2013). Geometric Work Spaces: Figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a technological environment, International Journal of Science and Mathematics Education, DOI: 10.1007/s10763-013-9462-4

González-Martín, A. S. y Camacho, M. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de Matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las ciencias*, 23 (1), 81-96.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition, *Educational Studies in Mathematics*, 67 (3), 237-254.

Guzmán, M. de (1996). *El rincón en la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*, Ed. Pirámide.

Hadamard, J. (1945) *The psychology of invention in the mathematical field*, Princeton University Press. Princeton N. J.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactiqueet de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Mundy, J. (1987). Analysis of Errors of First Year Calculus Students, En Theory, Research and Practice in Mathematics Education, Bell, A., Low, B. y Kilpatrick, J. (Eds.), *Proceedings ICME* 5, 170-172 .

Peters, V. et al. (1992). Analysis: Visualization in mathematics and didactics of mathematics, part 1. *ZentralblattfürDidaktik der Mathematik*, 26, pp. 77-92.

Presmeg, N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. PME 1976-2006. (pp. 205–235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Souto, B. & Gómez-Chacón, I. Mª (2011).Visualization at university level. The concept of Integral, *Annales de Didactiqueet de Sciences Cognitives*, 16, 217 – 246.

Thurston, W. P. (1995). On Proof and Progress in Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 15(1), 29–35.

Zimmerman, W. y Cunningham, S. (1991). What is Mathematical Visualisation? En W. Zimmerman, S. Cunningham, (eds), Visualisation in Teaching and Learning Mathematics, (pp. 1-9). Whashington: Mathematical Association of America.

Para hacer referencia al artículo:

Gómez-Chacón, Inés Mª. (2014).Intuición Visual y Razonamiento en Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: *·Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 57-70). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

[i] *Comprensión Visual (CV)* como aquella que se da cuando un sujeto adquiere representaciones de ese concepto en el registro visual y además, es capaz de transformarlas y convertirlas a otros registros a la hora de realizar razonamientos matemáticos. *Preferencia por lo visual (PV)* como la tendencia que tiene una persona a elegir métodos visuales de resolución cuando se enfrenta a problemas que podrían ser resueltos tanto por un método visual como no visual. *Habilidad Visual (HV*) como la capacidad de crear, interpretar y manejar con corrección las imágenes gráficas tanto a la hora de representar y comunicar información, como en el momento de pensar y desarrollar ideas por un método visual como no visual.

ENSEÑANZA POR PROYECTOS: UNA PROPUESTA PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS EN EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

María Teresa González Astudillo, José Mª Chamoso Sánchez

Universidad de Salamanca

Resumen

La adaptación de los títulos universitarios al Espacio Europeo de Educacion Superior exige un cambio en las metodologías de enseñanza-aprendizaje para que el alumno sea el protagonista de su propio aprendizaje. Sobre esta base se diseñó una asignatura de formación de maestros donde los alumnos, en grupos, debían elaborar un Proyecto sobre Estadística y su Enseñanza que les permitiera adquirir competencias ligadas a su formación y relativas a su conocimiento de las matemáticas, el currículo escolar, la resolución de problemas, el diseño de tareas y recursos didácticos y la gestión del aula.

En esta ponencia se indican las características que subyacen, desde un punto de vista teórico, a este método de enseñanza así como la descripción de los elementos prácticos que se usaron en el aula para su implementación y los resultados obtenidos por los alumnos.

Palabras clave: *enseñanza por proyectos, Estadística, universidad*

INTRODUCCIÓN

La adaptación de los títulos universitarios al Espacio Europeo de Educación Superior ha conllevado un reajuste de las metodologías de enseñanza pues uno de los principales objetivos debe ser lograr que el centro de atención esté puesto en el alumno. Él debe ser el protagonista de su propio aprendizaje y la tarea del profesor es la de organizar el contexto de aula, la enseñanza, la planificación de tareas, el desarrollo de las actividades, la metodología y la evaluación para permitir que el alumno adquiera las competencias ligadas a su formación.

Bajo este punto de mira, y dado que en el curso 2013-2014 se impartía por primera vez la asignatura "Matemáticas y su Didáctica III" en el Grado de Maestro en Educación Primaria en la Universidad de Salamanca, se decidió organizarla utilizando la metodología de Enseñanza basada en Proyectos. Ello supuso una reestructuración de la forma de trabajo de los alumnos y del profesor, así como una redirección en la responsabilidad atríbuida a los diferentes actores intervinientes en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La metodología de Enseñanza basada en Proyectos implica la elaboración de un proyecto por parte de los alumnos. En la formación de maestros se pretende que el alumno adquiera competencias ligadas a su formación relativas a su conocimiento de las matemáticas, el currículo escolar, la resolución de problemas, el diseño de tareas y recursos didácticos o la gestión del aula. Dado que la asignatura Matemáticas y su Didáctica III está centrada en los contenidos de Probabilidad y Estadística, se propuso a los alumnos la realización de un proyecto estadístico junto con el diseño de tareas para la enseñanza primaria que deberían implementar y evaluar en un aula.

En esta ponencia se indican las características que subyacen, desde un punto de vista teórico, a este método de enseñanza así como la descripción de los elementos prácticos que se usaron en el aula para su implementación y algunos resultados obtenidos de los proyectos realizados por los estudiantes.

LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN LA EDUCACIÓN

La Estadística está presente de forma constante en nuestra sociedad tanto en los medios de comunicación como en los informes de resultados de las empresas o en los informes pedagógicos de los centros escolares. Pero esa presencia no siempre es reconocida por el ciudadano con el interés y precisión exigible. En muchos casos esto se debe a su falta de conocimiento para poder analizar e interpretar los datos que se le proporcionan y tomar decisiones sobre ellos. Se hace necesaria una formación estadística para poder afrontar la profusa información que recibimos diariamente.

Actualmente la enseñanza de la Estadística se incluye en todos los ciclos de la enseñanza obligatoria pero no siempre ha sido así. La primera vez que los conceptos estadísticos aparecen en el currículo, tanto en Educación Primaria como Secundaria, es en la ley General de Educación publicada en 1970. Ya en 7º curso se incluyen los contenidos estadísticos pero prácticamente lo hacen de forma anecdótica. En Educación Primaria, en lo que se refiere a la LOMCE, se contempla un bloque denominado Estadística y Probabilidad. En este bloque se incluyen contenidos como los gráficos estadísticos, la recogida de datos, las tablas de frecuencias, las medidas de centralización y el análisis de la información junto con el azar y probabilidad.

Pero, aunque la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad se haya incorporado en todos los niveles educativos, su tratamiento, en muchos casos, no ha sido con la profundidad e interés que esos contenidos precisarían por diversos motivos, entre los que sobresale la falta de formación del profesorado en torno a esos contenidos (Pierce y Chick, 2011).

Hoy cada vez más se tiene conciencia de la importancia de la organización de la información y la enseñanza de la Estadística ha pasado de considerar la necesidad del conocimiento de sus conceptos a la exigencia de ser capaces de analizar críticamente datos y gráficas y, en definitiva, poseer un razonamiento estadístico. En ese sentido Watson (2006) establece una jerarquía de niveles de cultura estadística:

El desarrollo del conocimiento básico de los conceptos estadísticos y probabilísticos.

La comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos cuando se presentan dentro de un contexto más amplio, como algún informe en los medios de comunicación o en el trabajo.

Una actitud crítica que se asume al cuestionar argumentos que estén basados en evidencia estadística.

Son tres, por tanto, los aspectos de la enseñanza de la Estadística que hay que considerar: la alfabetización estadística, el pensamiento estadístico y el razonamiento estadístico. La alfabetización estadística debe permitir a los ciudadanos abordar los problemas presentes en los medios de comunicación, interpretar tablas y gráficos, entender los términos estadísticos y, por lo tanto, debe ser uno de los objetivos prioritarios de la enseñanza elemental.

El pensamiento estadístico incluye (GAISE, Franklin y cols. 2007):

La necesidad e importancia de los datos. Reconocer la necesidad de basar las decisiones personales en la evidencia (datos) y los peligros inherentes del que actúa sobre supuestos que no están respaldados por datos. Reconocer que es difícil conseguir datos de buena calidad y que el tiempo ocupado para formular problemas y obtener datos de buena calidad no es tiempo perdido.

La omnipresencia de la variabilidad. Reconocer que la variabilidad es ubicua en muchos fenómenos cotidianos. La variabilidad es la esencia de la Estadística como disciplina y no puede ser entendida sólo mediante estudio y lectura, sino que debe ser experimentada.

La cuantificación y explicación de la variabilidad. Reconocer que la variabilidad puede ser medida y explicada, tomando en consideración lo siguiente: (a) aleatoriedad y distribuciones de las variables aleatorias; (b) parámetros de tendencia central y de dispersión (tendencia y residuo); (c) modelos matemáticos paramétricos; (d) modelos de análisis exploratorio de datos.

Finalmente el razonamiento estadístico se refiere a (Wild y Pfanckuch, 1999):

Reconocer la necesidad de los datos: La base de la investigación estadística es la hipótesis de que muchas situaciones de la vida real sólo pueden ser comprendidas a partir del análisis de datos que han sido recogidos en forma adecuada. La experiencia personal o la evidencia de tipo anecdótico no es fiable y puede llevar a confusión en los juicios o toma de decisiones.

Transnumeración: Comprensión que puede surgir al cambiar la representación de los datos. Al contemplar un sistema real desde la perspectiva de modelización, puede haber tres tipos de transnumeración: (1) a partir de la medida que "captura" las cualidades o características del mundo real, (2) al pasar de los datos brutos a una representación tabular o gráfica que permita extraer sentido de los mismos; (3) al comunicar este significado que surge de los datos, en forma que sea comprensible a otros.

Percepción de la variación: La recogida adecuada de datos y los juicios correctos a partir de los mismos requieren la comprensión de la variación que hay y se transmite en los datos, así como de la incertidumbre originada por la variación no explicada. La Estadística permite hacer predicciones, buscar explicaciones y causas de la variación, y aprender del contexto.

Razonamiento con modelos estadísticos: Cualquier útil estadístico, incluso un gráfico simple, una línea de regresión o un resumen puede contemplarse como modelo, puesto que es una forma de representar la realidad. Lo importante es diferenciar el modelo de los datos y, al mismo tiempo, relacionar el modelo con los datos.

Integración de la estadística y el contexto: Es también un componente esencial del razonamiento estadístico.

Para conseguir los niveles más elevados se debe trabajar desde la formación de docentes. Garfield y Everson (2009) propusieron seis recomendaciones para preparar a docentes en Estadística:

- Enfatizar el alfabetismo estadístico y desarrollar el pensamiento estadístico.
- Utilizar datos reales.
- Poner hincapié en la comprensión conceptual más que el mero conocimiento de procedimientos.
- Promover el aprendizaje activo en el aula.
- Utilizar la tecnología para desarrollar el entendimiento de conceptos y analizar datos.
- Usar la evaluación para mejorar y evaluar el aprendizaje del estudiante.

LA ENSEÑANZA BASADA EN PROYECTOS

Una posibilidad para seguir las recomendaciones anteriores es trabajar mediante la metodología de Enseñanza basada en Proyectos. Esta metodología sitúa al estudiante en el centro del proceso de aprendizaje y ayuda a dotar de sentido a la Estadística como una herramienta científica para resolver problemas reales. La Estadística es inseparable de sus aplicaciones y su justificación final es su utilidad en la resolución de problemas externos a la propia Estadística.

La Enseñanza Basada en Proyectos es una metodología de enseñanza en la que los alumnos deben organizar su aprendizaje con un fin concreto como es la elaboración de un proyecto. Algunos ejemplos aplicados a la enseñanza de la Estadística se pueden encontrar fácilmente en Internet como es el caso de: Enseñanza por proyectos (Batanero y Díaz, 2011) o los Proyectos de Primaria y Secundaria del Gobierno de Canarias http://www2.gobiernodecanarias.org/istac/webescolar

Un proyecto estadístico consta de diversas etapas e incluye diferentes aspectos específicos del razonamiento estadístico. La primera etapa consiste en la formulación de preguntas que se desea investigar para lo cual es necesario considerar si dichas preguntas son o no de naturaleza estadística, es decir, si se refieren a la variación de los datos. La segunda etapa incluye la recogida de los datos para lo que es necesario determinar los medios e instrumentos más adecuados para obtenerlos. La tercera etapa se refiere al análisis de los datos, lo que incluye la selección de la representación más adecuada de acuerdo con la naturaleza de los datos y el fin último que se persigue. En esta etapa se suele recurrir al uso de las medidas estadísticas para obtener más información acerca de cómo están distribuidos los datos. La última etapa consiste en la interpretación de los resultados procurando responder a la pregunta inicialmente planteada para lo cual se extraen las conclusiones referentes a los datos procurando establecer posibles generalizaciones y dando pie a nuevas preguntas que darán lugar a nuevas investigaciones.

En este caso la metodología usada se refiere a proyectos colaborativos, es decir, los alumnos deben trabajar de forma coordinada en grupo con otros compañeros, planificar su trabajo, tomar decisiones, poner en práctica el trabajo y enfrentarse a las dificultades que se encuentran en el camino. Finalmente los alumnos deben obtener un producto de este aprendizaje que es el proyecto con el que se pretende resolver un problema definido inicialmente por cada grupo.

La Enseñanza Basada en Problemas es una metodología que guía el trabajo realizado durante todo el periodo lectivo de una asignatura. Se basa en la formulación de un problema profesional que los alumnos han de resolver utilizando las herramientas teóricas y prácticas correspondientes a la asignatura en cuestión. Se trata de que de esta forma los alumnos alcancen las competencias profesionales necesarias para el ejercicio de su actividad docente (en este caso).

Esta metodología exige al profesor una gran dedicación pues tiene que proporcionar, a cada grupo de trabajo, las ayudas necesarias para realizar el proyecto, debe controlar los tiempos para que el trabajo por proyectos resulte efectivo, ha de tutorizar a cada grupo de trabajo en función del proyecto que hayan elegido, ha de mantener los estándares de exigencia necesarios para que los alumnos adquieran las competencias asociadas a su formación y ha de realizar la evaluación pertinente que contemple todo el trabajo realizado por los alumnos.

Las actividades que han de realizar los alumnos son actividades abiertas lo que supone un gran riesgo para el profesor puesto que no puede programar con antelación las dificultades con las que se puede encontrar cada grupo de trabajo. El abordaje de los problemas planteados por los alumnos puede ser muy variado. Esto implica que los alumnos van a abordarlo utilizando muy variados heurísticos, con herramientas teóricas muy diferentes y con puntos de vista también muy variados. Un mismo problema mostrará una gran variedad de abordajes según el grupo de alumnos que trabaje en él.

Este tipo de trabajo supone que el alumno trabaja con cierta autonomía durante un periodo largo de tiempo. Si esto se realiza de esta manera los alumnos lograrán adquirir un gran número de competencias: de toma de decisiones, de trabajo en grupo, de búsqueda de información, de organización de esa información, de comunicación y de reflexión.

Si aplicamos esta metodología a la enseñanza de la Estadística, exige que los estudiantes experimenten todo el ciclo del trabajo estadístico diseñando investigaciones, planteando preguntas de investigación, recogiendo datos, analizándolos y extrayendo conclusiones (Franklin, et al. 2005; Burrill y Camden, 2006). Si además lo hacen en grupos, se favorece la adquisición de conocimientos bajo una perspectiva socio cultural. La escritura del informe final exige que el análisis e interpretación de los datos siga un argumento convincente que responda al problema planteado. La presentación de la propuesta en público favorece la comunicación de ideas y desarrolla el razonamiento estadístico. Finalmente, llevar el proyecto a un aula implica la contextualización, en el potencial centro de trabajo del estudiante para maestro, el desarrollo realizado.

Si tenemos en cuenta las palabras de Batanero y Díaz (2011, pp 21-22) “Los proyectos estadísticos aumentan la motivación de los estudiantes. No hay nada que haga más odiosa la Estadística que la resolución de ejercicios descontextualizados, donde se pida al alumno calcular la media o ajustar una recta de regresión a un conjunto de números. No hay que olvidar que la Estadística es la ciencia de los datos y los datos no son números, sino números en un contexto”. Por tanto la Enseñanza basada en proyectos sigue las últimas recomendaciones sobre enseñanza de la Estadística. Además, favorece la motivación, la capacidad de hacer preguntas, la creatividad, la interpretación, así como un posicionamiento crítico y la autonomía del aprendizaje sin olvidar las habilidades lingüísticas y comunicativas tanto orales como escritas.

DISEÑO DE LA ENSEÑANZA

Como se ha indicado, este modelo de enseñanza se ha llevado a cabo en la asignatura Matemáticas y su Didáctica III que se imparte en el 4º curso del Grado de Maestro en Educación Primaria en la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca. Esta asignatura tiene dos grupos correspondientes a los dos turnos de docencia: mañana y tarde. Cada uno de estos grupos está formado por unos 60 alumnos. Las clases se impartieron durante el segundo cuatrimestre en sesiones de cuatro horas semanales. Dos de esas horas se dedicaron a la revisión y estudio de contenidos formativos para el maestro, todos ellos relacionados con el conocimiento especializado del contenido (Ball, Thames y Phelps, 2008) y en las otras dos horas se realizaron tutorías programadas para el desarrollo de los proyectos realizados por los alumnos. Las clases teóricas y las prácticas estaban estructuradas de manera interrelacionadas. Los alumnos trabajaron en grupos de trabajo de entre 4 y 5 alumnos.

Para diseñar la asignatura se tuvieron en cuenta las competencias que el alumno debe adquirir a lo largo de su formación como maestro:

Competencia 1: Adquirir competencias matemáticas básicas relacionadas, esencialmente, con organización e interpretación de la información y probabilidad.

Competencia 2: Conocer el currículo escolar de matemáticas.

Competencia 3: Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana, y valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico.

Competencia 4: Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.

Competencia 5: Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

En función de esas competencias y dado que la asignatura estaba enfocada en la enseñanza de la Estadística se determinaron los objetivos que se pretende que alcance el alumno. Se pretende que aprenda a:

Identificar las diferentes etapas en el desarrollo de un proyecto estadístico y desarrollar uno.

Diseñar una secuencia de aula a partir de un proyecto estadístico.

Gestionar y desenvolverse en una situación profesional real, semejante a las que tendrá que hacer frente tras la consecución del título.

En concreto los estudiantes, en grupos, desarrollaron y presentaron un Proyecto en el que tenían que demostrar las competencias matemáticas y profesionales que se necesitan para superar la asignatura. Toda la organización del curso y del trabajo de los estudiantes gira en torno al desarrollo de dicho Proyecto.

La información para el desarrollo del curso estuvo a disposición de los estudiantes en la *Guía del alumno para el desarrollo del curso* que incluye, en esencia, el conjunto de tareas que debe realizar, las condiciones que han de observarse para realizarlas y, finalmente, los resultados que han de obtenerse y la forma de presentarlos para que la evaluación pueda llevarse a cabo. Esta Guía y los demás documentos necesarios para el desarrollo de la asignatura figura en Studium, la plataforma Moodle que la Universidad de Salamanca utiliza para facilitar el acceso a los estudiantes de la información que cada profesor de cada asignatura pone a su disposición. En ella se incluye, además, una bibliografía fundamental, de uso necesario, y otra complementaria, para poder profundizar en los contenidos del curso.

El desarrollo del curso se realizó, en el aula de clase y en el horario de la asignatura, realizándose dos tipos de actividades de forma paralela:

Formación (2 horas semanales): Dirigida por el profesor, que debe aportar la formación suficiente para que los estudiantes puedan realizar el proyecto que deben desarrollar en grupos de trabajo. Incluye, esencialmente, por un lado, aspectos relativos a trabajo por proyectos y, por otro, contenidos de Estadística, probabilidad y de razonamiento estadístico, y de su aplicación al aula de Primaria.

Desarrollo del proyecto (2 horas semanales para cada estudiante pero 4 horas para el profesor ya que el grupo de alumnos se distribuyen en 2 grandes grupos): Realizada por los estudiantes de forma autónoma, en grupos de trabajo, a partir de su trabajo y la formación recibida. En estas sesiones se realizan, principalmente, tutorías obligatorias para que los grupos avancen en sus proyectos.

Además cada estudiante, de forma individual o en grupo, utilizó el tiempo que consideró necesario para abordar los contenidos.

Los grupos de trabajo realizaron un proyecto, utilizando las estrategias de trabajo en grupo más adecuadas y que incluía dos partes:

El Proyecto estadístico: Para el cual los alumnos debían elegir el tema, establecer sus fases correspondientes, buscar documentación, diseñarlo y ejecutarlo. Además se les proporcionó unas guías para la elaboración del proyecto estadístico que contemplaba las cuatro partes de éste, a saber: la formulación del problema, la recogida de datos, la organización y análisis de datos, y la interpretación de los resultados. Para el desarrollo de cada una de estas partes se les proporcionó, a los alumnos, material en forma de hojas de trabajo que debían completar y que fundamentalmente estaban orientadas a la toma de decisiones en torno a su tema de trabajo.

Aplicación del proyecto en un centro o lugar: Para el cual el alumno debía buscar el centro/lugar donde poner en práctica el proyecto y gestionar su presentación, diseñar las tareas que se van a realizar, aplicarlas y evaluarlas. Para poner en práctica el proyecto en el centro los profesores facilitaron a los alumnos una carta de presentación para el director de los centros escolares que les permitiera abrir el camino para conseguir un espacio donde poner en práctica todo lo aprendido. Además debían incluir en el proyecto el consentimiento del profesor que les había permitido usar parte de su horario para este fin.

Se realizaron una presentación de avances, presencial y por escrito, en el primer tercio del curso aproximadamente y la presentación final por escrito. Además cada grupo defendió su proyecto presencialmente, en unos 10 minutos, ante el resto de compañeros que integran la asignatura mediante una presentación digital previamente elaborada, seguida de preguntas por parte del profesor y de cualquier compañero.

La evaluación de la asignatura tuvo en cuenta tanto el informe final del proyecto como las presentaciones que se hicieron a lo largo del curso, la valoración que hicieron los grupos del trabajo realizado por los compañeros, el trabajo realizado durante las tutorías y un portafolios que debían entregar al final del curso sobre el desarrollo de la asignatura. La valoración de cada uno de estos apartados se hizo teniendo en cuenta diferentes técnicas. Así la valoración de los proyectos realizados por los compañeros se realizó mediante una escala de valoración (ver Anexo 1), el proyecto fue evaluado mediante una rúbrica (Anexo 2) y el portafolio, mediante una lista de control (ver anexo 3) y para las tutorías se consideraron, esencialmente, la participación y el nivel de respuesta a las preguntas realizadas. Para obtener la calificación final de cada alumno se aplicaron los siguientes porcentajes:

Tabla 1: Calificación de la asignatura

Proyecto del grupo	Presentación de avances (10%)	60%
	Proyecto final (50%)	
Portafolios individual	Portafolios (20%)	40%
	Valoración del trabajo de otros grupos y del propio trabajo (10%)	
	Tutorías y otros aspectos (10%)	
CALIFICACIÓN FINAL		**100%**

ALGUNOS EJEMPLOS

Los proyectos realizados por los alumnos fueron de muy diferentes índole. En total fueron 25 proyectos en los dos grupos del curso. Intentando clasificar los proyectos por temáticas podemos considerar que fueron:

Tabla 2: Proyectos abordados por los alumnos

Tipo de temática	Problemática abordada	Número de grupos
Ocio	Actividades extraescolares Hábitos de lectura Práctica deportiva de los salmantinos Beneficios de la práctica deportiva	9
Sociales	Tipos de familias españolas Uso y riesgo de redes sociales Sexismo	7
Salud	Hábitos saludables Hábitos alimenticios Obesidad infantil	3
Educación	Evolución educativa del mundo rural Uso de las TICs en el aula Posibilidades para trabajar como docente en Europa Comparación de calificaciones entre Diplomatura y Grado Bullying	6

La realización del proyecto supuso a los alumnos un trabajo intenso en diferentes sentidos. En primer lugar, debieron aprender a utilizar fuentes documentales en las que encontrar información sobre la temática que iban a abordar y que les permitiera dar fundamentación teórica al trabajo estadístico que iban a realizar. Esto implicó también el desarrollo de la capacidad de selección de la información adecuada, la síntesis de dicha información y el aprendizaje correspondiente a la escritura de un trabajo académico bien estructurado, con referencias explícitas bien citadas así como la inclusión de las referencias finales en formato APA. Constituyo un aspecto del proyecto que les llevó a profundizar en diferentes aspectos teóricos y científicos de la temática seleccionada.

Los alumnos jamás se habían enfrentado con la determinación y formulación de un problema y, aunque se les fue guiando paso a paso, fue uno de los aspectos que encontraron más dificultades. La concreción de los objetivos del proyecto, la determinación de las palabras clave que identifican la temática abordada y las preguntas de investigación que se plantearon fueron los aspectos principales en cuanto a la primera de las etapas del proyecto estadístico. Algunos problemas identificados por los alumnos fueron:

> (GRUPO 5A) *El **problema** que queremos estudiar es determinar cuántas actividades extraescolares hay en el colegio en el segundo ciclo de Educación Primaria, cuáles son, qué ha motivado a los niños a elegirlas, el número de niños de dicho ciclo que asisten a cada una de ellas, qué profesores las imparten, y si son gratuitas o de pago. Para poder encontrar una solución a este problema nos hemos formulado las siguientes preguntas:*
>
> *- ¿Cuántas actividades extraescolares hay? ¿Cuáles son? ¿Cuáles son las más demandadas?*
>
> *- ¿Por qué se han elegido? ¿Influye acudir al comedor o verse acompañado por algún amigo?*
>
> *- ¿Qué profesores las imparten (especializados o externos)?*
>
> *- ¿Son gratuitas o de pago? ¿Participa el AMPA?*
>
> (GRUPO 1A) *El problema que vamos a estudiar a lo largo de dicho Proyecto sería el impacto y éxito de las redes sociales en la población salmantina según los distintos rangos de edades y de sexo.*
>
> (GRUPO 2B) *En la actualidad y durante los últimos años hemos observado que España ha estado y sigue estando en recesión desde que surgiera la crisis económica mundial; razón por la cual muchos jóvenes se están planteando la búsqueda de empleo fuera de nuestras fronteras.*
>
> *Como estudiantes de último curso de Grado en Maestro de Educación Primaria estamos preocupados por nuestro futuro laboral, por lo que vamos a analizar donde se dan las mejores posibilidades para trabajar como docente tanto en España como en otros países de Europa.*
>
> (GRUPO 1B) *¿Realmente se obtienen mejores resultados en el plan de Grado que en plan de Diplomatura, en la asignatura de Matemáticas financiera, que se imparte en la facultad de Turismo y Finanzas de la Universidad de Sevilla?*

A partir del enunciado del problema los alumnos identificaron las variables, asignaron un tipo a dichas variables, determinaron la población y la muestra y asignaron un código a cada uno de los valores de la variable. En los siguientes extractos se puede ver la identificación de variables de un grupo que estudió las actividades extraescolares y otro sobre los centros escolares rurales.

> *(GRUPO 5ªA) Las **variables** que hemos elegido para el estudio de la población en la recogida de datos han sido las siguientes:*
>
> *- Edad: cuantitativa discreta.*
>
> *- Sexo: cualitativa.*
>
> *- Tipo de actividades: cualitativa.*

- *Carácter de las actividades: cualitativa.*

- *Motivación para elegir la actividad: cualitativa.*

- *Años de duración en la actividad extraescolar: cuantitativa discreta.*

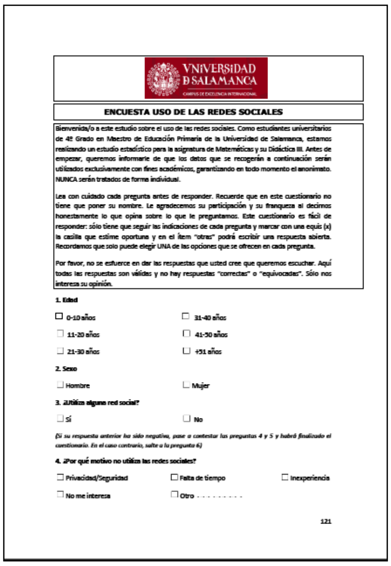
- *Procedencia de los monitores: cualitativa.*

(GRUPO 7B) *Una vez pudimos contar con estos documentos, elaboramos una serie de tablas para facilitar la labor de análisis, en función de las siguientes variables:*

- *Variable numérica: notas y número de convocatorias agotadas.*
- *Variables dicotómicas: notas alfabéticas.*

En los datos con los que hemos trabajados, aparecen también otras variables dicotómicas como: Sexo: masculino (M), femenino (F); Nacionalidad: español (S), extranjero (F), pero por motivos de extensión del trabajo no las hemos utilizado. Estas pueden servir para estudios posteriores.

En cuanto a la segunda etapa, correspondiente a la recogida de datos, se hizo de muchas formas. Se insistió en la importancia de la selección de la muestra para lo que se estudiaron diferentes caminos que condujeran a dicha selección. Según los diferentes grupos se utilizaron diferentes instrumentos: encuestas orales, cuestionarios escritos, resultados especificados en páginas web, datos del MEC… En este sentido realizaron cuestionarios de muy diversa índole: abiertos, cerrados, semiabiertos,… A continuación se muestra una hoja de parte de una encuesta realizada sobre el uso de las redes sociales:


VNIVERSIDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

ENCUESTA USO DE LAS REDES SOCIALES

Bienvenida/o a este estudio sobre el uso de las redes sociales. Como estudiantes universitarios de 4º Grado en Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Salamanca, estamos realizando un estudio estadístico para la asignatura de Matemáticas y su Didáctica III. Antes de empezar, queremos informarle de que los datos que se recogerán a continuación serán utilizados exclusivamente con fines académicos, garantizando en todo momento el anonimato. NUNCA serán tratados de forma individual.

Lea con cuidado cada pregunta antes de responder. Recuerde que en este cuestionario no tiene que poner su nombre. Le agradecemos su participación y su franqueza al decirnos honestamente lo que opina sobre lo que le preguntamos. Este cuestionario es fácil de responder: sólo tiene que seguir las indicaciones de cada pregunta y marcar con una equis (x) la casilla que estime oportuna y en el ítem "otras" podrá escribir una respuesta abierta. Recordamos que solo puede elegir UNA de las opciones que se ofrecen en cada pregunta.

Por favor, no se esfuerce en dar las respuestas que usted cree que queremos escuchar. Aquí todas las respuestas son válidas y no hay respuestas "correctas" o "equivocadas". Sólo nos interesa su opinión.

1. Edad

☐ 0-10 años ☐ 31-40 años
☐ 11-20 años ☐ 41-50 años
☐ 21-30 años ☐ +51 años

2. Sexo

☐ Hombre ☐ Mujer

3. ¿Utiliza alguna red social?

☐ Sí ☐ No

(Si su respuesta anterior ha sido negativa, pase a contestar las preguntas 4 y 5 y habrá finalizado el cuestionario. En el caso contrario, salte a la pregunta 6)

4. ¿Por qué motivo no utiliza las redes sociales?

☐ Privacidad/Seguridad ☐ Falta de tiempo ☐ Inexperiencia
☐ No me interesa ☐ Otro . . . .

121

Figura 1: Inicio del cuestionario del grupo 15A

Algunos grupos realizaron encuestas en la calle, otros en colegios o en centros de salud y algunos reutilizaron encuestas realizadas por profesionales que tenían que ver con su centro de interés. El diseño de las encuestas fue un aprendizaje intenso por parte de los alumnos. Aunque al principio las preguntas eran vagas y muy generales, poco a poco se fueron concretando, evitando la confusión y la ambigüedad, buscando la relación con las variables objeto de estudio y dándose cuenta de la importancia del lenguaje en la formulación adecuada de las preguntas. Muchos de ellos indicaron al final del proceso que si tuvieran que volver a realizar el estudio lo harían de otra manera, lo que demuestra su aprendizaje. Además fueron críticos con el proceso seguido por ellos mismos:

(GRUPO 15A) *También, creemos conveniente señalar que la técnica de recogida de datos no ha sido lo bastante eficaz como creíamos en un principio y nos ha llevado bastante tiempo, además de que hemos cometido fallos en esta parte, pero que pronto pudimos solventar. Respecto también a las encuestas, nos ha sido imposible tomar una muestra que fuera representativa de la población que elegimos y por eso en las interpretaciones, hemos intentado estimar o prever los resultados en toda la población de Salamanca. Así mismo, a la hora de realizar las encuestas hemos contado con alguna problemática, principalmente porque las personas encuestadas no leían detenidamente las instrucciones, lo que les llevaba a cometer fallos y por lo tanto, tener que desechar esas encuestas. También puede ser que algunas preguntas no estuvieran bien formuladas, y por tanto, llevar a la confusión; este sería un aspecto que podríamos mejorar en futuras aplicaciones.*

Quizás la etapa más fácil para ellos fue la tercera, el análisis de los datos. Casi todos los grupos de alumnos utilizaron Excel como medio de organizar los datos. Este proceso fue tedioso pero permitió posteriormente recurrir a todas las opciones que ofrece el software para proceder al análisis de los datos. Así los alumnos recurrieron a gráficas de diferente índole, tablas y medidas para analizar los datos. Por ejemplo en el siguiente gráfico podemos ver el estudio de un grupo acerca de la escolarización en diferentes países en centros privados:

	Escolarización según titularidad: Privada.
ALEMANIA	2,40%
ESPAÑA	31%
FINLANDIA	2,80%
FRANCIA	18%
ITALIA	5,50%
PORTUGAL	9,10%
REINO UNIDO	6,30%
MEDIA	10,73%

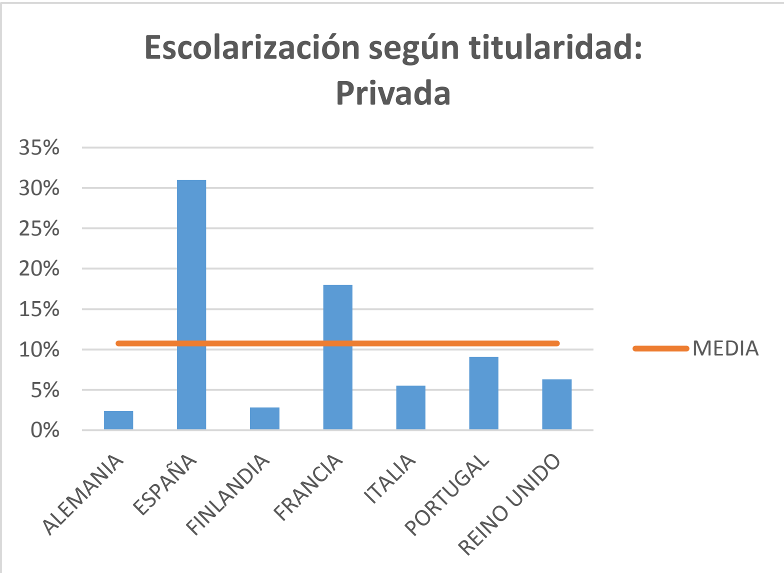


Figura 2: Tabla y gráfica del grupo 2B

Algunos grupos tuvieron dificultades con el análisis de los datos pues recurrieron a medidas inadecuadas respecto de la variable estudiada o gráficos mal organizados o que no eran los idóneos. En este caso se presenta un gráfico realizado por un grupo en torno al uso de las redes sociales.

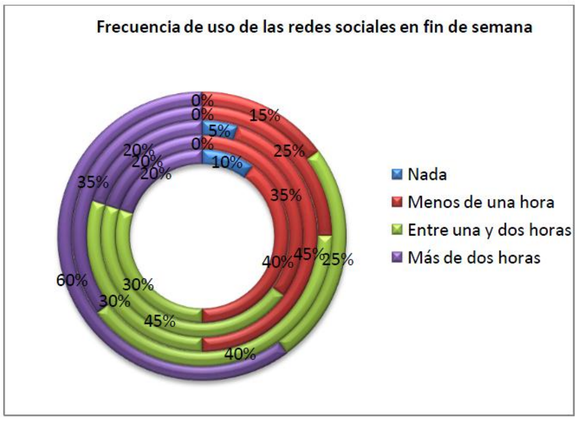


Figura 3: Gráfico del grupo 9B

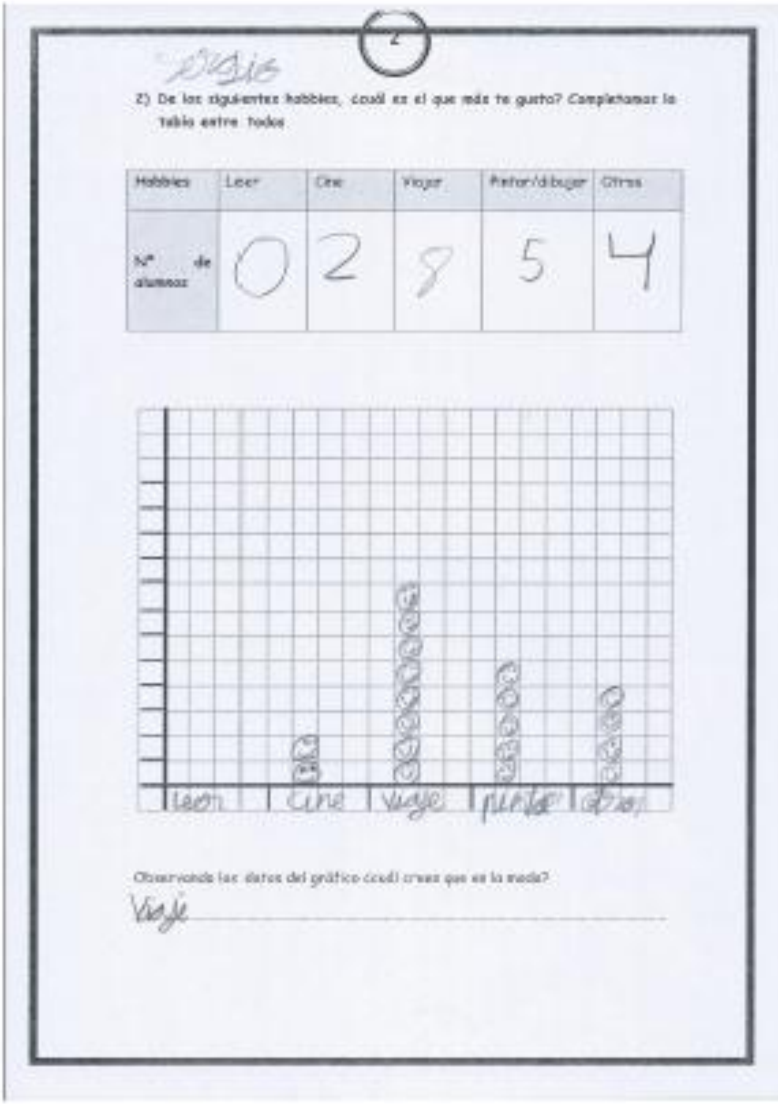
Para el análisis de los datos las medidas más utilizadas han sido las de tendencia central. Pocos alumnos han recurrido a otro de medidas, por ejemplo para estudiar la dispersión. Tal es el caso de los siguientes alumnos que recurrieron a la moda para el estudio del bullying. De la siguiente forma justifican su elección.

> (Grupo 6B) *Por otro lado, decidimos hacer la moda ya que era lo más adecuado y coherente con nuestro proyecto, ya que vimos que ésta era funcional debido a que los datos eran cualitativos. Hemos realizado la moda de los hombres, las mujeres y de ambos en conjunto. La moda nos ayuda a determinar cuáles son los máximos de cada variable, es decir, en qué variable de los diferentes tipos de agresiones la frecuencia con la que se da es mayor. Curiosamente, la frecuencia máxima en ninguno de los ítems es la variable "siempre", y la de "casi siempre" solo se da en un tipo de agresión, que sería el caso de los insultos. Además, lo más curioso que hemos detectado en este análisis es que, como podemos observar en la tabla, los datos obtenidos de la columna de los hombres y las mujeres es igual, esto es, que los máximos de ambos responden a la misma variable.*

En cuanto al informe, casi todos los alumnos hicieron un informe descriptivo de los resultados que habían obtenido. Fueron pocos los grupos que avanzaron más buscando las causas y las consecuencias de los resultados de su proyecto. Por ejemplo a continuación se muestran las conclusiones del grupo que estudió el uso de la bicicleta:

> (Grupo 12B) *Groso modo, daremos los siguientes puntos como conclusión sobre los resultados de este proyecto en el que por otro lado, se puede comprobar en cada una de las gráficas que acompañamos una impresión sobre el resultados de las mismas.*
>
> *Los puntos son los siguientes:*
>
> - *El tipo de bicicleta usada por la mayoría de los ciclistas es de carretera.*
> - *La mayoría de los integrantes que componen un grupo ciclistas son de más de 10 ciclistas.*
> - *Los días que los grupos ciclistas salen en bici suelen ser sábados y domingos.*
> - *La media de la distancia recorrida por los grupos ciclistas de 100 Km.*
> - *Las personas que suelen ir en el grupo están entre 5 y 10.*
> - *La media de kilómetros realizados es de 25-30*
> - *El tipo de recorrido realizado por los grupos en las salidas es de tipo variado.*

Los proyectos se presentaron tanto en centros públicos como concertados de Salamanca y sus alrededores. Los alumnos hicieron dos sesiones de puesta en práctica del proyecto y de las actividades que tenían programadas.



2) De los siguientes hobbies, ¿cuál es el que más te gusta? Completamos la tabla entre todos

Hobbies	Leer	Cine	Viajar	Pintar/dibujar	Otros
Nº de alumnos	0	2	8	5	4

Observando los datos del gráfico ¿cuál crees que es la moda?

Viaje

Figura 4: Actividad realizada en un centro de primaria por el grupo 6A

En general resultó sumamente enriquecedor para ellos sentir la culminación de todo el proceso con esta puesta en práctica y con el contacto con niños de diferentes edades. Esto dotó de sentido a todo el trabajo realizado durante el cuatrimestre. Sin embargo también reconocieron que fue dificultoso localizar un espacio donde poner en práctica su diseño por las suspicacias con que los recibían en los centros.

En esta última fase realizaron una descripción del contexto en el que se ubicaba el centro donde realizaron las sesiones de aula, diseñaron las tareas que iban a realizar con los alumnos, identificaron los contenidos y objetivos que se iban a trabajar y realizaron una evaluación del proceso. Incluso grabaron en audio las clases y las transcribieron para reflexionar sobre la puesta en práctica de las actividades realizadas. Otros recogieron algunos de los trabajos de los alumnos para tener un repositorio del trabajo realizado:

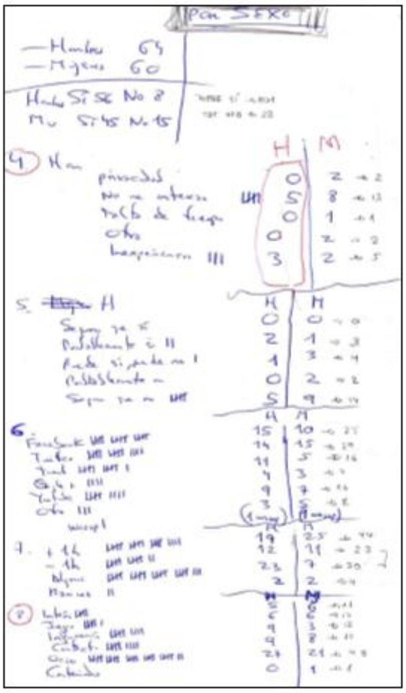


Figura 5: Trabajo realizado en un aula de primaria por el grupo 15A

En esta fase hay que destacar la capacidad de reflexión de algunos grupos de alumnos en torno a todo el proceso de enseñanza, identificando las dificultades de la puesta en práctica, de los materiales elaborados y las dificultades de los alumnos al realizar las tareas.

Figura 6: Un grupo de alumnos enseñando Estadística

En general los alumnos destacaron el intenso trabajo realizado, el aprendizaje conseguido a lo largo de todo el cuatrimestre, la cooperación necesaria para el funcionamiento de los grupos, la continua revisión del trabajo realizado con anterioridad y la interdisciplinariedad de las temáticas abordadas.

CONCLUSIONES

La metodología de enseñanza basada en proyectos ha supuesto un reto tanto para los profesores como para los alumnos de la asignatura Matemáticas y su didáctica III pues era la primera vez que se utilizaba. El diseño que se realizó durante el curso 2013-2014 fue un diseño experimental que irá mejorándose a medida que se vaya poniendo en práctica en sucesivos cursos y los profesores se vayan enfrentado a las diversas situaciones que surjan.

La experiencia ha sido muy positiva tanto para los alumnos como para los profesores. Aunque los profesores han tenido que realizar un trabajo ímprobo de preparación de materiales y de seguimiento y evaluación de los proyectos, creemos que de esta forma los alumnos adquieren competencias profesionales que de otra manera no van a adquirir. En cuanto a los alumnos, han estado involucrados de lleno en el trabajo, han aprendido Estadística en contexto, han utilizado diversas herramientas estadísticas, han trabajado en grupo de forma colaborativa, han tenido que gestionar el tiempo y el trabajo y, finalmente, han manifestado que, a pesar de las dificultades encontradas por el camino, han disfrutado y aprendido.

Dado que esta metodología se implantó de forma experimental en el curso 2013-14, se han realizado algunas modificaciones para el 2014-15. Una vez que la asignatura se esté desarrollando durante varios años, sería conveniente realizar una evaluación de la experiencia para poder valorar más específicamente los aspectos positivos y negativos de su puesta en práctica.

REFERENCIAS

Ball, D.L. Thames, M.H. y Phelps, G, (2008) Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 5, 389-407.

Batanero, C. y Díaz, C. (2011): *Estadística con proyectos.* Granada: Universidad de Granada.

Burrill, G. y Camden (Eds.) (2006): Curricular development in statistics education: IASE 2004 Roundtable. Voorburg: International Association for Statistical Education. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/.

Franklin, C.; Kader, G.; Mewborn, D.; Moreno, J.; Peck, R.; Perry, M. y Scheaffer, R. (2005): *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association.Online: www.amstat.org/Education/gaise/.

Garfield, J. y Everson, M. (2009): Preparing Teachers of Statistics: A Graduate Course for Future Teachers. *Journal of Statistics Education 17, 2*, www.amstat.org/publications/jse/v17n2/garfield.html

Instituto Canario de Estadística (2010): *Proyectos de Estadística en Primaria. Guía didáctica.* http://www2.gobiernodecanarias.org/istac/webescolar/primaria.php

Instituto Canario de Estadística (2010): *Proyectos de Estadística en Primaria. Proyecto I: Los envases.* http://www2.gobiernodecanarias.org/istac/webescolar/primaria.php

Instituto Canario de Estadística (2010): *Proyectos de Estadística en Primaria. Proyecto II: Nuestro colegio.* http://www2.gobiernodecanarias.org/istac/webescolar/primaria.php

Pierce, R. y Chick, H. (2011): Teachers' beliefs about statistics education. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education* (pp. 151-162). New York: Springer.

Watson, J. M. (2006): *Statistical literacy at school: Growth and goals.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wild, C. y Pfanckuch, M. (1999): Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67(3)*, 223-265.

Anexo 1: Valoración del trabajo de los compañeros

Escala de valoración del 0 al 3

GRUPO	1	2	3	4...
Originalidad				
Claridad				
Motivación				
Resultados				
Evaluación				
Organización				
Actuación en el aula				
Esfuerzo				
Presentación oral				
Fuentes de información				
Total/3				

Anexo 2: Valoración del Proyecto

	Excelente	**Bueno**	**Satisfactorio**	**Requiere mejoras**
Aspectos formales	Tienen un formato excepcionalmente atractivo, es original y la información está bien organizada.	Tiene un formato atractivo y una información bien organizada.	Información bien organizada.	Organización confusa.
Búsqueda de información	Se han utilizado bastantes fuentes de información que se incluyen en la bibliografía.	Se han utilizado algunas fuentes de información que se incluyen en la bibliografía,	Sólo se ha utilizado pocas fuentes de información que se incluyen en la bibliografía	No se han utilizado fuentes de información.
Recogida y organización de datos	Se indica cómo se han recogido los datos, se incluyen los instrumentos y el calendario de recogida.	Se indica cómo se han recogido los datos pero no se incluyen los instrumentos o el calendario.	Se indica cómo se han recogido los datos pero no se incluyen los instrumentos ni el calendario.	No se incluyen los datos.

	Excelente	Bueno	Satisfactorio	Requiere mejoras
Análisis de datos	Las medidas utilizadas, las gráficas y las tablas son las adecuadas.	Las medidas o las gráficas o las tablas no son adecuadas.	Entre las medidas, las tablas y las gráficas hay sólo un aspecto que es adecuado	Los datos no se han analizados correctamente.
Interpretación de los datos	La interpretación es correcta y completa. Se realizan inferencias a partir de los datos.	La interpretación es correcta y adecuada pero no se realizan inferencias a partir de los datos.	La interpretación o no es correcta o adecuada y no se realizan inferencias a partir de los datos.	La interpretación no está bien hecha.
Valoración del proyecto	La valoración es adecuada y crítica.	La valoración es bastante adecuada y algo crítica.	La valoración es poco adecuada y poco crítica.	La valoración no es adecuada ni crítica.
Análisis del contexto	Se analiza correctamente el contexto amplio, el próximo y el inmediato.	Sólo se analizan correctamente el contexto próximo y el inmediato.	Sólo se analiza correctamente el contexto inmediato	No se analizan correctamente ninguno de los niveles del contexto.
Conocimientos previos de los destinatarios	Se establecen claramente los conocimientos previos de los destinatarios.	Se establecen algunos conocimientos previos de los destinatarios.	No se establecen los conocimientos previos de los destinatarios	Los conocimientos previos de los destinatarios son incorrectas.
Diseño de actuación	Los objetivos, las actividades, los contenidos, los materiales y la evaluación son adecuados y están bien organizadas.	Alguno de los elementos del diseño de actuación no está correctamente diseñado.	Varios elementos del diseño de actuación no son correctos.	Ninguno de los elementos del diseño de actuación son correctos.
Diseño de evaluación	La evaluación es adecuada.	La evaluación es bastante adecuada.	La evaluación es poco adecuada.	La evaluación no es adecuada.
Presentación oral	Se expresa de forma audible y clara manteniendo el contacto visual con los oyentes y dominando los medios tecnológicos.	Se dominan los medios tecnológicos pero la expresión no es audible y clara aunque se mantiene el contacto visual con los oyentes.	Se dominan los medios tecnológicos pero la expresión no es audible y clara y no se mantiene el contacto visual con los oyentes.	La presentación oral es muy deficiente.

Anexo 3: Valoración del Portafolios

Nombre:		
Item	Si	No
Documentación completa		
Establece relaciones entre los contenidos matemáticos		
El registro escrito está ordenado y es claro		
Interés en la asignatura		
La expresión gramatical es correcta		
Corrección en el uso de los términos didáctico-matemáticos		
No hay errores ortográficos		
Hay elementos de ampliación		
Incluye reflexiones críticas		
Originalidad y aportaciones		

Para hacer referencia al artículo:

González, M.T. y Chamoso. J.M. (2015). Enseñanza por proyectos: Una propuesta para la formación de maestros en la educación estadística. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 71-87). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

MATEMÁTICAS PARA HACER MODELOS: EL CASO DE LAS MALAS NOTAS.

Enrique Hernando Arnáiz[a], Constantino de la Fuente Martínez[b]

[a]C. E. La Merced–Jesuitas (Burgos), [b]I.E.S. Cardenal López de Mendoza (Burgos).

[a,b]Asoc. Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán" y EsTalMat Burgos.

Resumen

Aprendemos matemáticas para ser capaces de dar valores, justificar, interpretar, entender, resumir y prever lo que sucede en el mundo que nos rodea. En sus muy diferentes ámbitos. Para ello vamos llenando nuestra "caja de herramientas matemáticas": números, ecuaciones, representaciones gráficas, funciones… Entonces, ¿debemos enseñar matemáticas para ser capaces de hacer modelos o debemos enseñar a hacer modelos para aprender matemáticas y apreciar su utilidad real?

Tras analizar cómo se aborda esta cuestión en nuestras clases, presentamos una propuesta didáctica en la que vamos construyendo nuestras herramientas matemáticas –funciones en este caso– para que sirvan a nuestros fines, en lugar de ser algo dado, estático y con poco uso aparente. ¿Qué hacer para retocar las notas excesivamente malas de un examen?

Palabras clave: *Modelización, funciones, mundo real, resolución de problemas.*

MODELIZACIÓN Y MATEMÁTICAS. ¿QUÉ PONEMOS PRIMERO?

> "El contexto puede ser la vida cotidiana, cultural, científica, artificial, matemático, etc... los problemas del mundo real serán usados para desarrollar conceptos matemáticos... luego habrá ocasión de abstraer, a diferentes niveles, de formalizar y de generalizar... y volver a aplicar lo aprendido... y reinventar la matemática...".
>
> Jan de Lange

¿Debemos enseñar matemáticas para ser capaces de hacer modelos o debemos enseñar a hacer modelos para aprender matemáticas y apreciar su utilidad real? Esa es la pregunta que sobrevuela como objetivo de esta ponencia.

Las matemáticas se usan, se podría decir que en exclusiva, para entender y/o predecir situaciones que pertenecen a un mundo, a una situación, no matemáticos. Nuestro mundo no está compuesto únicamente por números y relaciones. Lo característico de la modelización es poner especial empeño en el inicio del proceso, al hecho de ir desde el problema ajeno al mundo matemático a su formulación matemática, conseguir la conexión entre las matemáticas y la situación en el mundo real y viceversa. En este proceso se atiende tanto al mundo externo como al matemático, y los resultados tienen que ser tanto correctos matemáticamente como razonables en el contexto en el que se produjo la situación.

Lógicamente, si no sabemos matemáticas malamente podremos conseguir modelos que se ajusten a determinadas situaciones pero, por otra parte, si nunca hemos intentado "dominar" los datos resultantes de un hecho en el mundo en que vivimos, no podemos hacernos una idea de para qué pueden emplearse todas esas matemáticas que hemos "aprendido". Mejorar nuestras matemáticas nos permitirá hacer mejores modelos pero, también, buscar hacer modelos mejorará profundamente nuestro manejo y conocimiento de las matemáticas. Quizás incluso haga que, como dice Jan de Lang, descubramos nuevas matemáticas (al menos para nosotros).

¿Cuántos de nuestros libros de texto, del nivel que sean, hacen un hueco entre los temas a desarrollar para trabajar la modelización que tanto nos ayudaría –y hablo tanto de alumnos como de profesores– a mejorar el uso que hacemos de tantas y tantas herramientas matemáticas que hemos ido adquiriendo con el paso del tiempo? Además, ¿no es este el tipo de cuestiones que se plantean a nuestros alum nos en las pruebas de evaluación tipo PISA?

Estas cuestiones me surgen cuando veo que los anglosajones, más prácticos para este tipo de cosas, parece que tienen más claro para qué se van a necesitar realmente las matemáticas y qué tipo de prácticas ayudan mejor a nuestros alumnos a conseguir la habilidad de aplicarlas.

Pongo como ejemplo –quizás el que me parece más llamativo, pero hay muchos– los libros del consorcio americano COMAP, "The Consortium for Mathematics and Its Applications". El nombre de este grupo de profesores ya deja claro su objetivo: hacer que las matemáticas sean útiles; aplicadas. ¿Tenemos algo parecido por aquí?

Y no sólo es interesante el nombre del grupo. Los títulos de los libros que quiero poner como ejemplo y la organización y descripción de sus contenidos son también harto descriptivos:

PRECALCULUS: MODELING OUR WORLD (NIVEL K-10, 4º ESO)

(Y SU VERSIÓN EXTENDIDA, EN CUATRO VOLÚMENES: MATHEMATICS: MODELING OUR WORLD):

Chapter 1: FUNCTIONS IN MODELING

Lesson 1.1: Functions as Models.

Lesson l.2: Creating a Mathematical Model.

Lesson 1.3: Modeling Linear Patterns: Beginning the a Tool Kit of Functions.

Lesson 1.4: Expanding the Tool Kit of Functions.

Lesson 1.5: Transformations of Functions.

Lesson 1.6: Operations on Functions.

Chapter 2: THE EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTIONS

Lesson 2.5: Modeling With Exponential and Logarithm Functions.

Lesson 2.6: Composition and Inverses of Functions.

Chapter 3: POLYNOMIAL MODELS

Lesson 3.1: Modeling Falling Objects

Lesson 3.2: The Merits of Polynomial Models.

Chapter 4: TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

Chapter 5: TRIANGLE TRIGONOMETRY

Chapter 6: COORDINATE SYSTEMS AND VECTORS

Chapter 7: MATRICES

Chapter 8: ANALYTIC GEOMETRY

Lesson 8.2: Modeling with Circles.

Lesson 8.3: Modeling with Parabolas.

Lesson 8.4: Modeling with Ellipses.

Lesson 8.5: Modeling with Hyperbolas

Chapter 9: COUNTING AND THE BINOMIAL THEOREM

Chapter 10: MODELING CHANGE WITH DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS

Lesson 10.1: Modeling Change with Difference Equations.

Es decir. Se tratan todos los temas de una enseñanza obligatoria pero con un enfoque práctico y, por lo tanto, creo yo, más dinámico, motivador y atractivo: "No se trata sólo de presentar a los estudiantes interesantes y complicados problemas en su contexto con soluciones, sino de conocer a fondo el proceso de modelización. El título de los libros es Matemáticas: Modelado Nuestro Mundo. Lo que queríamos hacer y lo que esperamos lograr es hacer que los estudiantes comprendan y participen en el proceso de modelización. No queríamos simplemente mostrarles modelos; queríamos hacerles modeladores".

Otro ejemplo de aproximación a estos temas se ve en el libro, también pensado para K-10:

MODELING WITH MATHEMATICS: A BRIDGE TO ÁLGEBRA

1. SCIENCE: Modeling with Direct and Inverse Variation. How do scientists use mathematics to explore and understand our world?

2. BONES: Using Linear Function to Make Predictions. How does statistics help solve the mystery of Amelia Earhardt?

3. BUILDING A BUSINESS: Systems of Equations and Inequalities. How can a few equations help make better business decisions?

4. ART: Transformations, Symmetry and Proportions. Is there a connection between mathematics and beauty?

5: MOTION: Quadratic Functions. How does mathematics help plan for action-packed movie stunts?

6. GROWTH: Exponential and Logarithmic Functions. How can functions model the population of an endangered species?

7. MONEY AND YOU: Mathematics of Finance. Can I use mathematics to make the right purchasing and financial planning decisions?

8. CYCLES: Trigonometry and Sinosoidal Functions. How do functions predict how things move and sound?

"Uno de los precios que hay que pagar por el enfoque que hemos tomado es una especie de estilo Mozart: demasiadas notas. Cuando abras este libro, verá un montón de palabras. Si vas a pasar tiempo en serio en un contexto real, tienes que pasar cierto tiempo comprendiendo este contexto".

Un ejemplo artillero: La trayectoria de un proyectil.

Ya que estamos en este emblemático lugar para la enseñanza de las ciencias en España, la Academia de Artillería de Segovia y, con motivo de su 250 aniversario, me gustaría poner un ejemplo "del ramo" que muestra bastante bien la conexión modelización-mundo real y, en consecuencia, la importancia de fomentar estas actividades en nuestras clases para conseguir mayor aplicación e identificación con las matemáticas.

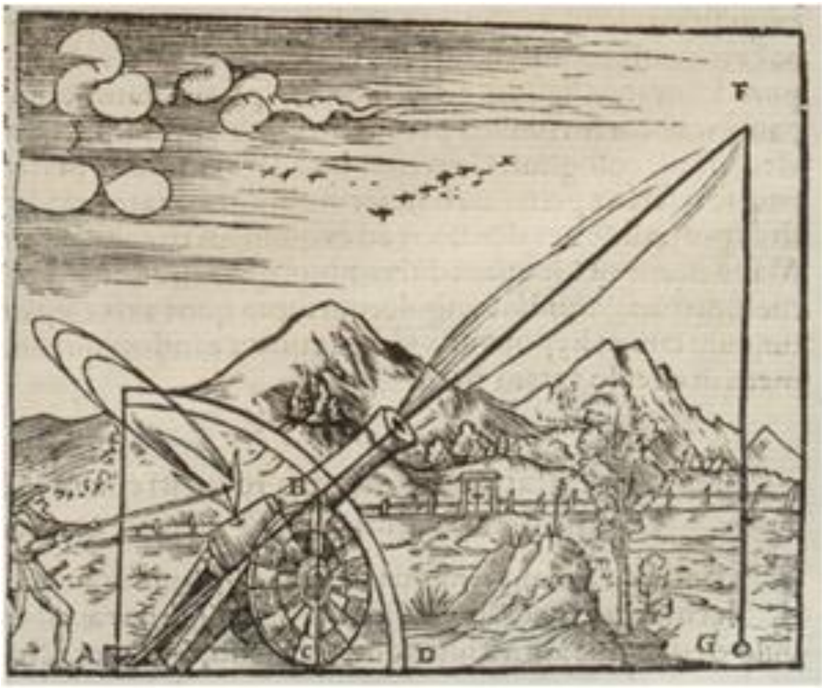


Figura 2. Trayectoria de un proyectil según un libro de texto de 1561.

La Figura 1 está extraída de un libro de texto de matemáticas holandés de 1561: “Problematum Astronomicorum et Geometricorum Sectiones Septem”. Muestra la trayectoria de una bola de cañón. Una trayectoria triangular formada por una línea recta hasta alcanzar una altura máxima y luego otra recta vertical mostrando la caída a plomo de la bola a tierra. Un siglo más tarde, la figura era algo más realista, como muestra la Figura 2, fechada en 1684 y extraída del libro de S. Sturmy, “The Mariners Magazine, or Sturmy’s Mathematicall and Practicall Arts. Sin embargo, sigue cayendo la bola en plan plomada al final de la trayectoria. Hasta poco antes de 1700, gracias a Galileo, estas imágenes no se transformaron en las parábolas que hoy en día dibujaríamos.

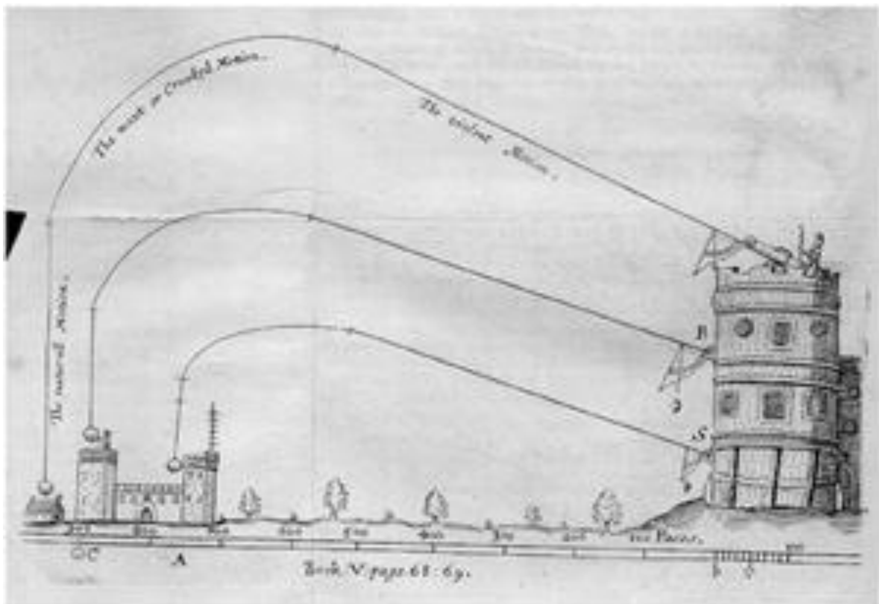


Figura 3. Trayectoria de los proyectiles según la “Revista del Marinero” de 1684.

Es interesante observar el nombre de los tres tipos de movimientos: el “violento”, el mixto o “torcido” y el movimiento “natural” (de caída, se supone).

Estas figuras están extraídas del interesante artículo de Seán M. Stewart, “On the trajectories of projectiles depicted in early ballistic woodcuts,” *European Journal of Physics 33*: 149-166, 2012. Este artículo discute si trayectorias como la fechada en 1684 son realistas según la mecánica de Newton. No sólo plantea aspectos teóricos, también ejercicios prácticos como el ajuste experimental de un modelo a las curvas presentadas en las figuras del s. XVII (dos parámetros bastan para un buen ajuste, como muestra Stewart en su artículo).

El propio Tartaglia (1499-1557) dedicó grandes esfuerzos a intentar ajustar la trayectoria de un proyectil a un modelo matemático, como se ve en su libro “Nuova Scientia, cioè invenzione nuovamente trovata utile per ciascuno speculativo matematico bombardero et altri” (1546).

Figura 4. Estudios balísticos de Niccolo Fontana “Tartaglia” (1546).

Como se puede apreciar, Tartaglia andaba algo lejos de las parábolas que dibujamos hoy en día, trabajando en unas trayectorias compuestas por los tres movimientos que veíamos en la “revista del marinero”. Su falta de acierto a la hora de conseguir un modelo como el que finalmente determinó Galileo se debería a que Tartaglia no disponía de las herramientas matemáticas necesarias para hacer el ajuste o, por el contrario, a que no disponía de unos datos lo suficientemente precisos? Recordemos que la Tartaglia es “famoso” por la resolución de la ecuación de tercer grado y su disputa con Cardano… ¿Sería por falta de práctica o habilidad para crear y ajustar modelos?

Como venimos diciendo, finalmente fue Galileo (1564–1642), un siglo después, en sus “Diálogos entre dos nuevas ciencias” (1638) quien estableció el movimiento de caída de “los graves” como una combinación entre un movimiento horizontal uniforme y uno vertical uniformemente acelerado por la gravedad, lo que da lugar a una parábola y el correspondiente modelo de segundo grado.

Galileo, gracias a su intuición y, no lo dejemos de lado, a su gran habilidad para diseñar y realizar experimentos que le proporcionasen los datos que requería, fue un reconocido modelizador con mayúsculas. La ciencia avanza cuando las matemáticas abordan problemas reales…

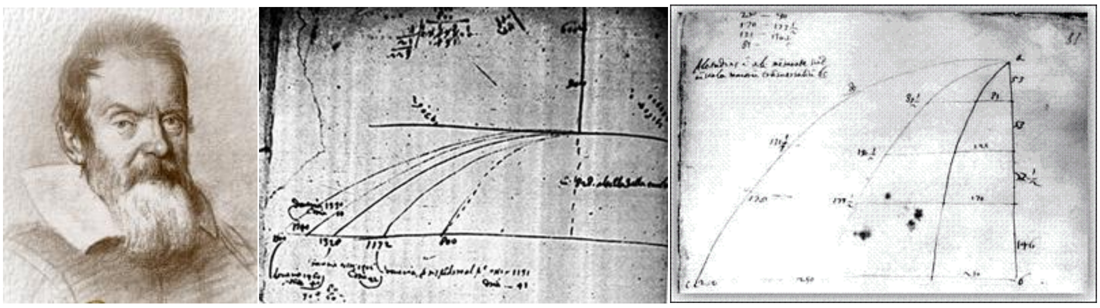


Figura 5. Estudios de Galileo sobre la caída de los cuerpos (1638).

Otro tipo de proyectil, un poco más grande, es el que hizo viajar, por aquella misma época, al austriaco Kepler de observatorio en observatorio por media Europa para finalmente tratar de ajustar la trayectoria de Marte a una circunferencia usando los datos (¿quizás robados?) del danés Tycho Brahe… Y que, al ver que no había forma de cuadrar la trayectoria del planeta con ese modelo circular y pensar si podría ser otro tipo de trayectoria (elíptica), le hizo llegar a sus tres famosas leyes. Gracias a ese intento de ajustar los datos experimentales del mundo real a un patrón matemático fuimos capaces de entender y controlar el movimiento de los planetas en el sistema solar. También fue la base en la que se apoyó el gran Newton para descubrir y formular la Ley de la Gravitación Universal. Otro gran ejemplo de modelización ¿no?

MODELIZACIÓN Y MUNDO REAL.

El germen de nuestra propuesta.

El origen de esta propuesta para trabajar el modelizado en clase se halla en una búsqueda, entre Constantino de la Fuente y servidor de temas nuevos para el proyecto EsTalMat CyL: detección y estímulo del talento precoz en matemáticas; si bien lo hemos usado con bastante buen aprovechamiento en nuestros institutos. Tanto en 4º ESO como en 1º de Bachillerato de EsTalMat:

- Buscar algo que no estuviese en el currículum de Secundaria.
- Modelado/modelizado*: Interesante. Deficitario y trabaja con funciones.
- Libros USA. Esquema montado a partir del modelado
- COMAP: "Consortium for Mathematics and its Applications" Modeling our world, Modeling with mathematics..., Developing Mathematics through Applications…

Días después, nos encontrábamos juntos en las XIII JAEM de Granada (julio de 2007) viendo la conferencia plenaria de Abraham Arcavi –a mí entender una de las diez referencias mundiales más importantes en didáctica de las matemáticas– cuando expuso el siguiente caso que le había llamado la atención:

"Un/a estudiante de escuela secundaria regresó a su hogar contando que su maestra/profesora de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección de esta forma: si la calificación original era x, en una escala de 0 a 100, usual en el país del autor, pasaría a ser $10\sqrt{x}$. Es decir, si la calificación inicial fue $x = 81$, la corregida sería $y = 90$"

Constantino ya había leído el caso en un artículo de Arcavi en la revista UNO, nº 44, y al acabar la conferencia, comentando, ambos nos preguntábamos: "¿Cómo se le ocurriría a esta buena profesora precisamente esta forma de modificarlas?"

En el viaje de vuelta a Burgos, 830 km, se produjo el "alumbramiento":

- Es un modelo con una función muy poco trabajada.
- Perfecto para el uso de las TIC's (ordenadores, proyector, ...)
- Parece motivador:
- Chic@s: el tema de las notas...
- Profesores: ¿os ha pasado? ¿Y en oposiciones/tribunales?
- Pues parecen matemáticas "reales"
- Empezamos (en el coche) un pequeño estudio teórico

¿Un modelo? Qué es y cómo se hace.

Buscando modelos matemáticos: Primeros pasos.

1.- IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA: Qué quieres encontrar? Haz observaciones generales. Plantea preguntas concretas acerca de lo que quieres averiguar.

2.- SIMPLIFICA Y HAZ SUPOSICIONES: Con qué magnitudes crearás el modelo? (que sean manejables)

3.- CONSTRUYE EL MODELO: Interpreta matemáticamente las relaciones que has encontrado. Usa el modelo para responder a las preguntas que te habías planteado.

4.- EVALÚA, REVISA E INTERPRETA: Tus observaciones sobre tu modelo. ¿Cómo es de exacto? ¿Se ajusta a los datos?

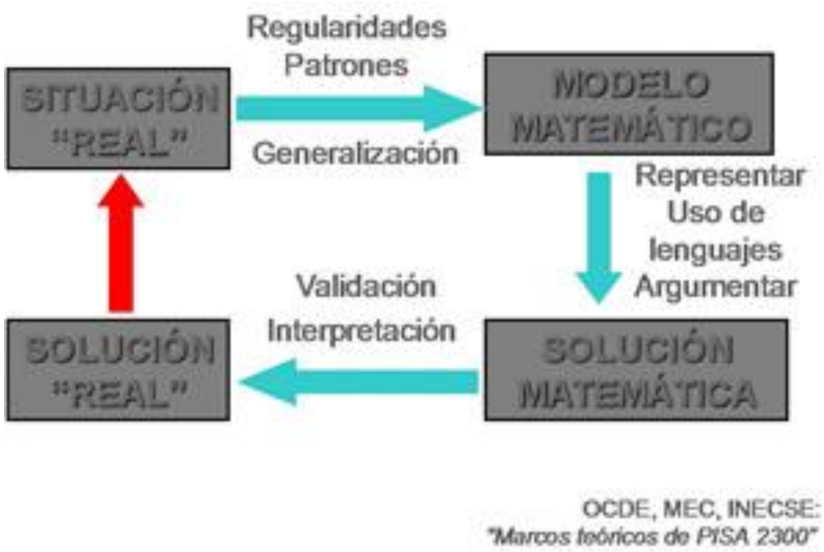


Figura 6. Marcos teóricos de PISA (2003).

Primeros acercamientos. Decisiones sobre qué es, qué debe cumplir y cómo se valora un buen modelo.

Empezamos el trabajo con los chicos:

CASO 1 - LA POLICÍA CIENTÍFICA:

Los forenses científicos, tan en boga en las series televisivas actuales, son llamados a menudo a la escena de un crimen en el que sólo quedan esqueletos (o partes de ellos) como evidencia. Algunas veces, en el intento de identificar el cuerpo, se les pide que determinen la altura del individuo a partir de los pocos huesos que han quedado.

A finales del siglo XIX se predecía la altura mediante razones. Por ejemplo, si H es la altura y F la longitud del fémur, se hacía H/F=3,72. Basándonos en este modelo, ¿cuánto te mide el fémur?

En la II Guerra Mundial, las fuerzas aliadas retocaron este modelo para identificar a soldados caídos en batalla: ¿Cuál será la variable independiente?, ¿el dominio razonable?, ¿el rango? (debate)

Se usó $H = 2{,}38F + 65$ (cm). Calcula la altura de una persona cuya longitud del fémur es 42,5 cm. Si alguien mide 170 cm, ¿Cuánto le medirá el fémur?

Explica cómo se pueden usar las gráficas para estimar estas cuestiones... (Usamos la tecnología (calculadora) para encontrar la recta de mejor ajuste (REG lineal), pero no deberíamos usarla hasta no entenderlo nosotros. ¿Por qué esta recta? ¿Cómo se sabe? ¿Qué significa la pendiente? ¿Y si fuese 1 (por ejemplo)? ¿Y la ordenada en el origen ¿?)

CASO 2 - EL "CAMISERO":

Cuando compramos una camisa de caballero, no es necesario especificar las tallas tanto del cuello como de los puños. Parece que los diseñadores sólo necesitan la talla del cuello para confeccionar una camisa que se ajuste tanto a él como a los puños del cliente. ¿Habrá una relación entre los tamaños del cuello y los puños en las camisas de hombre?

Decidimos recoger datos a modo de ejemplo

Identificar los factores que usaremos

Suponemos que la circunferencia del cuello de una persona coincide con su talla.

Además, como las camisas se compran por su talla de cuello, consideraremos esta circunferencia como variable independiente (la que elegimos) y el tamaño de la muñeca como variable dependiente (la calcularemos con nuestro modelo).

Trabajo en grupos:

Tomamos datos de los componentes de los 8 grupos (de 3/4 chicos). Recojo y doy, aleatoriamente, seis datos de gente de otros grupos (más los suyos = 9 ó 10).

Buscamos la relación "funcional" entre los cm de cuello y los de puño del personal con la mayor precisión posible.

Importante que los chicos dibujen sus propuestas a mano para la discusión. Ya usaremos después la tecnología.

Haremos una especie de competición de ajuste con las propuestas usando siete datos, aleatorios, suyos y el mío.

Convenios y procedimiento tras el debate previo:

No usar números con más de 3 decimales.

Aparece el concepto de error-residuo (gráficamente) para ver la precisión del modelo. Se observa que es la diferencia entre el valor de y real y el que predice tu modelo.

Decidimos que es mejor no tener en cuenta los signos de los residuos para ver qué modelo es mejor (mejor cerca de modelo a que se compensen por encima y por debajo)

"EL CASO DE LAS MALAS NOTAS"

Volvemos al problema inicial de la profesora israelí y su mal examen. Tras los ejemplos y el ensayo de modelización anteriores planteamos de nuevo el caso de "arreglar" el mal examen retocando las notas.

Abrimos el debate –como de costumbre–. ¿Qué debe cumplir un modelo que modifique al alza las malas notas producidas?...

¿Oportunidad, realismo, posibilidades, etc. de cada propuesta de modelo?, Se producen debates, votaciones, descripciones de su "funcionamiento"... muy curioso.

Acuerdos

Un poco dirigidos, pero... Notación:

N = máxima nota posible (ISR=100, ESP=10)

a = máxima puntuación obtenida por un alumno

x = nota original del examen

y = nota "maquillada"

Condiciones:

"LA NORMA": Por un lado, parece lógico que los modelos o factores de corrección de los resultados de un examen deben cumplir lo que a partir de ahora denominaremos "la norma": si el rango posible de notas es el intervalo $[a,b]$ se debe cumplir que $\boldsymbol{f(a)=a}$, que $\boldsymbol{f(b)=b}$ y, que , sobre todo, $f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\leq \boldsymbol{f(x)}\leq \boldsymbol{f(b)=b}$, $\forall\ \boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, es decir, las notas corregidas no deben salirse del intervalo de notas permitidas.

"LA JUSTICIA (1)": Por otra parte, otra condición que deberán cumplir nuestros modelos de corrección es la condición que llamaremos de "justicia": una nota inferior en la prueba no puede resultar, una vez hecha la corrección, por encima de notas originalmente superiores, es decir: si $\boldsymbol{x_1<x_2\Rightarrow y_1=f(x_1)<y_2=f(x_2)}$.

"LA JUSTICIA (2)": Otra cuestión. Si la idea es que la nota corregida nunca sea menor que la original –queremos mejorar las malas notas, es decir, que el factor de corrección aplicado beneficie siempre al alumno–, tenemos que ampliar esta condición de "justicia" con una segunda condición (de muy fácil y eficiente verificación gráfica además): el gráfico de la función del factor de corrección que usemos no sólo debe ser monótono creciente (condición anterior), sino además estar por encima del gráfico de la función identidad $\boldsymbol{f(x)=x}$.

Propuesta didáctica.

ACTIVIDAD 1.1: "Un/a estudiante de escuela secundaria israelí regresó a su hogar contando que su profesora de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección en forma de función, $y = f(x)$, en el que la calificación original, en una escala de 0 a 100 usual en aquel país, era "x" y pasaría a ser "y" una vez corregida. Es decir, si la calificación inicial fue $x=81$, la corregida sería $y = f(81)$". ¿Qué modelo recomendarías a la profesora de forma que corrija esas notas de la manera más razonable que se pueda? (No damos pistas del ajuste que usó la profesora hasta después, para no "levantar la perdiz". Como comentó el profesor Arcavi, parece que un factor radical, como el que utilizó la profesora aludida en la Hª inicial, no será de los primeros que nos vengan a la mente).

Las respuestas que obtendremos serán, normalmente, de los tipos:

$$\boxed{y = x + C},$$

$$\boxed{y = x + \frac{r}{100}x},$$

$$\boxed{y = \begin{cases} Ent\,(x) + 1 \text{ si } x \notin \mathbb{N} \\ x \text{ si } x \in \mathbb{N} \end{cases}},$$

$$\boxed{y = \frac{N}{a}x}$$

ACTIVIDAD 1.2: Como seguro habrás pensado, el sistema educativo español no es exactamente igual en cuanto a las calificaciones de los exámenes. Aquí las notas están dentro del intervalo [0,10].

Vuelve a definir los "factores de corrección"anteriores para que se adapten a nuestro criterio de puntuación. ¿Qué observas?

Prueba los factores que has obtenido con las notas que se obtuvieron en esta clase:

Tabla 1. Bajas calificaciones ¿no?

"NOTAS DEMASIADO MALAS" (BAJAS) $\overline{x} = 3'75$	**1'5**	**3**	**2'5**	**6**	**4'5**	**7'25**	**3'75**	**5'5**	**3'5**
	6	**4'5**	**5**	**1'5**	**3**	**0'25**	**2**	**4**	
	5'5	**4**	**3'25**	**4'75**	**2'75**	**4'25**	**3'5**	**2**	

Estudia cómo hacen cambiar la nota media los factores de corrección que propones... (¿Con qué nota se aprobaría?, ¿En qué nota se convierte el 5 antiguo? ¿Y el 7.25=a?)

ACTIVIDAD 2: La situación anterior tiene una segunda parte: "La profesora israelí decidió transformar las notas usando el modelo $y=10\sqrt{x}$, que transforma, por ejemplo una nota de 81 en otra de 90 puntos".

Averigua con qué nota original se conseguía, una vez corregida con este factor, aprobar el examen (obtener 50 puntos, según el sistema israelí).

Encuentra el factor, equivalente al que utilizó la profesora aludida, adaptado a las notas del sistema educativo español. Represéntalo gráficamente y analiza sus ventajas e inconvenientes.

$$y = \sqrt{10x}$$

(Aquí se suele obtener como ventaja el que cumple con "la norma" y también con "la justicia". Como inconveniente suele aludirse a que $f(2{,}5)=5$ y, sin embargo, $f(8{,}1)=9$).

ACTIVIDAD 3: Averigua el factor equivalente al de la actividad anterior para los casos en los que el intervalo de posibles calificaciones que un estudiante puede obtener en el examen sean las siguientes:

Tabla 2. Modelos de corrección adaptados al abanico de notas

INTERVALO DE NOTAS	MODELO DE CORRECCIÓN
[0,100]	$y=10\sqrt{x}$
[0,10]	$y=\sqrt{10x}$
[-5,5]	
[10,50]	
[a,b]	

ACTIVIDAD 4: Haz un estudio similar con los siguientes factores:

$$y=\sqrt[3]{10^2x},\ y=\sqrt[3]{10x^2},\ y=\sqrt[4]{10^3x},\ y=\sqrt[4]{10x^4},\ \ldots$$

¿Qué particularidades se observan según se van variando uno y otro exponentes y el índice de la raíz? Apoya tus respuestas con las representaciones gráficas necesarias.

ACTIVIDAD 5: Vamos a generalizar ahora el estudio fijándonos en los siguientes factores: $F_n(x)=\sqrt[n]{10^{n-1}x}$ y. $G_n(x)=\sqrt[n]{10x^{n-1}}$Si hacemos $n=2$, ¿qué conocido factor obtenemos para la corrección de las notas? ¿Es el mismo en ambos casos?

Calcula, para algunos de los primeros valores del índice n, el valor de la nota original x que consiga que la nota corregida sea un aprobado, es decir, por un lado el x tal que $F_n(x)=5,\ n=2,3,4,\ldots$ y también el que lo consiga con el otro factor: $G_n(x)=5,\ n=2,3,4,\ldots$ ¿Qué conclusiones podemos sacar acerca del comportamiento de esas dos familias de posibles factores de corrección? (Se trata de ver cómo va cambiando la nota que me permitiría aprobar el examen, una vez corregida con el factor elegido, según vaya variando el parámetro n)

ACTIVIDAD 6: Dado el rango de valores en que se puede mover el resultado de un examen, los factores "F" y "G" son funciones de cuyo dominio sólo nos interesa el intervalo [0,10]. Calcula, para cada nota, el límite cuando el índice "n" tiende a infinito. ¿Hacia qué función tienden los factores "F"? ¿Y los "G"? ¿Y sus derivadas, para ver sus pendientes?

¿Se te ocurre alguna idea acerca del estilo con el que van a "maquillar" las notas cada uno de ellos?

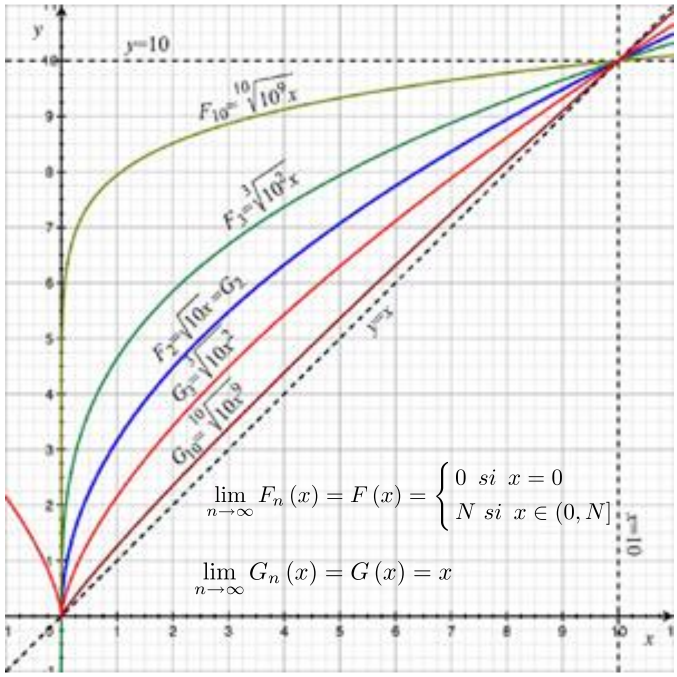


Figura 7. Modelos de corrección por radicales generalizados.

ACTIVIDAD 7: Si pensamos que, dada la suma dificultad que tenía el examen, una nota de 2 puntos se debería transformar en el deseado aprobado, es decir, en un 5, ¿podríamos calcular el menor valor del índice “n”, con el que se consigue si usamos el factor “F”?

¿Y si elegimos cualquier nota de partida para conseguir el deseado aprobado, a partir de qué índice (natural) se consigue? Generalizamos resolviendo $F_n(2) \geq 5$. (en “n”). Ojo, ¡salen logaritmos…!

ACTIVIDAD 8: Vamos a plantearnos la situación inversa: el examen ha sido demasiado fácil y queremos, por el motivo que sea, ajustar las notas “a la baja”. Propón posibles factores de corrección que sirvan, con los condicionantes que ya nos son familiares, para disminuir las notas.

Estudia, para los factores que creas pueden ayudarnos a resolver esta nueva situación, algunos de los detalles que trabajamos en las actividades anteriores (seguramente te vuelva a ser de ayuda representarlos gráficamente): cómo se adapta a distintos rangos de notas, cómo se puede introducir e ir variando algún posible parámetro, tendencias, hasta qué valor de la nota original (mayor que 5, pues el factor las baja) no se consigue el aprobado una vez corregida, cómo conseguimos un factor con el que logremos que sólo se apruebe a partir de la nota que nos parezca…

Puedes, a modo de ejemplo, poner a prueba la eficacia de tus factores “reductores” con este grupo de resultados especialmente buenos:

Tabla 3. ¿Demasiado buenas notas?

“NOTAS DEMASIADO BUENAS” (ALTAS) $\bar{x} = 6'5$	**7**	**8’5**	**5**	**6’75**	**9’5**	**4**	**6’5**	**5’75**	**3’25**
	3’5	**10**	**5’25**	**4’5**	**9’75**	**7’25**	**9**	**9**	
	8’5	**7’75**	**8**	**6**	**1**	**6’25**	**8**	**4’5**	

ACTIVIDAD 9: Comprueba que las siguientes funciones trigonométricas:

$y = x + \left(1 - \cos\frac{\pi x}{5}\right)$ e $y = x - \left(1 - \cos\frac{\pi x}{5}\right)$ también se pueden usar a modo de modelos de corrección similares a "F" y "G" (cumplen los requisitos) . ¿Qué tipo de situación problemática en cuanto a los posibles resultados "extraños" de un examen podría resolver cada una?

Haz sus representaciones gráficas y analiza las semejanzas y diferencias que hay entre ellas.

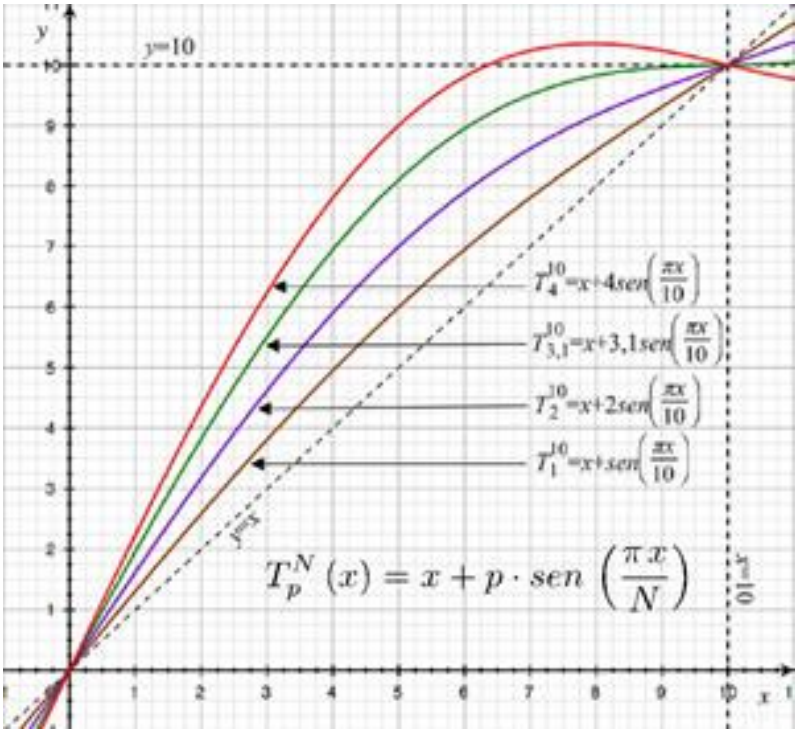


Figura 8. Algunos modelos de corrección trigonométricos.

ACTIVIDAD 10: Construye algún modelo de corrección de tipo logarítmico que sirva para mejorar las calificaciones de un examen respetando las condiciones estipuladas. Análogamente, busca alguno de tipo exponencial para modificarlas a la baja.

ACTIVIDAD 11: Encuentra algún modelo de corrección trigonométrico que mejore las notas cuando éstas son menores que 5 y, sin embargo, las empeore cuando son mayores que cinco.

Haz lo mismo pero para cuando se desea el efecto contrario: baja aún más la nota a los que están por debajo de 5 y favorece a los que sacaron mayor puntuación.

ACTIVIDAD 12: Deseamos un modelo un poco raro (y clasista): que suba las notas a los que tienen puntuación par (su parte entera, lógicamente) y que se la baje, sin embargo, a los que la tienen impar. Un modelo que consiga:

Tabla 4. Modelo oscilante

INTERVALO	EFECTO DEL MODELO DE CORRECCIÓN
$(0,1)$	Sube la nota
$(1,2)$	Baja la nota
$(2,3)$	Sube la nota
…	
$(9,10)$	Baja la nota

<u>ACTIVIDAD 13:</u> “El no va más”. Diseña nuevos tipos de modelos de corrección que se ajusten a distintas necesidades utilizando otros tipos de funciones. Comprueba gráficamente su idoneidad y, a partir de sus características, inventa situaciones que puedan resolver o suavizar. Te damos algunos ejemplos de otras situaciones “curiosas” que se pueden dar cuando repasamos los resultados de un examen:

Tabla 5. Pocas notas”intermedias”

“NOTAS DEMASIADO EXTREMAS” (POLARIZADAS) $\bar{x} = 5,25$	**9,25**	**8,5**	**1,5**	**7**	**3**	**2,25**	**9,5**	**8**	**6,5**
	0,5	**6,75**	**1,25**	**5,25**	**1,25**	**2**	**9,25**	**3,75**	
	10	**4**	**2,5**	**7,5**	**3,5**	**9**	**1**	**8,25**	

Tabla 6. Notas demasiado centradas

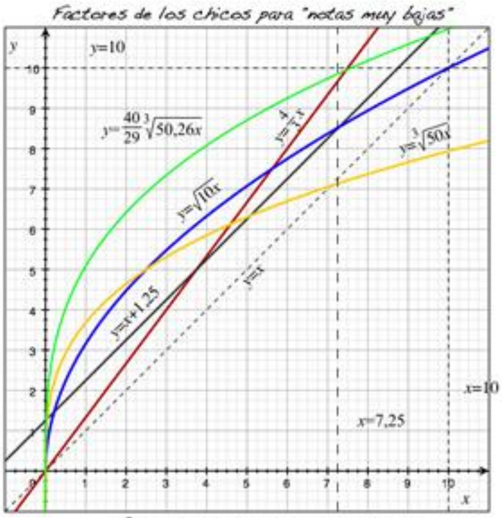
“NOTAS DEMASIADO CENTRADAS” (NO DISTINGUEN) $\bar{x} = 5,25$	**5,5**	**4,75**	**4**	**5**	**7**	**6**	**5,75**	**5,5**	**4,5**
	4,5	**3,5**	**5,5**	**6,5**	**5,75**	**5**	**4,5**	**4,5**	
	5,25	**5,5**	**4,75**	**5**	**6**	**5**	**6**	**6**	

El profesor y la clase

- El trabajo del profesor tiene dos vertientes: plantea secuencialmente las actividades (modera, frena,...) y orienta / ayuda a los grupos.
- El ambiente de clase es de gran interacción y colaboración entre los alumnos y con los profesores. Se deben producir periódicas puestas en común y debates entre chicos y grupos
- Además parece esto política más que matemáticas ¿no?, y en cierto modo es así. Las discusiones sobre la adecuación de las distintas “correcciones” son de índole más bien social.

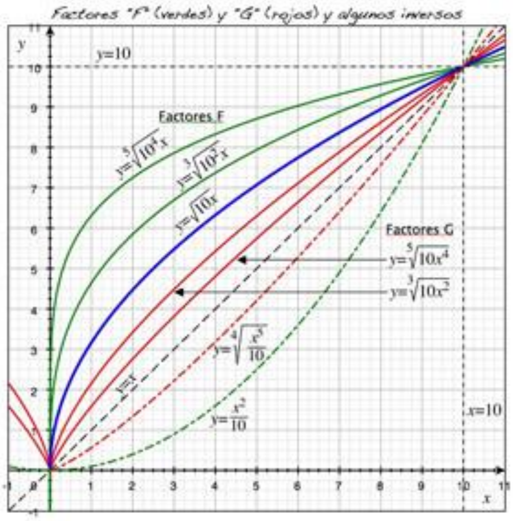
Anexo: Nuestra "caja de herramientas"

Factores de los chicos para "notas muy bajas"

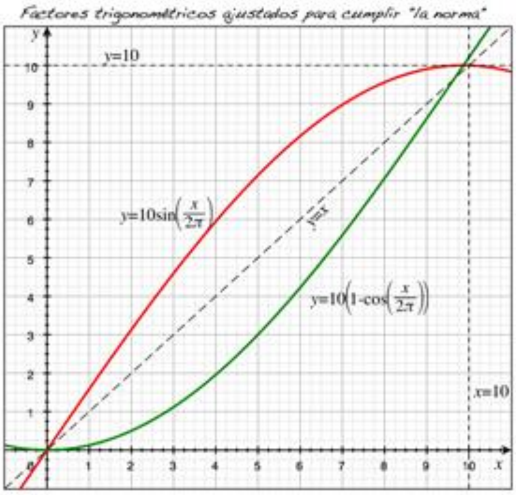


Todos transformaron antes el 7,25 en 10

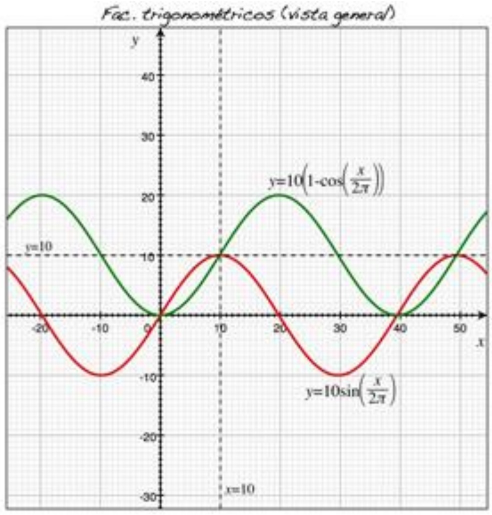
Factores "F" (verdes) y "G" (rojos) y algunos inversos



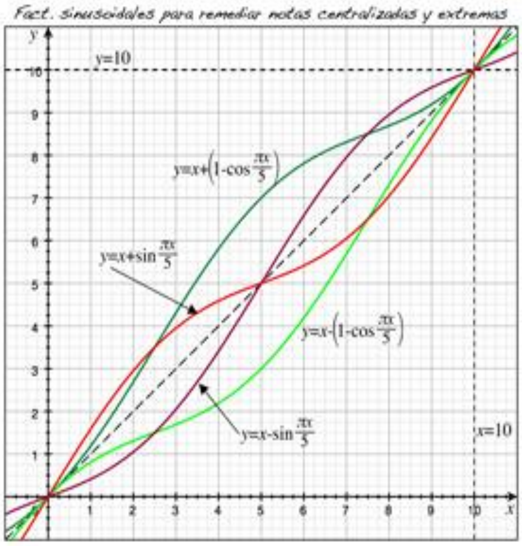
Factores trigonométricos ajustados para cumplir "la norma"



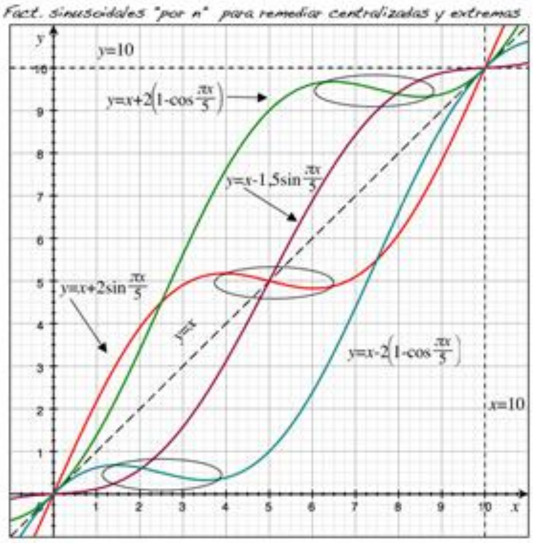
Fac. trigonométricos (vista general)

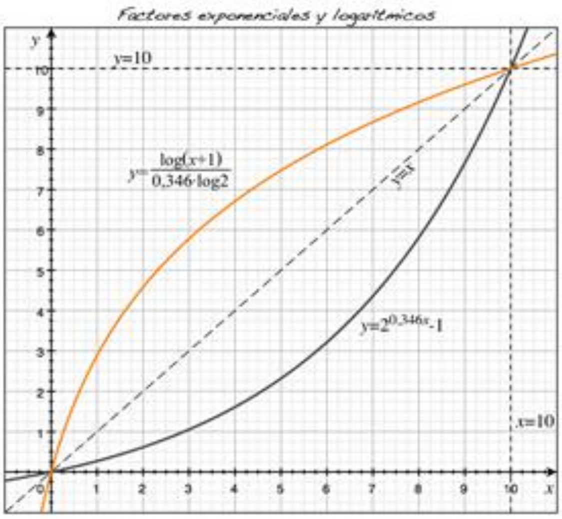


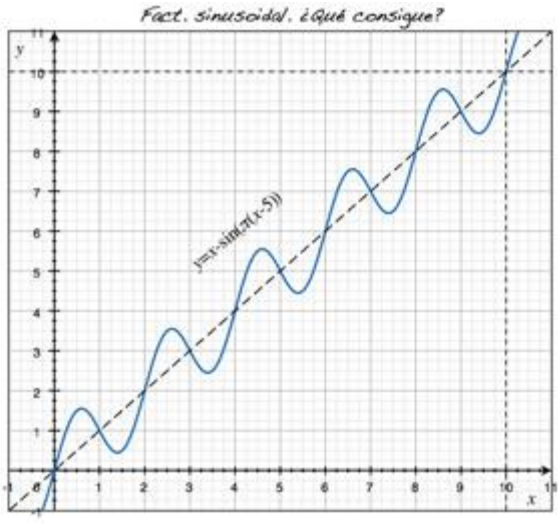
Fact. sinusoidales para remediar notas centralizadas y extremas



Fact. sinusoidales "por n" para remediar centralizadas y extremas







Figuras 9 a 15. Modelos – Factores de corrección para "el caso de las notas".

Referencias.

Alsina, C. (2008). Geometría y realidad. *Sigma 33*, 165-179.

Arcavi, A. (2007). El desarrollo y el uso de los símbolos. *Uno. Revista de las matemáticas 44*, 59-75.

Arcavi, A. (2002). Everyday and Academic Mathematics in the Classroom. A Monograph edited by M. Brenner and J. Moschkovich (Eds.) *Journal for Research in Mathematics Education*. p. 12-29. Existe una versión en castellano, publicada en la revista *Números.*

Arcavi, A.; de la Fuente, C.; Hernando, E. (2011). Buscando modelos matemáticos: "El caso de las malas notas". *Revista SUMA 67,* 27-40.

COMAP (1999). *Mathematics: Modeling our World*. New York: W. H: Freeman.

COMAP (2002). *Precalculus: Modeling our World*. New York: W. H: Freeman.

COMAP (2006). *Modeling with Mathematics: A bridge to Algebra II*. New York: W. H: Freeman.

COMAP (2012). *Mathematical Modeling Handbook*. Teachers college. Columbia University.

La Rocca, P. Riggi, F. (2009). Projectile motion with a drag force: were the Medievals right after all? *Phisics Education 44*. 398-402.

Stewart, S.M. (2012). On the trajectories of projectiles depicted in early ballistic woodcuts. *European Journal of Physics 33*, 149-166.

http://francis.naukas.com/. Cómo dibujaban los matemáticos la trayectoria de una bola de cañón antes de la invención del cálculo.

Para hacer referencia al artículo:

Hernando, E. y de la Fuente, C. (2015). Matemáticas para hacer modelos: El caso de las malas notas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 89-104). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

APRENDER MATEMÁTICAS EN UNA COMUNIDAD DE APRENDIZAJE

Azucena Jiménez Yuste

CEIP La Pradera- Comunidad de Aprendizaje- Valsaín

Resumen

El trabajo que se presenta se centra en el desarrollo de los Grupos Interactivos en el área de Matemáticas, como actuación de éxito educativo dentro del Proyecto de Comunidades de Aprendizaje llevado a cabo en el CEIP La Pradera en Valsaín, Segovia. Se contempla su puesta en marcha, su implementación y su evaluación. Además, de resaltar cómo esta actividad va más allá de lo meramente curricular afianzando en el alumnado los valores de solidaridad, ayuda mutua, respeto y diálogo igualitario guiados por la colaboración de un adulto que acude de forma voluntaria.

Palabras clave: *grupos interactivos, matemáticas, medida de éxito educativo, comunidades de aprendizaje, diálogo igualitario.*

INTRODUCCIÓN

El CEIP "La Pradera" de Valsaín, en la provincia de Segovia, es un centro rural incompleto enclavado en la sierra de Guadarrama, en un paraje boscoso de belleza inigualable. Durante el curso 2011/2013 la comunidad educativa del centro decidió transformarse en Comunidad de Aprendizaje, para dar respuesta a las necesidades de mejora del mismo, obtenidas tras la aplicación del Modelo de Autoevaluación de la Junta de Castilla y León par organizaciones escolares y el desarrollo de diferentes Experiencias de Calidad. Asimismo, el centro necesitaba emprender un camino de innovación y diferenciación de otros centros educativos del entorno con una oferta educativa atrayente y novedosa fomentando la filosofía de la escuela inclusiva.

La transformación del centro, siguiendo la máxima de Freire "*Cambiar es difícil pero posible. Debemos insistir sobre la posibilidad de cambiar a pesar de las dificultades. La cuestión está en cómo transformar las dificultades en posibilidades"* (1997) citado en Fernández, Garvín y González, (2012), supuso la sucesión de una serie de fases, acuerdos e implicación de toda la comunidad educativa y la aplicación de las actuaciones de éxito que conlleva una Comunidad de Aprendizaje basadas en los principios del aprendizaje dialógico (Flecha, 1997; Aubert, Flecha, García, Flecha y Racionero, 2008).

Una Comunidad de Aprendizaje es "*un proyecto de transformación social y cultural de un centro educativo y de su entorno para conseguir una sociedad de la información para todas las personas, basada en el aprendizaje dialógico, mediante una educación participativa de la comunidad, que se concreta en todos sus espacios, incluida el aula"* (Elboj *et al.*, 2002, 74).

Grupos Interactivos, Tertulias Literarias Dialógicas, Bibliotecas Tutorizadas y Formación de Adultos se fueron implementando con la colaboración de voluntarios, familias, instituciones y el resto de la comunidad educativa que, habiendo sido formados en la fase de sensibilización, decidieron de forma consensuada llevarlas a cabo en los distintos espacios educativos del centro, comenzando a transformarse en eje vertebrador de la cultura del entorno.

Los Grupos interactivos es una de las actuaciones de éxito educativo basada en el diálogo y en las interacciones entre iguales que cuenta con la colaboración de un adulto voluntario que participa en el aula. Esta medida de éxito es una forma de reorganización del aula en grupos heterogéneos (entre 3 y 5, dependiendo del número de alumnos) que fomenta la superación del fracaso escolar y la mejora de la convivencia, en la que el docente propone una tarea en cada grupo que debe ser resuelta por los alumnos.

Cada actividad dura aproximadamente entre 15 y 20 minutos y se realizan de forma rotatoria. Por lo tanto, en una sesión se triplica o cuadriplica el aprendizaje instrumental del alumnado. Al poder ejecutar diferentes tareas con sus compañeros, se fomenta la solidaridad, la ayuda mutua, la tutoría entre iguales, se mejora la autoestima y se potencian las altas expectativas repercutiendo en la *mejora de los resultados académicos de todos y todas* (INCLUD-ED Consortium, 2009). Esta agrupación inclusiva permite una nueva organización de los recursos humanos, incluyéndose la figura del voluntario que puede ser un ex alumno, un familiar, un alumno universitario o un maestro,…, que fomenta las interacciones basadas en el diálogo igualitario. Estos intercambios comunicativos son actos dialógicos (Oliver y Gatt, 2010) en los que a través de la sinceridad y del consenso los participantes resuelven las tareas, evitando las interacciones de poder de las agrupaciones tradicionales.

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

En nuestro centro se llevan a cabo Grupos Interactivos en las diferentes etapas, cursos y ciclos (estructura que se conserva por ser centro incompleto). Las áreas en las que se trabaja son: Lengua Castellana, Matemáticas y Lengua Extranjera: inglés.

El objetivo fundamental de una Comunidad de Aprendizaje es "*la superación del fracaso escolar y la búsqueda de una igualdad de resultados educativos para todo el alumnado, y al mismo tiempo conseguir una convivencia enriquecedora y solidaria entre los miembros de la comunidad" (*Díez - Palomar et al.,2010,74).

Para la consecución de este fin y la implementación del proyecto con la implicación de toda la comunidad educativa y el entorno, las actuaciones de éxito plantean objetivos específicos que pretenden abarcar el desarrollo de las diferentes competencias.

Los objetivos señalados para los Grupos Interactivos, en nuestro centro, quedan definidos de la siguiente manera:

- Desarrollar las competencias básicas de la etapa obligatoria.
- Aumentar los aprendizajes de los alumnos a partir de las interacciones comunicativas igualitarias con distintas personas en el aula.
- Generar solidaridad y ayuda mutua entre compañeros.
- Fomentar la participación de todos los alumnos y el desarrollo de valores a través de la cooperación y el diálogo.
- Perseguir una educación con las máximas expectativas.
- Desarrollar operaciones cognitivas básicas a través de tareas compartidas.
- Promover los principios del aprendizaje dialógico.
- Mejorar la autoestima.

Para llevar a cabo los Grupos Interactivos se sigue una metodología activa, participativa y colaborativa basada en el diálogo, que se convierte en productor de aprendizaje. Partiendo de las teorías de Habermas y Freire, el aprendizaje dialógico se convierte en la herramienta a través de la cual los alumnos participantes reflexionan sobre su propia experiencia y aprendizajes argumentando sus explicaciones al resto de sus compañeros, posibilitando que se afiancen los contenidos trabajados gracias a las interacciones entre iguales. Esta metodología fomenta en los alumnos los valores en los que debe asentarse una sociedad más justa, solidaria y democrática.

El aprendizaje dialógico se basa en unos principios en los que las altas expectativas constituyen un eje transversal a estos: **diálogo igualitario** (basado en interacciones que evitan los actos comunicativos de poder), **la inteligencia cultural** (demuestra el aprendizaje a lo largo de la vida, no sólo la inteligencia académica), **transformación** (el diálogo modifica las relaciones entre las diferentes personas y su entorno), **dimensión instrumental de la educación** (el desarrollo de la capacidad cognitiva mejora a través del diálogo y la reflexión), **creación de sentido** (dar sentido a lo que se realiza en una sociedad intercomunicada tecnológicamente), **solidaridad** (el diálogo igualitario fomenta la reflexión y la colaboración tendiendo a realizar acciones educativas solidarias, que promueven a su vez mayor solidaridad) e **igualdad de las diferencias** (igualdad que no excluye y respeta).

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

Los Grupos Interactivos se iniciaron en nuestro centro en octubre de 2012, tras una fase de formación dirigida a toda la comunidad educativa y el consenso de todos en la transformación en Comunidad de Aprendizaje.

Las áreas que se comenzaron a trabajar en los grupos fueron Lengua Castellana y Matemáticas, introduciéndose al siguiente curso áreas como Inglés. De forma esporádica, se realizaron sesiones en Conocimiento del Medio y Educación en Valores. Las sesiones se desarrollaban durante hora y media de forma semanal.

Para trabajar el área de Matemáticas y, dado el bajo número de alumnos, se decidió agrupar al alumnado de los dos últimos ciclos para poder implementar esta estrategia metodológica, existiendo la dificultad de la propuesta de tareas dirigidas a cuatro niveles educativos diferentes.

La mayor complejidad que existe en la organización de un Grupos Interactivo en el aula, es la búsqueda del voluntariado que nos va a acompañar en su desarrollo, para ello, contamos con una coordinadora de voluntariado que diariamente gestiona esta labor. Además, debemos tener en cuenta unos principios básicos de funcionamiento:

- La distribución del alumnado en pequeños grupos heterogéneos (edad y nivel de competencia curricular)
- La existencia de un adulto voluntario que dirigirá de forma intrínseca al grupo, mientras éste realiza las tareas propuestas.
- La elección del contenido. En el caso del área de Matemáticas existen varios factores que determinan las actividades que se van a proponer en cada grupo.

  Las tareas deben ser cooperativas y colaborativas para resolver en grupo (es una decisión del Claustro), competenciales, que desarrollen y complementen el currículo, con distintos grados de dificultad para fomentar la tutoría entre iguales (Zona de Desarrollo Próximo), incluyendo algunas actividades de tipo manipulativo, y otras que desarrollen capacidades cognitivas (memoria, atención, razonamiento lógico y espacial).
- El carácter rotatorio de la actividad, que introduce dinamismo y motivación ante la nueva tarea. Si se decide la introducción de una tarea secuencial se deberá recordar que cada grupo comienza a realizar actividades diferentes al mismo tiempo.
- El tiempo de realización de cada actividad, deberá variar entre 15 y 20 minutos, dependiendo del tiempo total disponible y de la duración prevista para la consecución de cada tarea.
- La evaluación. En nuestro centro hemos introducido una evaluación de carácter formativo donde se evalúa la actividad, el trabajo en equipo, el progreso de los alumnos y su rendimiento. Esta valoración

se realiza entre todas las personas que intervienen: alumnos, voluntarios y el docente que propone la sesión.

El docente responsable que propone la sesión de Grupos Interactivos realiza diversas funciones: diseña la actividad en función de los objetivos que se haya marcado, se ocupa de coordinar las tareas que ha propuesto informando al voluntario sobre la actividad y haciendo un seguimiento de su desarrollo en cada mesa, resuelve dudas, coordina los tiempos y evalúa toda la actividad a través de diferentes instrumentos de recogida de información.

El papel del voluntario es fundamental en la puesta en marcha de esta estrategia metodológica inclusiva por los siguientes motivos: es la persona que presenta la actividad al grupo, promueve las interacciones dinamizando las relaciones, fomentando la ayuda mutua, animando al grupo a la consecución de la tarea y recogiendo información y valoraciones en torno al trabajo realizado por cada grupo que, posteriormente, comenta en la evaluación y entrega al docente.

EVALUACIÓN

La evaluación se ha introducido en todas las sesiones de Grupos Interactivos que se llevan a cabo en el centro desde la perspectiva de los participantes en la misma y utilizando diferentes instrumentos de recogida de información.

El tipo de evaluación utilizada es la formativa que permite en todo momento al docente la retroalimentación del proceso educativo favoreciendo la reflexión ante su práctica educativa.

Cada uno de los agentes intervinientes en el proceso de valoración recoge información a través de diferentes hojas de registro.

El docente responsable observa el desarrollo de la sesión recogiendo información a través de la siguiente plantilla (Tabla 1)

Tabla 1.- Observaciones sobre el desarrollo de la sesión

OBSERVACIONES
GRUPO1- ALUMNOS:
Mesa1
Mesa2
Mesa3

Terminada la sesión de Grupos Interactivos, el docente recoge en la Tabla 2 la información sobre las valoraciones que de forma consensuada hacen todos los agentes participantes.

Tabla 2.- Observaciones de la evaluación dialogada

GRUPO1	NOMBRE: VOLUNTARIO: MESA 1	NOMBRE: VOLUNTARIO: MESA2	NOMBRE: VOLUNTARIO: MESA3
ALUMNO 1			
ALUMNO 2			
ALUMNO 3			
ALUMNO 4			
ALUMNO 5			
MEJOR VALORADO:			

Mientras el voluntario en su mesa registra en la Tabla 3 el trabajo realizado por el alumnado, su actitud y el grado de cooperación.

Tabla 3.- Hoja de observaciones del voluntario

EVALUACIÓN DEL VOLUNTARIO- GRUPOS INTERACTIVOS											
VOLUNTARIO :							SESIÓN:				
ACTIVIDAD:							FECHA:				
GRUPO1		Ayuda		Es ayudado		Presta atención a la tarea propuesta		Trabaja de forma cooperativa con sus compañeros		Conoce los contenidos propuestos	
		SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
OBSERVACIONES:											
GRUPO 1:											

Al principio, los alumnos valoraban su trabajo en el grupo ante el resto de los participantes. Esta forma de evaluar, aunque muy rica, se modificó al aumentar el número de alumnos. Por ello se introdujo la plantilla de la Tabla 4. Este registro lo rellenan los alumnos de forma consensuada, con ayuda del adulto, cuando terminan la última tarea propuesta de la sesión.

Tabla 4.- Registro de autoevaluación grupal

AUTOEVALUACIÓN ALUMNOS (grupal)		FECHA:
PORTAVOZ:	¡BIEN HECHO!	PUEDES MEJORAR
1-		
2-		
3-		
4-		
5-		
EL / LA ALUMNO/A QUE MEJOR HA TRABAJADO:		

CONCLUSIONES

La Comunidad Científica Internacional ha demostrado que las medidas de éxito en una Comunidad de Aprendizaje mejoran el aprendizaje, favorecen la convivencia e implican a toda la comunidad educativa en el proceso educativo de sus hijos. Además, la puesta en marcha de los Grupos Interactivos contribuye al desarrollo de las competencias básicas y a la consecución de los objetivos generales que marca el Currículum Oficial de la Educación Primaria del área de Matemáticas.

Asimismo también se ha comprobado que:

- Se ha incrementado el rendimiento y la autoestima de los alumnos.
- Ha mejorado su capacidad de razonamiento y deducción.
- Han aprendido a resolver tareas de carácter competencial.
- Han aprendido diferentes estrategias a través de la tutoría entre iguales.
- Han mejorado las relaciones interpersonales.
- Ha aumentado la motivación del alumnado ante el área de Matemáticas.

Esta actuación de éxito ha sido valorada y reconocida por el Ministerio de Educación concediendo al centro el Premio Nacional de Educación 2013 en la categoría de centros de educación infantil y primaria, en la modalidad de "éxito educativo".

BIBLIOGRAFÍA

Aubert, A., Flecha, A., García, C., Flecha, R. y Racionero, S. (2008). *Aprendizaje dialógico en la Sociedad de la Información.* Barcelona: Hipatia

Díez. P., Wehrle, P. G., Roldán, S. M., & Rosell, L. R. (2010). *Aprendizaje dialógico en las matemáticas y en las ciencias*. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 75.

Elboj, C., Puigdellívol, I., Soler, M. Y Valls, R. (2002). *Comunidades de aprendizaje. Transformar la educación.* Barcelona: Grao.

Feito, R. (2009). *Escuelas democráticas*. RASE: Revista de la Asociación de Sociología de la Educación, 2(1).

Flecha, R. (1997). *Compartiendo palabras. El aprendizaje de las personas adultas a través del diálogo.* Barcelona: Paidós.

Flecha, R., García, R., Gómez, A., & Latorre, A. (2009). *Participación en escuelas de éxito: una investigación comunicativa del proyecto Includ-ed*. Cultura y educación, 21(2), 183-196.

INCLUD-ED Consortium. (2009). *Actions for success in schools in Europe*. Brussels: European Commission.

Para hacer referencia al artículo:

Jiménez, A. (2015). Aprender Matemáticas en una Comunidad de Aprendizaje. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 105-111). Lugar: Academia de Artillería de Segovia

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN PRIMARIA EN EL SIGLO XXI

Antonio Ramón Martín Adrián

Colegio Público Aguere. (La Laguna. – Tenerife.)

Resumen

El resumen no debe exceder de diez líneas ni ser menor de cinco. Deja una línea en blanco entre la institución y la palabra resumen. Debes usar letra Times New Roman, tamaño 12 y cursiva. Puedes utilizar el estilo MM Resumen. La enseñanza y el aprendizaje de los ALGORITMOS TRADICIONALES DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS (ATOA**)** es actualmente un tema caduco y obsoleto. En la actualidad, ninguno de estos procedimientos se hace fuera de los centros escolares, y no aportan ni desarrollan ninguna habilidad cognitiva que mejore el razonamiento lógico-matemático, siendo esto último el objetivo fundamental que debe predominar en todas las acciones que hacemos los educadores matemáticos con nuestros alumnos. Esta conferencia quiere dar a conocer otros algoritmos para el cálculo diario, y será mediante la presentación de varios videos, donde se verán situaciones reales de enseñanza aprendizaje.

Palabras clave: *algoritmo, aritmética, matemáticas, Primaria.*

La enseñanza y el aprendizaje de los ALGORITMOS TRADICIONALES DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS (ATOA**)** es actualmente un tema caduco y obsoleto.

4.567 + 789 + 6.908 + 12.345 + 34 = 67.987 – 8.899 =

23.456 x 78 = 789.342 : 67 =

657,89 x 34,5 = 6789,78 : 34,5 = Raíz cuadrada: 899,8

En la actualidad, ninguno de estos procedimientos se hace fuera de los centros escolares, y no aportan ni desarrollan ninguna habilidad cognitiva que mejore el razonamiento lógico-matemático, siendo esto último el objetivo fundamental que debe predominar en todas las acciones que hacemos los educadores matemáticos con nuestros alumnos.

No existe ningún centro comercial, financiero (Bancos, Cajas de Ahorros,...), empresas (gasolineras, supermercados,...), laboratorios, etc; donde veamos realizando en el año 2001 (lo mismo que hace dos décadas) las operaciones aritméticas (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) con bolígrafo y papel. Por lo tanto, esos algoritmos deben desaparecer del trabajo escolar.

En definitiva, deben desaparecer de la práctica educativa. Son parte de la Historia de la Pedagogía.

Debemos esperar a un cataclismo, para que cambie el panorama mundial tal como lo conocemos hoy en día, y desaparezcan todos los instrumentos de cálculo electrónico, para volver a reconsiderar la utilidad de estos procedimientos.

Después de lo anterior. ¿Qué haremos ahora los docentes con el cálculo?

Desde hace décadas, y de manera significativa en los comienzos del siglo XXI, las estrategias elementales de cálculo en la escuela deben ir dirigidos a dotar a las niñas y niños (futuros ciudadanos) del mayor número de habilidades cognitivas posibles para el CÁLCULO MENTAL, y dentro de este para el CÁLCULO APROXIMADO (Estimación). El exacto lo dan las máquinas, que se equivocan menos que los seres humanos.

Por lo tanto, todas las acciones a desarrollar en las aulas deben tener dentro de esta parcela del conocimiento matemático como principal objetivo: "Fomentar el desarrollo del cálculo mental"

La calculadora

Una herramienta que contribuye sustancialmente a conseguir este objetivo es la calculadora. Este instrumento ha revolucionado la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, pero desgraciadamente son muy pocos los responsables educativos, inspectores, profesores, investigadores, formadores de profesores, madres y padres que se han enterado de este hecho. Hay una función en estas máquinas que la mayoría de las personas ignora, que es el factor constante. Esta posibilidad permite un amplio espectro para el trabajo en la clase de matemáticas en todos los ciclos de la educación primaria y la educación infantil.

La calculadora es una de las mejores herramientas con que cuentan los docentes para atender la diversidad en el alumnado en la clase de matemáticas. No entendemos como se puede trabajar el cálculo mental sin calculadora. Es la herramienta ideal para dar a cada alumno lo que necesita y no limitar capacidades. El inconveniente se encuentra en que la mayoría de los docentes no saben sacar el provecho del factor constante, no por capricho, sino por desconocimiento. La calculadora desarrolla en la mente infantil habilidades cognitivas que las personas no podemos.

Gran parte de los que se oponen al uso de la calculadora en la escuela, es porque piensan que el uso de la máquina para niños de 6 a 8 años es la de calcular operaciones como: 2+4=, 8-3=, 15:3=, 2x3=. Por supuesto que no estamos de acuerdo en que este sea el uso que se debe dar a la calculadora con niños normales.
¡Atención!, todas las calculadoras no tienen esta posibilidad. Por lo tanto, no todas las calculadoras de cuatro operaciones sirven para trabajar en la escuela.

Los alumnos deben trabajar con bolígrafo y papel otros algoritmos, propuestos por el profesor y también inventados por ellos, porque les van a ayudar a seguir sus razonamientos y a descubrir otras estrategias, que de no poner por escrito serían muy difíciles de comprender.

Por otro lado, la calculadora me va a permitir investigar y descubrir, propiedades y relaciones entre los números, que de no ser por ella sería muy difícil poder abordar a los 4, 5, 6 y 7 años. Entre otros temas del currículo, la calculadora es una herramienta excelente para el estudio de las tablas de multiplicar.

"No es válido el argumento de que es necesario martirizar a los niños adiestrándolos en el uso de los ATOA para el caso de que en la vida no dispongan de una calculadora; es como seguir enseñando los métodos de cálculo de la hora en base a la sombra del sol y las técnicas de enviar mensajes con humo para la eventualidad de no tener reloj o teléfono" (GUZMÁN ROJAS,1979)

"En el pasado fue imprescindible sacrificar tiempo y energía en impartir destrezas de cálculo numérico. Hoy no tiene nada que ver con formación matemática el adiestrar seres humanos para hacer lo que las máquinas pueden hacer mucho mejor" (GUZMÁN ROJAS, 1979)

Un argumento que se oye con frecuencia en aquellos docentes que quieren seguir justificando lo injustificable, la enseñanza de ATOA, es: "¿y si los alumnos cuando van a hacer un cálculo no tienen calculadora, qué hacen?"**.** La respuesta es obvia: ¿y si cuando van a hacer un cálculo no tienen lápiz y papel, que hacen? Hoy en día lo que se lleva es el cálculo mental, y dentro del mismo la estimación, el exacto lo dan las máquinas. Actualmente, en qué actividad profesional piden que se hagan los cálculos aritméticos a mano: ¡en ninguna!

Ahora bien, la calculadora no piensa**.** El hacer los cálculos con la misma no significa que el resultado obtenido sea correcto. Por eso, enseñaremos a los alumnos a que antes de apretar la tecla, deben aventurar el resultado, de esta forma la calculadora hace la función de autoevaluadora de los procesos mentales (estimación). El alumno, siempre, antes de tocar la tecla, debe hacer una estimación, un cálculo aproximado. Siempre se hará primero el proceso mental que el digital (tocar las teclas).

El uso de la calculadora no es negativo en la escuela. Esta herramienta ha supuesto una "revolución" en el tratamiento de las operaciones aritméticas, y de muchos temas del currículo, como son los números decimales y fracciones; donde la enseñanza y aprendizaje de estos conceptos ha cambiado por completo, aunque desgraciadamente son pocos los docentes que se han enterado todavía. Supone también un instrumento con muchísimas posibilidades para el cálculo mental.

La discusión no debe girar en torno a calculadoras si ó no, sino al cómo utilizarlas en el aula para desarrollar el mayor número posible de habilidades mentales en los alumnos.

Uno de los aspectos negativos que se le atribuyen al uso de la calculadora en la escuela primaria es que rebaja el nivel educativo de los alumnos. ¡Todo lo contrario! Lo aumenta. Gracias a ella es posible abordar actividades con niños de 6 y 7 años que de otra manera sería "imposible". Como ejemplo ponemos la siguiente actividad realizada por alumnos de 1º y 2º, adaptada de un libro de enseñanza secundaria (14 años).

- *En un colegio, unos niños están trabajando con la calculadora. En la pantalla les aparece 70. ¿Qué operaciones realizaron para que aparezca ese número? Encuentra varias soluciones.*

La calculadora, no le resta tiempo a otras partes de la aritmética. Por el contrario, aumenta el tiempo que se puede dedicar a otros temas, y permite profundizar hasta niveles donde antes nos parecía imposible. Podemos, gracias a ella, abordar en los primeros niveles conceptos destinados tradicionalmente a los cursos superiores; por ejemplo, los números decimales. Esta herramienta no puede, ni debe ser el único material a utilizar en la clase de matemáticas, es un medio muy versátil y con muchas posibilidades, la gran mayoría, todavía están por descubrir.

El valor de posición no se puede abordar con la calculadora, debe hacerse mediante materiales estructurados, como las regletas de cuisenaire**.** La calculadora no es una panacea.

Algunos detractores de la calculadora intentan justificar la enseñanza y aprendizaje de los ATOA diciendo que de esta manera los alumnos aprenden la abstracción en matemáticas. ¡Por favor!, que alguien me explique donde está la abstracción en los ATOA. Son puras destrezas mecánicas, que la gran mayoría de las personas han aprendido a fuerza de fijarlas en la memoria, siendo muy pocos los que saben porque se hacen de esa manera. En los ATOA no hay abstracción.

Los ATOA tenían su sentido de ser hasta principios de los años 70, donde era normal tener que hacer los cálculos con lápiz y papel. Pero, desde que se extendió la calculadora de cuatro operaciones, empezaron a dejar de ser funcionales. Por otro lado, son legiones de personas las que fueron rechazados por el sistema con la condición de fracasado escolar por no saber hacer divisiones y multiplicaciones largas, y como no, raíces cuadradas.

Las investigaciones demuestran que la calculadora es una herramienta que favorece la inteligencia, y ayuda en la comprensión de los conceptos matemáticos. Además es un instrumento generador de conocimientos.

Aunque se tengan buenas habilidades para los ATOA; ¿de qué sirven?, ¿dónde se van a utilizar?. No sólo las personas que carezcan de ellas, sino se debe intentar que todos los alumnos (futuros ciudadanos), tengan el mayor número de habilidades dentro del cálculo mental. Si un alumno normal, recurre a la calculadora para hacer 18+47, es que se ha procedido mal con la calculadora. Cualquier alumno normal, debe resolver esa operación mentalmente, pero no mediante el algoritmo tradicional, sino empleando otras estrategias; por ejemplo:

18+47=

10+40 = 50 y 8+7 = 15, entonces 50 + 10 = 60 y 60 + 5= 65. Por lo tanto, 18 + 47 = 65

Ralston es demasiado benevolente, cuando hace referencia a que los alumnos aprender los ATOA de una manera mecánica y memorística, diciendo que “es lo que demasiado a menudo ocurre”. No es lo que ocurre a menudo. Desgraciadamente es lo que ocurre en la mayoría de los casos, los alumnos aprenden los ATOA sin saber que son ni para que sirven.

En la escuela, después de haber dedicado el 80% del trabajo escolar a practicar los ATOA durante años, es frecuente oir:

- *ALUMNO: ¿Maestra/maestro, este problema es de sumar, restar, multiplicar o de dividir?*

¿Qué ha pasado entonces?, ¿quién se ha equivocado?, ¿por qué hacemos los maestros lo que hacemos desde hace décadas?, ¿cuáles son la nuevas alternativas?, ¿y la resolución de problemas, dónde está?

Cuando una persona se enfrenta a operaciones como: 64.325-3.789=, sin ninguna duda la debe hacer con la calculadora. Pero antes, realizaría mentalmente la siguiente estimación: 3.789--------------4.000.

- Redondeo el sustraendo hacia la unidad de millar superior. Por lo tanto, he añadido aproximadamente 200 unidades. Entonces la resta quedaría:

  64.325--------+ de 200--------- 64.500

  3.789--------+ de 200--------- 4.000

  ___________ _______________

- Decimos mentalmente a 64.500-4.000= 60.500. Entonces la diferencia debe ser un número alrededor de 60.500 (estimación).
- A continuación paso a calcular el exacto con la calculadora 64.235-3.789=

La ventaja más significativa de aprender cálculo mental (estimación), está en que es la habilidad que más utilizamos a diario, cuando tenemos la necesidad de hacer cálculos.

Intentaremos enseñar habilidades de cálculo mental a todos los alumnos. Aunque puede que nos encontremos con alumnos con dificultades de aprendizaje de muy diferente etiología, en estos, si no responden a las prácticas de la mayoría o a las adaptadas a ellos, utilizarán la calculadora como una simple máquina de cálculo. No los mortificaremos con esquemas conceptuales difíciles, para su nivel de comprensión.

¿Por qué trabajar los ATOA independientemente de la calculadora?, ¿dónde está los argumentos que sustenten esta postura? Si es porque se necesitan en la vida diaria, entonces mejor sería hacerlos con calculadora, que tiene la ventaja de ser más rápida y equivocarse menos. ¿Cuándo ha sido la última vez que cada uno de los lectores ha tenido necesidad de hacer los ATOA fuera de la escuela?

¿Qué es lo que la práctica repetida de los ATOA aporta conceptualmente y en qué mejora la capacidad matemática de quien los hace? ¿Qué ocurre con los alumnos – la mayoría- que tienen más fallos que aciertos cuando tropiezan con las divisiones largas o las multiplicaciones con decimales?

En los últimos años, después de la Reforma educativa que han experimentado muchos países, es frecuente ver la discusión entre profesores con respecto a la división: ¿cómo es mejor hacer el algoritmo, como siempre o dejando las restas parciales? Mucho se ha hablado respecto a este tema. Y aunque, algunos investigadores tenemos demostrado que es más comprensible cuando se dejan las restas parciales, la gran conclusión es: “ninguno de los dos es útil”. ¿Quién los hace fuera de un centro educativo. ¡Nadie!

¿Cómo es posible que alguien siga intentado sustentar su inclusión en los currículum? La respuesta es obvia, es porque no conocen otras alternativas, y defienden lo que tienen en sus estructuras mentales haciendo en ocasiones verdaderos malabarismos intelectuales.

Sigue dedicándose a los ATOA, la mayoría del tiempo de la clase de matemáticas. ¿Por qué?, ¿Para qué?, ¿Qué ocurre con la resolución de problemas?

Sigue Ralston siendo benevolente cuando dice que la enseñanza del algoritmo de la raíz cuadrada era práctica frecuente hasta hace poco tiempo. En el entorno educativo que nosotros conocemos –bastante amplio- , es práctica habitual, para mala suerte de los alumnos. Y no es que el profesorado sea malo, es que nadie les ha hecho ver todavía que esas destrezas ya son inútiles desde hace décadas.

La evaluación del rendimiento escolar

Por lo general, las pruebas destinadas a medir “los rendimientos” tienen una gran cantidad de items donde sólo se piden cálculos numéricos, los cuales se deben hacer mediante los ATOA, los cuales únicamente se utilizan en los centros educativos. Estos son residuos históricos, que tenían su justificación hasta comienzos de los años 70, pero que en la actualidad son destrezas de supervivencia que sólo sirven para perpetuarse a sí mismas. El hecho de que las pizarras de las escuelas y los institutos sigan llenas de estos algoritmos tradicionales, constituye una llamada de atención urgente, sobre una reforma del sistema educativo radical y total, desde la educación infantil hasta la educación universitaria.

Debemos preguntarnos al respecto de estas pruebas, y al trabajo en las aulas, ¿qué ocurre con la resolución de problemas? El verdadero objetivo de la educación matemática. Todos conocemos personas que resuelven bien los ATOA, pero que carecen de habilidades cognitivas dentro de la resolución de problemas, entonces de qué sirve saber hacer los ATOA.

El trabajar con la calculadora en clase y en casa, no es un indicador de que se sea menos exigente y menos duro con los alumnos**.** Todo lo contrario, permite a los profesores ser más exigentes y abordar contenidos que de no ser por la calculadora, sería prácticamente imposible hacerlo. En definitiva, el nivel no se rebaja, aumenta considerablemente.

La educación secundaria

Independientemente de que los alumnos hayan utilizado la calculadora en la enseñanza primaria, ¿cómo es posible que en la secundaria sigan haciendo ATOA?**,** ¿Qué clase de Educación están recibiendo?, ¿A eso se va a un instituto, a principios del siglo XXI? Cómo es posible que se siga invirtiendo tiempo de los profesores en trabajar destrezas mecánicas, con alumnos que no han sido capaces de aprenderlas durante seis años de enseñanza primaria. Y aunque las hubieran aprendido, no sé de qué les iban a servir. Para lo único que son útiles es para sobrevivir en el sistema educativo.

En primaria, hablamos de la calculadora de cuatro operaciones. Pero, en secundaria, se encuentran las calculadoras gráficas, que suponen una revolución radical en la manera de aprender. Estas calculadoras, hacen posible que hoy se pueda comunicar la mejor educación matemática que alguna vez se haya podido pensar. Como consecuencia de su utilización, es innecesario dedicar tiempo en el aula a aprender manipulaciones simbólicas obsoletas que se realizan con bolígrafo y papel. Estás calculadoras han cambiado para siempre la manera de enseñar matemáticas, y también han cambiado para siempre la manera en que los estudiantes las aprenden (WAITS Y DEMANA)

Las preguntas del millón son**:** ¿qué hay que hacer para que las profesoras y profesores de secundaria aprendan a utilizarlas?, ¿a quién les corresponde enseñarles? El número de profesores que utilizan estas tecnologías en sus aulas es insignificantes, todavía no ha llegado a entrar en los institutos la calculadora gráfica, y ya llega: ¡la calculadora simbólica!

La universidad y los investigadores profesionales

Generalmente, los foros de discusión sobre el fracaso de la Educación Matemática giran en torno a la educación primaria y secundaria, pero qué ocurre con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en La Universidad. En este tramo educativo el modelo imperante es, el modelo de clase tradicional, y dentro de este su máxima expresión, la lección magistral; donde el profesor es quién posee el conocimiento y el alumno no lo adquiere hasta que el profesor lo explica. ¿Por qué la utilización de calculadoras gráficas y simbólicas, sigue siendo una mera anécdota? ¿Cuál es la formación didáctica, psicológica y pedagógica de los profesores de matemáticas universitarios?, ¿dónde se les forma en estas cuestiones?, ¿y dónde se reciclan?, ¿es qué no existen otros modelos de dar clases en la universidad, que no sean las lecciones magistrales de pizarra y tiza?, ¿se podrá aplicar el constructivismo a las clases de matemáticas universitarias?

¿Quién forma a los maestros y profesores de matemáticas de secundaria? Si la formación de los anteriores es deficiente, ¿quién se tiene que reformar en primer lugar?, ¡La Universidad!

Lamentablemente, los investigadores matemáticos, salvando las excepciones correspondientes, el modelo de escuela primaria que ellos conocen, es el que vivieron como niños cuando estaban escolarizados. Y por lo general, es el modelo que demandan porque no conocen otro. La humanidad ha progresado, y las necesidades sociales y laborales son cada día más diferentes, por lo cual la escuela de hace 20 o 30 años, es una institución que no es válida en los comienzos del siglo XXI, en lo que a la aritmética y a la Educación Matemática se refiere.

Debemos empezar preguntándonos, qué matemática se les pide a los estudiantes universitarios, está acorde con la carrera elegida. O son conceptos desconectados de toda realidad laboral, para la que se supone se le está preparando en la universidad; o sigue siendo una enseñanza tradicional basada en algoritmos de bolígrafo y papel de funciones, límites, derivadas, integrales, matrices, etc. De los cuáles se bombardea a los alumnos universitarios durante años, sin saber bien para que sirven los conceptos matemáticos que con ellos se pretenden alcanzar. ¿Por qué hacer estos cálculos con bolígrafo y papel, si lo hacen mejor las calculadoras gráficas y simbólicas?

Un gran número de investigadores profesionales (profesores universitarios) hace gala de su gran desconocimiento de la enseñanza en la escuela primaria, lo cual es lógico, ya que existe una gran mayoría de investigadores que el único referente escolar que tienen es cuando ellos fueron niños, y siguen pensando que las cosas son como ellos las conocieron. Algunos incluso, publican estudios y libros sobre didáctica de las matemáticas en la escuela, basándose en pruebas escritas pasadas a los niños y en la observación del trabajo de aula durante algunas semanas, como si eso fuera suficiente para hacer conclusiones y generalizaciones, que en ocasiones no ayudan a la mejora de la práctica escolar, porque quien marca la pauta es la publicación o el currículum personal del investigador para poder progresar en la carrera docente universitaria.

El profesorado universitario que forma profesores de matemáticas, desconoce la realidad escolar con la que se van a encontrar los futuros maestros. El formador de docentes debe compartir la enseñanza universitaria con la enseñanza en los tramos educativos para los que forma profesionales.

La gran mayoría de los profesores universitarios y de secundaria que se oponen a la utilización de la calculadora aritmética, gráfica o simbólica; carecen de formación didáctica en estas herramientas. Por lo tanto, lo que hacen es justificar su ignorancia en estos temas, la cual es superada por la mía en el uso de las calculadoras gráficas y simbólicas. Pero, no hay que dejar de reconocer, que estas herramientas suponen una revolución psicodidáctica. Hay que admirar, y alentar a los profesores universitarios y de secundaria – una minoría -, que llevan años intentando enseñar a alumnas y alumnos y compañeros profesores el manejo de estas tecnologías.

Propuestas de cambio

1. Se deben suprimir de una manera radical e inmediata los ATOA de los centros educativos, y fomentar el descubrimiento y puesta en común de algoritmos personales y más operativos.

El uso de la calculadora, por si solo, no constituye una panacea para hacer una construcción adecuada del conocimiento lógico-matemático en los alumnos. Es una herramienta más, pero con “infinitas” posibilidades. Los materiales manipulativos son imprescindibles para formar una buena inteligencia matemática en las personas. Hay conceptos que si no es por los materiales, son de muy difícil o nula comprensión.

Estamos de acuerdo en hacer multiplicaciones de dos números, para desarrollar el cálculo mental (CM), pero nunca utilizando los ATOA. Una alternativa, empezando de izquierda a derecha, puede ser:

23 x 45= 800+100+120+15=1.035

2. Hay también que hacer una reconfiguración radical de métodos y programas de enseñanza desde la educación infantil hasta la universidad.

¿Están los profesores de la escuela primaria listos para tal currículo? Debemos mentalizarnos todas las personas que intervenimos en la educación, que los males de enseñanza se deben a muchos factores. No exclusivamente a la formación de los maestros.

Planteamos también, ¿están los profesores de secundaria y universitarios preparados para un currículo basados en el CM , las calculadoras y la resolución de problemas. Por supuesto que no, los que están son una mínima expresión.

Si la preparación de los maestros ha sido lamentable, tendríamos que preguntarnos: ¿quién los preparó? La respuesta es, la universidad. Por lo tanto, el principal tramo educativo que necesita una reforma radical en cuánto a métodos y formas de enseñar, es el universitario. Sin embargo, es el que menos se reforma y más se resiste a los cambios.

La matematofobia de muchos docentes se debe a que aprendimos en un sistema donde lo importante era hacer algoritmos, para poder sobrevivir en el sistema educativo. Aunque no se supiera bien para que servían, incluso por parte de algunos profesores.

Los maestros que están preparados para abordar un currículo diferentes, basado en las calculadoras y el CM son pocos, al igual que los de secundaria y universidad. Es necesario una formación permanente y obligatoria. Pero, ¿quién la va a dar?, ¿la universidad? Ya sabemos que la formación inicial de los profesores es muy deficiente y desconectada de la realidad educativa, y quien los formó fue la universidad. Por lo tanto, si la formación permanente del profesorado va a estar exclusivamente en sus manos, nos aventuramos a pronosticar que los cambios no serán notables, seguiremos igual que siempre. Hace décadas que la universidad, por lo general, no da respuestas claras a los problemas que presenta la Educación.

3. Se necesita hacer una revisión profunda de las especialidades que intervienen en le educación primaria. Y que tal vez, no estén todas la especialidades que deberían haber, y también sobre alguna que actualmente está.

Conclusión

Algunos investigadores, ya han aportado datos concretos y muy positivos sobre el uso de la calculadora en la escuela infantil y primaria. Estas investigaciones pretenden incrementar la conciencia de los profesores sobre su “implicaciones educativas”, para influir sobre la puesta en práctica de cambios estructurales, tanto en las escuelas como en el sistema educativo. (ELLIOT, J.).

En definitiva, los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones aritméticas: ¡Han muerto, y deben ser enterrados! No son útiles en siglo XXI. Son parte de la historia de la Psicopedagogía. ¡Vivan los algoritmos que desarrollan el cálculo mental y las calculadoras!

Referencias.

Álvarez,M. (2003) : “La calculadora en el primer ciclo de primaria”. Galicia. Artículo sin publicar

Elliot, J. (1997): “La investigación-acción en educación”. Morata. Madrid (3ª edición)

Fielker, D. (1986): “Usando las calculadoras”. Generalitat Valenciana. Valencia

Guzmán Rojas, I (1979).: “Niño. Vs. Número”. Khana Cruz Srl . La Paz . Bolivia

Martín Adrián, A.R (2000). “Taller sobre la calculadora en Educación Primaria”. Pro-manuscripto. Canarias.

Martín Adrián, A.R. (1999). “El futuro de la Educación Matemática después de la Reforma educativa”. Promanuscripto. Canarias.

Ralston, A. “Por la abolición de las matemáticas de lápiz y papel”. Pro manuscripto. Internet. London.

VV.AA. (1979) Actas de las I Jornadas de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas “Isaac Newton”: *“El uso de la calculadora en el aula*”. Tenerife (Bajamar).

Waits, B. K. y Demana F. “The Role of Hand-Held Computer Symbolic Algebra in Mathematics Education in the Twenty-First Century: A Call for Action!”. http://mathforum.org/technology/papers/papers/waits/waits.html

Para hacer referencia al artículo:

Jiménez, A. (2015). Aprender Matemáticas en una Comunidad de Aprendizaje. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”.* (pp. 113-121). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

CREACIÓN DE MÁS Y MEJORES OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Núria Planas

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En la ponencia se abordan ejemplos sobre episodios de clase donde el aprendizaje matemático se produce en entornos colaborativos de discusión. Se reflexiona sobre aspectos con influencia en la generación y explotación de oportunidades de aprendizaje matemático y, en particular, se señala el papel y uso de la interacción y de la lengua en los procesos de creación y explotación de dichas oportunidades. Acerca de estas cuestiones he elaborado textos consultables en mi página web.

Palabras clave: *aprendizaje matemático, alumnos, interacción en grupo y datos de clase.*

FUNDAMENTACIÓN DE ALGUNAS IDEAS

En los inicios, siendo profesora de enseñanza secundaria tuve inquietud por mejorar el aprendizaje de mis alumnos; y aunque no llegué a obtener respuestas del todo precisas, llevé a cabo estudios cortos que aportaron ideas y recomendaciones útiles, para mí como profesora y para otros profesores. Ya en el ámbito universitario, desde hace años me vengo refiriendo a oportunidades de aprendizaje matemático para designar circunstancias y acciones del aula que propician la participación de los alumnos en discusiones de contenidos matemáticos orientadas a la resolución de tareas (ver varios trabajos sobre este enfoque en http://pagines.uab.cat/nuria_planas). Esta aproximación lleva a delimitar condiciones facilitadoras de que se produzca un cierto aprendizaje matemático, pero no aporta formas de evidenciar si el aprendizaje se ha acabado produciendo.

En el contexto de reflexión del equipo de GIPEAM –Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática, se han puesto de manifiesto las dificultades teóricas ante la noción de oportunidad de aprendizaje matemático, a la vez que se ha dado cuenta de la importancia de esta noción en el área. Dado que el sentido intencional de la oportunidad de aprendizaje es remitir a otra noción, la de aprendizaje, resulta en parte paradójico sustentar la relevancia de identificar oportunidades sobre las cuales no se pueda concluir el aprovechamiento. Ahora bien, esta aproximación al estudio de las condiciones de acceso a la participación y al aprendizaje matemático es razonable por centrar la atención en el recorrido que lleva hasta el aprendizaje. Bajo la perspectiva social, todo aprendizaje requiere de unas circunstancias que lo permitan; de ahí se infiere que el estudio del aprendizaje incluya el estudio de las circunstancias con impacto en los procesos que lo anteceden, que nunca son iguales para dos alumnos ni en dos entornos de aula.

El hecho de acuñar la noción de oportunidad de aprendizaje sugiere la existencia de procesos de aprendizaje latentes. O lo que es lo mismo: si una oportunidad de aprendizaje puede ser creada en un determinado entorno de clase es porque hay un aprendizaje intencional que de algún modo tiene sentido pensar que se está promoviendo en dicho entorno. Pueden darse, sin embargo, múltiples paradojas. Por ejemplo, hay aprendizajes intencionados, planificados en los objetivos de enseñanza, que a la práctica no se promueven en la actividad del aula, por lo que será difícil trazar o hallar un rastro de oportunidades de aprendizaje asociadas. Por estos y otros motivos, no resulta fácil caracterizar la naturaleza ni el efecto de la relación entre oportunidad y aprendizaje.

Desde el punto de vista de mi trayectoria científica, empecé con procedimientos basados primero en la identificación provisional de aprendizajes y luego en la detección de condiciones facilitadoras. Solo más tarde he continuado con procedimientos que se aplican en sentido inverso, al percibir los riesgos de pretender identificar aprendizajes de un modo puntual que los desvincula del proceso de cambio. La conexión entre aprendizaje y oportunidad reside en la idea de aprovechamiento de la oportunidad, que es una manera sucinta de referirse al aprovechamiento de condiciones facilitadoras del aprendizaje. Esta conexión alude a la imposibilidad de separar ambas nociones: ni basta con el estudio detallado de las condiciones previas al aprendizaje, ni basta con comprender el proceso mismo del aprendizaje aisladamente de las condiciones contextuales y de interacción previa en el que se ha producido. El aprendizaje no es solo el conocimiento que se construye, sino también un producto de las condiciones que facilitan la construcción de conocimiento. De manera análoga, las oportunidades no son solo el ambiente que precede al aprendizaje, sino también un producto de las condiciones que se requieren para que el aprendizaje se haga efectivo.

En general, la línea de estudio sobre oportunidades de aprendizaje matemático ha indicado la necesidad de disponer de instrumentos de análisis adecuados. Disponer de instrumentos significa crearlos, usarlos y evaluarlos antes de volver a usarlos con la eventual introducción de cambios. En colaboración con el equipo de GIPEAM no hemos encontrado instrumentos existentes que fueran útiles en la obtención de información cualitativa confiable acerca de qué acciones de alumnos y profesores intervienen y cómo en la generación de oportunidades de aprendizaje que sean propias del desempeño en matemáticas. Atribuyo esto a que el objeto de observación y estudio, la oportunidad de aprendizaje, no ha sido examinado de modo sistemático en educación matemática. Convendrá seguir trabajando para ofrecer un instrumento potente que contribuya a la mejora del conocimiento del aprendizaje matemático como fenómeno social, con la particularidad de ser un instrumento capaz de captar matices sobre los momentos y circunstancias previas al aprendizaje. Al respecto, debe movernos la convicción de que el estudio de oportunidades, aun cuando no siempre se dé una explotación efectiva, permite acceder a la comprensión y caracterización del aprendizaje.

En la ponencia oral, con distintos ejemplos prácticos, espero haber dado cuenta de la riqueza de los datos en mi investigación, así como de las ideas, disquisiciones y explicaciones, algunas en apariencia enfrentadas, que persigo en el desarrollo de la línea de estudio resumida escuetamente en dos páginas. Las sucesivas construcciones teóricas que he ido elaborando para la noción de oportunidad de aprendizaje aspiran a la comprensión de aspectos estructurales y constitutivos del aprendizaje en matemáticas. Esta idea capital, la de aprendizaje, no responde a la visión tradicional de aprendizaje como proceso evolutivo generado por unas ciertas fuentes. En mi trabajo, el aprendizaje tiene él mismo valor de fuente de información de las condiciones de la interacción que lo favorecen y de las acciones de los participantes que lo acompañan. Esta es la concepción sobre el aprendizaje que está en la base de mi elección de acciones de investigación para lograrlo.

Agradecimientos

La investigación que estoy desarrollando es posible gracias a varias personas e instituciones. En primer lugar, agradezco la discusión en el seno de GIPEAM –Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática (http://grupsderecerca.uab.cat/gipeam), financiado por el Gobierno Catalán. También está siendo fundamental el apoyo económico dado a varios proyectos del Plan I+D+i del Ministerio de Economía y Competitividad, así como el apoyo económico a título personal iniciado en 2014 por la Institució Catalana de Recerca i Estudis Avançats –ICREA.

Para hacer referencia del artículo:

Planas, N. (2015). Creación de más y mejores oportunidades de aprendizaje matemático. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”.* (pp. 123-124). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

LAS MATEMÁTICAS EN SINGAPUR: ¿PUEDE SU METODOLOGÍA EXPLICAR SUS RESULTADOS?

Pedro Ramos Alonso

Facultad de Educación, Universidad de Alcalá

Resumen

Desde hace ya años los países asiáticos ocupan los primeros puestos en los resultados del área de matemáticas de las pruebas internacionales de referencia. Los intentos de explicar estos buenos resultados tropiezan con la dificultad de la complejidad de los sistemas educativos. Creemos que existe bastante consenso en que los aspectos sociológicos (valoración social de la educación, presión competitiva) juegan un papel relevante en dicha explicación. El propósito de este trabajo es explorar si los aspectos puramente metodológicos pueden ser también relevantes en un caso especial, el de Singapur. Este país tiene la gran ventaja de que imparte toda su educación matemática, ya desde primaria, en inglés, lo que nos permite acceder a sus libros de texto, además de a su currículo.

Palabras clave: *pruebas internacionales, metodología, matemáticas, Singapur*

INTRODUCCIÓN.

Es bien conocida la brecha que existe entre los resultados conseguidos en las pruebas internacionales de referencia sobre conocimientos y competencias matemáticas (PISA, TIMSS) por varios países asiáticos (Corea del Sur, China-Shangai, Japón, Singapur) y los conseguidos por los países occidentales con mejor rendimiento. De hecho, dicha brecha parece seguir aumentando en los últimos años. Estas pruebas internacionales, que creemos que miden bastante bien el nivel matemático de los alumnos (TIMMS, circunscrita al ámbito matemático, y PISA más bien orientada a la aplicación de las matemáticas en situaciones realistas) no contestan sin embargo a la pregunta sobre el origen de las diferencias de rendimiento observadas.

Aunque es muy complicado obtener resultados relevantes al respecto, las profundas diferencias socioeconómicas entre los países asiáticos mencionados y los occidentales hacen del todo plausible la hipótesis de que el componente sociológico puede jugar un papel en los resultados obtenidos. Tanto la valoración social de la educación, como la presión competitiva (esta última con claros efectos indeseados en algunos países asiáticos) hacen que tanto los estados como muchas de las familias y de los estudiantes mantengan niveles de esfuerzo educativo seguramente superiores a los de sus homólogos occidentales.

Sin embargo, que estos aspectos socioeconómicos tengan un peso en la explicación de la diferencia de resultados no excluye que los aspectos puramente metodológicos sean también importantes. Y esto es especialmente cierto en matemáticas, dado el carácter internacional de sus procesos y su lenguaje.

En este trabajo se exponen las características básicas del enfoque metodológico que se usa en Singapur en la enseñanza de las matemáticas preuniversitarias.

LAS MATEMÁTICAS BÁSICAS EN SINGAPUR.

Singapur nos parece un caso de estudio especialmente relevante, por dos razones: en primer lugar, se trata de un país pequeño, homogéneo y centralizado (básicamente, una ciudad-estado de unos 6 millones de habitantes en la actualidad), lo que en su momento hizo posible la implementación de profundos cambios en el sistema educativo; en segundo lugar, se trata de una ex-colonia británica que decidió implantar un sistema educativo bilingüe desde la independencia, y las matemáticas se estudian en inglés en todos los niveles educativos. Esto hace que no solo el currículo (http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/), sino también los libros de texto, sean accesibles.

En cuanto a sus resultados en TIMSS, en la Figura 1 se puede observar que se han mantenido estables, y en la parte más alta, desde el principio (recordemos que estos resultados están ajustados a una distribución de media 500 y desviación típica de 100. Los de nuestro país, también se han mantenido bastante estables, entre 480 y 490).

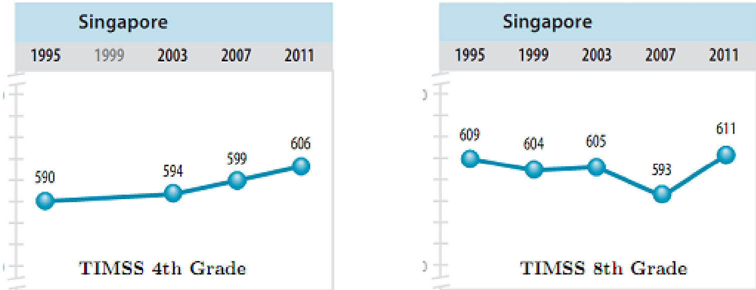


Figura 10. Evolución de los resultados de Singapur en TIMSS.
Fuente: informe TIMSS 2011.

El diseño curricular.

El estudio en profundidad del currículo de Singapur se sale de los límites de este trabajo; nos limitaremos a subrayar las características que llaman más la atención al compararlo con los nuestros. En esta comparación, es útil tener en cuenta que la etapa de enseñanza primaria consta de seis cursos, y que empieza también cuando el niño cumple 6 años. Al final de esa etapa, hay un examen externo (el Primary School Learning Examination), en función de cuyos resultados los alumnos son dirigidos a una vía académica en secundaria, o a una vía más profesionalizante. No es este el lugar de entrar a valorar esta separación temprana, y no tenemos datos sobre cuántos alumnos siguen cada una de las vías.

Los currículos de todas las etapas son más concisos que los nuestros, gracias a una adecuada selección de los temas más importantes. Además, se pone especial cuidado en tratar tanto los aspectos conceptuales como los algorítmicos. Por ejemplo, aunque el concepto de división se trata ya desde 1º de Primaria, con problemas de reparto y de hacer grupos iguales, el algoritmo de la división no se presenta hasta 4º de Primaria, y limitado a divisores de un dígito. El algoritmo de la división con divisores de dos o más dígitos ha desaparecido del currículo, siendo sustituido por la estimación y el uso de la calculadora.

El currículo no tiene estructura en espiral, los temas se ven "de una vez" y agrupados. Por ejemplo, las fracciones no se estudian en secundaria; hay unas pocas páginas de repaso, pero repasar no es lo mismo que "volver a estudiar". En cuanto al agrupamiento, un ejemplo que resalta sobre nuestro enfoque es el de las potencias en secundaria: el estudio de las potencias de exponente natural, entero y racional se agrupa en 3º de secundaria.

Una consecuencia natural de estas dos características es que hay tiempo suficiente para tratar los temas con la pausa necesaria para conseguir una comprensión más profunda, y un auténtico aprendizaje.

También queremos destacar la presencia de la geometría en el currículo. No solo de los problemas de medida, y de elementos gráficos como apoyo en otros temas (los "bar diagrams", una de las características mas conocidas del "método Singapur"): también se tratan en primaria temas de geometría "clásica", como el estudio de ángulos en configuraciones de rectas, triángulos y polígonos, que constituyen una puerta de entrada perfecta al razonamiento lógico. Un ejemplo de esto se puede ver aquí: http://tinyurl.com/mok23qp.

Por último, merece la pena mencionar que, evitando toda tentación de complacencia por el éxito obtenido, Singapur inició recientemente una revisión del currículo. El año 2013 publicó el nuevo currículo de los cursos 1º y 2º, tanto de primaria como de secundaria, con el anuncio de que la revisión de los cursos sucesivos se publicará en su momento. El documento que contiene el nuevo currículo de 1º y 2º de primaria, al que se puede acceder directamente en este enlace http://tinyurl.com/og5zvaz, contiene una exposición brillante sobre en qué debería consistir el aprendizaje matemático básico en el siglo XXI.

Los libros de texto.

La profunda reforma de la enseñanza de las matemáticas que se implantó en Singapur en el año 1982 llevó aparejada la publicación de nuevos libros de texto, elaborados por el Ministerio de Educación. La publicación se liberalizó hace ya algunos años, y los libros de texto que hemos estudiado corresponden a la editorial Marshall-Cavendish.

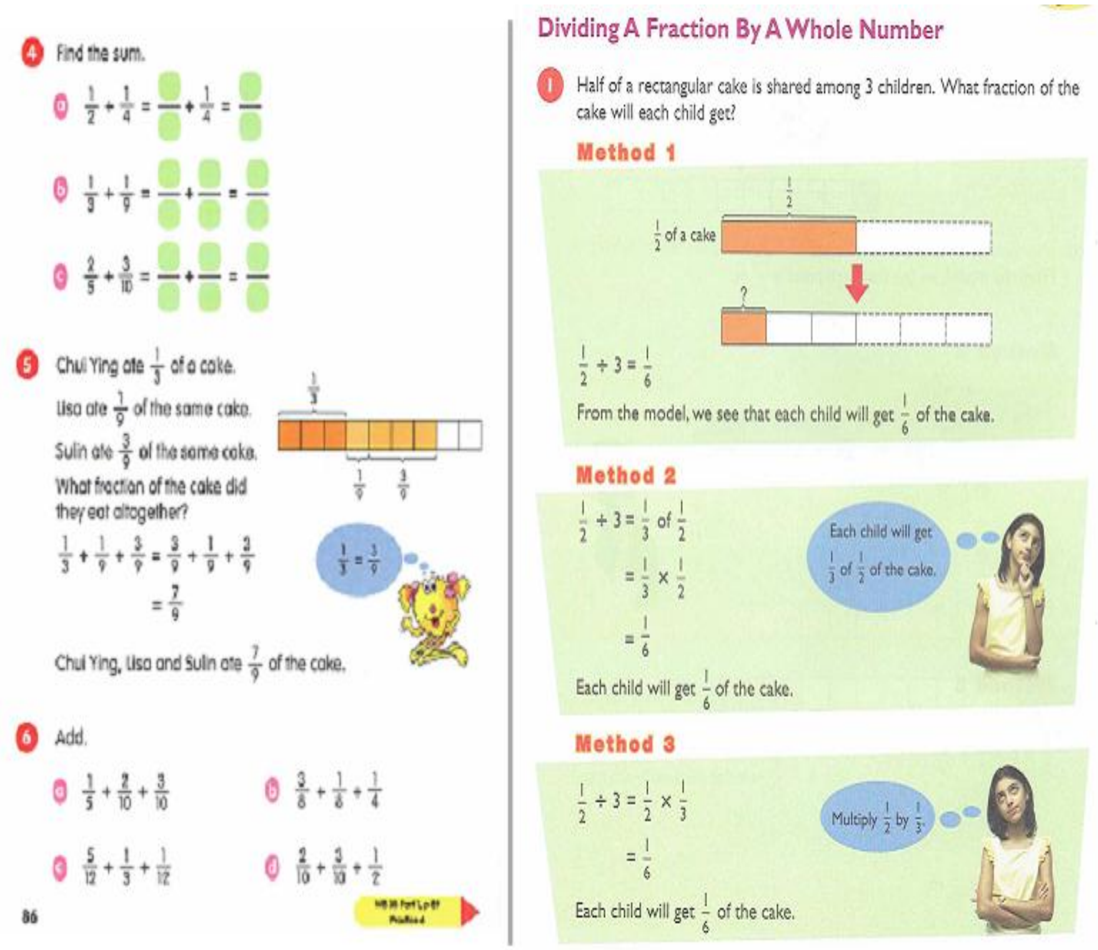
La principal característica común de los textos de primaria y secundaria es que los contenidos están organizados de manera que se tratan una sola vez. Como ejemplo, en la siguiente tabla mostramos cómo se tratan las fracciones en Primaria (en Secundaria, el tratamiento de las fracciones se reduce a 4 páginas de repaso en primer curso).

2º	**3º**
• Entendiendo las fracciones • Más fracciones • Comparar y ordenar fracciones • Suma y resta de fracciones (igual denominador) • Problemas	• Numerador y denominador • Fracciones equivalentes • Más sobre equivalentes: un hatajo • Comparando fracciones • Suma y resta de fracciones
4º	**5º – Tema 1**
• Números mixtos • Fracciones impropias • Conversión entre tipos • Suma y resta • Fracción de un conjunto • Problemas	• Fracciones equivalentes • Suma y resta de fracciones • Fracciones y división • Fracciones y decimales • Suma y resta de números mixtos • Problemas
5º – Tema 2	**6º**
• Producto de fracciones propias • Problemas • Producto con fracciones impropias • Producto con números mixtos • Problemas • Dividir una fracción entre un entero	• Las cuatro operaciones con fracciones • División entre una fracción propia • Problemas

Tabla 4. Secuenciación de los contenidos de fracciones en los libros de Primaria

Obsérvese que el único contenido que se repite es el de la suma y resta de fracciones no equivalentes, primero en 3º y después en 4º y en 5º. Se trata seguramente del concepto mas importante, y por ello lo tratan en tercer curso con los casos mas sencillos de entender, esencialmente con mitades y cuartos, y con tercios y sextos, para tratarlo ya en 4º y 5º curso en general (aunque, como se dice en el currículo, limitado a denominadores menores o iguales que 12 cuando no se usa la calculadora).

Figura 11.



Ejemplos de 3º (izquierda) y 5º (derecha).

En cuanto al estilo de presentación, en la Figura 2 se pueden ver dos ejemplos. En el de la izquierda, correspondiente al libro de 3º, se trabaja la suma de fracciones. Aunque ya se conoce el concepto de fracción equivalente, se evita dar instrucciones sobre cómo conseguir hacer la suma; al mismo tiempo, la dificultad y presentación de los ejercicios están cuidadosamente pensados para que los alumnos puedan avanzar por sus propios medios, en lo que nos parece una interpretación muy ajustada de la teoría del andamiaje y la zona de desarrollo próximo (Vygotsky 1978). El objetivo de este planteamiento es conseguir una auténtica comprensión. En la parte de la derecha, correspondiente a 5º, vemos un ejemplo de cómo se introduce la división cuando el divisor es un número entero. El énfasis se pone en la comprensión del concepto – para lo cual muchas veces resulta útil presentar varias interpretaciones – antes que en exponer un proceso que el alumno tenga que memorizar para después reproducir.

La idea subyacente (que desde luego compartimos) es que si el concepto se entiende detallar el proceso es innecesario y, si el concepto no se entiende, lo que hay que hacer es insistir en el trabajo conceptual, pues presentar en ese caso en el proceso no produce buenos resultados, si pensamos en el medio plazo y en aplicar los conocimientos adquiridos a la resolución de problemas.

Siguiendo el espíritu de estos textos hemos preparado materiales para el primer curso de primaria, de uso público, y que se pueden consultar en esta dirección: http://tinyurl.com/loldadk.

En la etapa de educación secundaria, los textos de Marshall-Cavendish siguen manteniendo las mismas características. Al compararlos con los mas extendidos en nuestro país llama poderosamente la atención una nueva diferencia: en nuestros textos las “cuentas” se hacen enseguida bastante técnicas, en tanto que en los textos de Singapur la dificultad técnica está mejor regulada. Es difícil escapar a la sensación de que muchos de nuestros alumnos navegan por la enseñanza secundaria perdidos entre las cuentas, y sin poder dedicarle el tiempo necesario a la comprensión de los conceptos básicos.

El lector interesado puede encontrar en este enlace http://tinyurl.com/krbvshk el tema de potencias del texto de Marshall-Cavendish. A la hora de hacer la comparación, es importante tener presente que es el único tema dedicado al tratamiento de potencias, y que corresponde al tercer curso de secundaria de la vía académica.

CONCLUSIONES.

Aunque las diferencias sociológicas puedan explicar en parte las diferencias observadas en los resultados de las pruebas internacionales sobre conocimientos matemáticos entre algunos países asiáticos y los occidentales, creemos que al menos en el caso de Singapur tanto el diseño del currículo como la metodología aplicada en la enseñanza de las matemáticas pueden contribuir también a sus buenos resultados.

Es cierto que no existen, de momento, datos al respecto. Seguramente los haya dentro de algunos años, pues están surgiendo en varios lugares experiencias piloto que tienen como inspiración el enfoque de Singapur (que se suele conocer como “método Singapur”). La pregunta es: ¿podemos permitirnos esperar para revisar en profundidad cómo enseñamos las matemáticas básicas en España?

Referencias.

Currículos de Matemáticas de Singapur: http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/

PISA 2012: http://www.oecd.org/pisa/

TIMSS 2011: http://timss.bc.edu/timss2011/

Lev Vygotsky 1978. Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes, Harvard University Press.

Para hacer referencia al artículo:

Ramos, P. (2015). Las Matemáticas en Singapur: ¿puede su metodología explicar sus resultados? En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”.* (pp. 125-129). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

TALLERES

TALLER DE PBL (PROBLEM BASED LEARNING) EN MATEMÁTICAS

Óscar Abellón Martín

Colegio Nuestra Señora del Pilar (Soria)

Resumen

Esta metodología se ha incorporado recientemente en nuestras aulas en la enseñanza reglada.

En contra de la idea tradicional en la que el profesor expone unos contenidos y después propone problemas para aplicarlos, la metodología del PBL sigue el proceso contrario, en primer lugar se plantea el problema y son los alumnos, guiados por el profesor, los que investigan y buscan recursos que permitan resolverlo. Integra contenido curricular con desafíos basados en experiencias reales, otorga todo el protagonismo al alumno, favorece el trabajo cooperativo y la posibilidad de interrelacionar diferentes áreas.

A través de este taller, utilizando la propia metodología del PBL, los participantes podrán descubrir en qué consiste un PBL, las ventajas que proporciona en el aprendizaje de los alumnos y tendrán la oportunidad de aprender a programarlos para aplicarlos en sus clases.

Palabras clave: *investigación, autonomía, aplicación, aprendizaje.*

PLANTEAMIENTO DE UN PBL.

Introducción del taller.

Aunque el origen de los PBL se remonta a las décadas de los 60 y 70 en el ámbito universitario de la medicina, no ha sido hasta recientemente cuando esta metodología se ha incorporado en nuestras aulas en la enseñanza reglada y poco a poco está adquiriendo un enorme peso en aquellas aulas en las que se utilizan metodologías activas para lograr un mejor aprendizaje de los alumnos y para una mayor adquisición de sus competencias clave.

Como a lo largo del congreso se están trabajando las metodologías activas, el taller comienza con la Rutina de Pensamiento “3, 2, 1, puente” para que cada participante recoja 3 ideas sobre lo que sabe de los PBL, 2 preguntas sobre dicho tema y una metáfora o analogía que relacione los PBL con cualquier otro ámbito. Al finalizar el taller, se realizará de nuevo la misma rutina para visualizar el puente de aprendizaje que se ha producido tras el taller con los comentarios iniciales, los finales y el por qué del cambio. En esta rutina, tanto al inicio como al final del taller, se realiza una puesta en común de las propuestas recogidas por los participantes.

Pero al igual que ocurre con una lengua, que como mejor se aprende es utilizándola, vamos a hacer uso de esta propia metodología para conocerla en profundidad y programar un PBL para utilizarlo en clase de **Matemáticas.**

Organización del trabajo. Grupos cooperativos.

Para ello vamos a distribuir a los participantes en este taller en grupos de 4 y vamos a trabajar en cooperativo, tal y como haremos con nuestros propios alumnos en el aula, en grupos formales con los siguientes roles y funciones:

- **Líder**: Se encarga de explicar y trasmitir las tareas a todos los miembros, orienta el trabajo del grupo y está atento a los roles y al proceso de trabajo, lleva registro del grupo, redacta informes sobre decisiones o presentaciones del grupo, verifica la validez del trabajo del grupo, se encarga de animar para ampliar y mejorar los resultados de cada tarea, presenta o representa al grupo, se comunica en tareas con otros grupos.

- **Dinamizador**: Fomenta la participación, se asegura de que todos los miembros participen y contribuyan por igual con sus ideas y opiniones, está atento a controlar el tiempo de cada intervención para que todos puedan hablar, anima en el reparto de tareas, ofrece apoyo verbal y no verbal a las ideas y a la participación de cada miembro, media en conflictos emocionales.
- **Pensador**: Está atento para que todos hayan entendido las instrucciones: Las explica, se asegura de que todos sepan llegar a la conclusión del resultado de la tarea, plantea preguntas que animan a profundizar más sobre cada actividad, lidera el uso de las estrategias cognitivas, anima al grupo para obtener más respuestas, integra las ideas de todos en las respuestas, media en conflictos sobre ideas y opiniones, anima a buscar fundamentos para defender las propuestas o respuestas.
- **Ordenador**: Controla el tono de voz para que todos hablen, de modo que se pueda trabajar, está atento al tiempo de cada actividad y al tiempo total del proyecto, controla el orden de los materiales, recoge los materiales al final y al principio de cada tarea, controla que los compañeros se muevan entre los grupos sin hacer ruido, registra frecuencias y tiempos.

En cada uno de los grupos los componentes se repartirán los roles. Para facilitar el trabajo y recordar a cada miembro del grupo sus funciones, se reparten unas tarjetas plastificadas en las cuales figura, por una cara, las funciones del rol correspondiente y, por la otra, cómo realizarlas.

LÍDER	¿CÓMO?
- Se encarga de explicar y trasmitir las tareas a todos los miembros. - Orienta el trabajo del grupo y está atento a los roles y al proceso de trabajo. - Lleva registro del grupo, redacta informes sobre decisiones o presentaciones del grupo. - Verifica la validez del trabajo del grupo. - Se encarga de animar para ampliar y mejorar los resultados de cada tarea. - Presenta o representa al grupo. - Se comunica en tareas con otros grupos.	- Hay que hacer esto... - Tú tienes que encargarte de... - Yo llevo el registro del grupo y redacto los informes... - Déjame que compruebe lo que has hecho,... Tienes que... - Mejora tu parte con esto... - Mi equipo ha concluido... - Mi equipo ha preparado esto... Tenemos la siguiente duda...

Figura 12. Rol del Líder.

DINAMIZADOR	¿CÓMO?
- Fomenta la participación. - Se asegura de que todos los miembros participen y contribuyan por igual con sus ideas y opiniones. - Está atento a controlar el tiempo de cada intervención para que todos puedan hablar. - Anima en el reparto de tareas. - Ofrece apoyo verbal y no verbal a las ideas y a la participación de cada miembro. - Media en conflictos emocionales.	- ¿Qué opinas tú?, ¿qué se te ocurre hacer? - Nos falta tu opinión, ¿tú qué dices? - Se ha terminado tu turno, ahora le toca a... - ¿Qué tal llevas tu parte de la tarea? - Ánimo con tu parte, ¿necesitas ayuda?, ¿en qué puedo apoyarte? - Vamos a resolver esta diferencia que tenéis, contadme que ocurre,..., vamos a hacer lo siguiente,...

Figura 2. Rol del Dinamizador.

PENSADOR	¿CÓMO?
- Está atento para que todos hayan entendido las instrucciones. Las explica. - Se asegura de que todos sepan llegar a la conclusión del resultado de la tarea. - Plantea preguntas que animan a profundizar más sobre cada actividad. - Lidera el uso de las estrategias cognitivas. - Anima al grupo para obtener más respuestas. - Integra las ideas de todos en las respuestas. - Media en conflictos sobre ideas y opiniones. - Anima a buscar fundamentos para defender las propuestas o respuestas.	- ¿Habéis entendido las instrucciones?, nos piden esto… - ¿Sabes llegar hasta el final?, explícame el razonamiento… - ¿Qué pasaría si…?, ¿entonces qué…? - Utilicemos la siguiente estrategia… - Aportemos más ideas, ¿de qué otra forma se puede hacer? - Teniendo en cuenta las ideas de todos, la respuesta es… - ¿En qué te basas para eso?, ¿por qué?

Figura 3. Rol del Pensador.

ORDENADOR	¿CÓMO?
- Controla el tono de voz para que todos hablen, de modo que se pueda trabajar. - Está atento al tiempo de cada actividad y al tiempo total del proyecto. - Controla el orden de los materiales. - Recoge los materiales al final y al principio de cada tarea. - Controla que los compañeros se muevan entre los grupos sin hacer ruido. - Registra frecuencias y tiempos.	- Estamos hablando demasiado alto,…, bajad el tono. - El tiempo avanza, hay que ir terminando esta parte… - Dejad las cosas en su sitio, vamos a ser ordenados,… - Tomad los materiales,… Entregadme las cosas,… - Por favor, no hagáis tanto ruido al moveros,… - Yo registro los tiempos…

Figura 4. Rol del Ordenador.

Enunciado del PBL.

A continuación se facilita a cada grupo el enunciado del problema a resolver:

Tras numerosas reuniones del claustro de profesores de tu centro, con la intención de mejorar el rendimiento académico de sus alumnos, así como de mejorar el desarrollo de sus Competencias Básicas, habéis llegado a las siguientes conclusiones:

Los alumnos del centro

- *Tienden en exceso a preparar los exámenes memorizando los contenidos, sin comprender en muchas ocasiones el significado de los mismos.*
- *Tienen muy poco desarrollada su competencia "Aprender a aprender".*
- *Tienen muchas dificultades para buscar información e investigar sobre un tema concreto, ya que no contrastan la información, ni saben extraer la esencia de la misma.*
- *Tienen excesiva dependencia del profesor.*
- *No saben aplicar correctamente los contenidos a situaciones prácticas de la vida cotidiana.*
- *Son muy individualistas en su trabajo y su capacidad para el trabajo en equipo es muy baja.*

Ante esta situación, a propuesta del profesorado, la Dirección del centro ha decidido implantar en el aula alguna metodología innovadora que permita mejorar la formación de sus alumnos. Dado que alguno de los miembros del Claustro ha oído hablar de los PBL (Problem Based Learning) o ABP (Aprendizaje Basado en Problemas) como una opción metodológica para dar respuesta a esta situación, se ha considerado que puede ser una estrategia metodológica eficaz para implantar en el centro. Sin embargo nadie sabe exactamente qué es y cómo se aplica.

Pero a tu Claustro no se le resiste ningún problema y se ha constituido un grupo de trabajo, del cual tú formas parte, para salvar este pequeño escollo.

El objetivo de este grupo será preparar unos sencillos materiales con los que transmitir al resto del Claustro información básica relacionada con los PBL: Origen, qué es un PBL, características, planificación, desarrollo y evaluación. ¡Utiliza tu imaginación para decidir cómo presentarlo!

Por otro lado, deberás llevar a la práctica los contenidos investigados, elaborando un PBL para alguna de tus materias. Será un buen referente para que tus compañeros lo comprendan mejor.

La implantación de los PBL en tu centro y el desarrollo de las competencias de sus alumnos están en tus manos. ¡Mucho ánimo en este nuevo reto!

Recursos para la resolución del PBL.

Para la resolución de este PBL se facilita a cada grupo los siguientes recursos:

Páginas de Internet:

- De la Universidad Politécnica de Madrid: http://innovacioneducativa.upm.es/guias/Aprendizaje_basado_en_problemas.pdf
- Del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey: http://www.ub.edu/mercanti/abp.pdf
- De la Facultad de Medicina Universidad San Francisco de Quito: http://www.remq.edu.ec/neuro/aprender_aprender.pdf
- De la Universidad Católica del Perú: http://campus.usal.es/~ofeees/NUEVAS_METODOLOGIAS/ABP/13.pdf
- De la Facultad de Ciencias de la Salud Eugenio Espejo: http://www.ute.edu.ec/noticias/equinoccio/ART%20II.pdf
- De la Universidad Nacional de Colombia: http://hermesoft.esap.edu.co/esap/hermesoft/portal/home_1/rec/arc_10137.pdf

Formato de presentación de las soluciones.

Además se indica que la solución ha de presentarse de la siguiente forma:

En soporte digital: Presentación de Power Point (interactiva), documento de WORD, otros programas,…

La entrega se realizará mediante alguna vía digital (Email, memoria extraíble, etc.).

Evaluación del trabajo.

Y se aportan rúbricas de Trabajo Cooperativo, Uso de las TIC, Exposición oral, Producto escrito y se informa de los criterios de evaluación:

Cada grupo tendrá 5 notas:

- Trabajo Coopperativo: 15 %
- Uso de las TIC: 15 %
- Materiales Explicativos: 25 %
- PBL de creación propia: 30 %
- Exposición Oral: 15 %

También se facilita el guión del trabajo que se ha de presentar, así como el del Porfolio o Diario de Campo, que es el siguiente:

- Índice
- Descripción del problema.
- Organización del grupo y de la investigación.
- Descripción de los pasos realizados para resolver el PBL: Porfolio.
- Resolución del problema: Punto de partida (datos), desarrollo y solución.
- Fuentes de información utilizadas.
- Valoración y reflexión.
  - ¿Qué es lo que más me ha costado?
  - ¿Salió como esperaba?
  - De volver a realizarlo, ¿qué cambiaría?
  - ¿Qué momento destacaría del proceso y por qué?
  - ¿Qué he aprendido?

El porfolio, a modo de Diario de Campo, recogerá el trabajo diario realizado, registrando fecha y horas y respondiendo a las siguientes cuestiones para cada día:

- ¿Qué hemos hecho?
- ¿Cómo lo hemos hecho?
- ¿Qué dificultades hemos encontrado y cómo las hemos superado?
- Fuentes de información utilizadas.
- ¿Qué hemos aprendido?

Fases del grupo en la resolución de un PBL.

Sin ninguna duda, para poder entender mejor la metodología del "Aprendizaje Basado en Problemas" es conveniente ponerse en la situación del alumno y conocer la sensación que experimentan al enfrentarse a un problema siguiendo esta metodología.

Tras el reparto de estos materiales se deja a los grupos 15-20 minutos para organizar el trabajo, plantear la manera de resolver el problema y dar los primeros pasos para llegar a la solución.

Transcurrido ese tiempo se realiza una puesta en común del trabajo desarrollado por cada grupo y de las sensaciones experimentadas por sus miembros. Entonces se informa de las fases por las que pasa un grupo de alumnos cuando se enfrenta a un PBL por primera vez:

- Primera etapa. Etapa de Inicio: Alumnos con desconfianza y dificultad para entender y asumir el rol. Resistencia a iniciar el trabajo. No se trabaja como equipo y se dificulta distinguir entre el problema y los objetivos.

- Segunda etapa: Los alumnos presentan cierto nivel de ansiedad, sienten que no avanzan y consideran que la metodología del PBL no tiene una estructura definida.
- Tercera etapa: Los alumnos valoran su trabajo. Toman conciencia de la posibilidad de hacerse responsables de su propio aprendizaje. Desarrollan la habilidad de discernir información.
- Cuarta etapa: Seguridad y autosuficiencia en el grupo. Congruencia entre actividades y objetivos. Intercambio fluido de información y efectiva resolución de los conflictos.
- Quinta etapa: Etapa más productiva. Los alumnos han entendido su rol y el del tutor. Han integrado la forma de trabajo a otras experiencias de trabajo grupal.

Rol de profesor y alumno en la metodología de PBL.

Posteriormente se informa de la importancia de guiar los pasos de la investigación ya que, si los grupos se sienten abandonados, puede resultar muy fácil que tiren la toalla sin haber llegado a la solución.

El rol del profesor cambia por completo al que ha adquirido tradicionalmente. El profesor ahora:

- Prepara el escenario para que el alumno construya su propio aprendizaje.
- Hace preguntas.
- Proporciona retroalimentación.
- Observa y analiza.
- Hace conexiones.
- Da información.

El alumno:

- Identifica y resuelve problemas.
- Adquiere y aplica conocimientos nuevos.
- Genera aprendizaje continuo.
- Trabaja en equipo.
- Analiza, sintetiza y evalúa.
- Busca, evalúa y utiliza información.

Pasos para la resolución de un PBL.

En el proceso de investigación ha de seguirse un guión que debe facilitarse a los alumnos con la intención de que estructuren el trabajo y se realice de una manera organizada y coherente. Dentro de la propia investigación han de irse marcando pequeños retos que impidan que el alumno caiga en el desánimo y se mantenga en activo de forma permanente. Si los alumnos desconocen el guión y no han trabajado nunca con esta metodología, lo más probable es que la tendencia sea empezar a resolver el problema y preparar la presentación sin haber investigado y buscado la información necesaria para poder llegar a la solución, y que entren en una situación de bloqueo ante la ausencia de las herramientas necesarias para resolver el problema.

Entonces se facilita a los profesores participantes en el taller el siguiente guión, propuesto por Morales y Landa en 2004:

PASOS PARA RESOLVER UN PBL:

Paso 1. ***Leer y Analizar el escenario del problema***:

Comprensión del enunciado y de lo que se pide. Reformular el problema, de tal forma que se compruebe la comprensión del mismo y del escenario en que se desarrolla. Discusión del problema dentro del grupo. Es necesario que todos los miembros del equipo comprendan el problema.

Paso 2. **Realizar una lluvia de ideas:**

Teorías o hipótesis sobre las causas del problema, o ideas de cómo resolverlo. Preparar una lista con todas ellas y aceptarlas o rechazarlas según avance el problema.

Paso 3. **Hacer una lista de aquello que se conoce:**

Listado de todo lo que el equipo conoce acerca del problema o de la situación. El equipo debe recurrir a los conocimientos de los que dispone, detalles del problema que conoce y que podrá utilizar para su resolución.

Paso 4. **Hacer una lista de aquello que se desconoce:**

Listado con todo aquello que el equipo cree se debe saber para resolver el problema. Existen diversos tipos de preguntas que pueden ser adecuadas, algunas pueden relacionarse con conceptos o principios que deben estudiarse para resolver la situación. Todos los componentes del grupo deben ser conscientes de aquello que no saben y que necesitarán para resolver el problema.

Paso 5. **Hacer una lista de aquello que necesita hacerse para resolver el problema:**

Planear las estrategias de investigación. Es aconsejable elaborar una lista con las acciones que deben realizarse y realizar el reparto de las tareas entre los miembros del grupo.

Paso 6. **Definir el problema:**

Explicar claramente lo que el equipo desea resolver, producir, responder, probar o demostrar. Definir adecuada y concretamente el problema que se va a resolver y en el que se va a centrar la investigación.

Paso 7. **Obtener información:**

El equipo localizará, recopilará, organizará, analizará e interpretará la información de diversas fuentes. Periodo de trabajo y estudio individual de forma que cada miembro del equipo lleve a cabo la tarea asignada. Obtener la información necesaria, estudiarla y comprenderla, pedir ayuda si es necesario, etc.

Paso 8. **Puesta en común:**

Los componentes del equipo ponen en común todos los hallazgos realizados para poder llegar a elaborar conjuntamente la solución al problema y presentar los resultados. Tras esta puesta en común habrán de tomarse decisiones en equipo y resolver el problema.

Paso 9. **Desarrollo del producto final:**

El equipo elaborará el documento final que recoge el trabajo realizado y la solución del problema. En este documento no puede faltar la descripción del problema, la organización de la investigación y del grupo (indicando el desarrollo de los pasos del PBL), las fuentes de información utilizadas, la resolución del problema y el resultado final. También ha de adjuntarse el portfolio.

Paso 10. **Presentar resultados:** El equipo hará una presentación oral del trabajo realizado, aportando los documentos generados.

Tras facilitar el guión con los pasos que se han de seguir para resolver el PBL propuesto se dejan 15 minutos a los grupos para que aborden de nuevo el trabajo y comparen la situación con la de partida. De nuevo se realiza una puesta en común transcurrido ese tiempo que permitirá contrastar la diferencia de abordar la investigación con un guión facilitado por el profesor.

En segundo lugar se pide a cada participante una idea y una pregunta sobre lo que considera que es un PBL. Tras la correspondiente puesta en común se facilita la siguiente información:

¿QUÉ ES UN PBL?

Es una metodología centrada en el aprendizaje, en la investigación y reflexión que siguen los alumnos para llegar a una solución ante un problema planteado por el profesor. El ABP se plantea como medio para que los estudiantes adquieran conocimientos y los apliquen para solucionar un problema real o ficticio, sin que el docente utilice la lección magistral.

Según Howard Barrows "El ABP es un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos". En esta metodología los protagonistas del aprendizaje son los propios alumnos, que asumen la responsabilidad de ser parte activa en el proceso.

Características de un PBL.

El Aprendizaje Basado en Problemas se caracteriza por lo siguiente:

- Implica un **aprendizaje activo** donde los alumnos participan constantemente en la adquisición de su conocimiento.
- El método se orienta a la **solución de problemas** que son seleccionados o diseñados para lograr el aprendizaje de ciertos objetivos de conocimiento.
- El **aprendizaje se centra en el alumno** y no en el profesor o sólo en los contenidos.
- Es un método que **estimula el trabajo cooperativo**.
- Favorece la posibilidad de **interrelacionar distintas materias o disciplinas académicas.**
- El **maestro** se convierte en un facilitador o **tutor del aprendizaje**.

Beneficios para el alumno.

Con esta metodología se ayuda a los alumnos a desarrollar, entre otras, las siguientes competencias:

- Resolución de problemas.
- Toma de decisiones.
- Trabajo en equipo.
- Habilidades de comunicación (argumentación y presentación)
- Desarrollo de actitudes y valores: precisión, revisión, tolerancia…
- Identificación de problemas relevantes del contexto profesional.
- La conciencia del propio aprendizaje
- La planificación de las estrategias que se van a utilizar para aprender
- El pensamiento crítico
- El aprendizaje autodirigido
- Las habilidades de evaluación y autoevaluación
- El aprendizaje permanente
- Razonamiento eficaz
- Creatividad.
- Investigación, búsqueda y manejo de información.

Diferencias del uso del PBL con respecto al aprendizaje tradicional.

A continuación se presenta una tabla comparativa entre el aprendizaje tradicional y el que se deriva del uso de la metodología de PBL.

Tabla 5. Comparativa entre el aprendizaje tradicional y un PBL

Aprendizaje tradicional	PBL
El profesor asume el rol de experto.	Los profesores tienen el rol de coach.
Los profesores transmiten la información.	Los alumnos toman la responsabilidad de aprender.
Los profesores organizan el contenido en exposiciones.	Los profesores diseñan su curso basado en problemas abiertos.
Los alumnos son vistos como receptores pasivos de información.	Los alumnos son vistos como sujetos que pueden aprender por cuenta propia.
Las exposiciones del profesor son basadas en comunicación unidireccional.	Los alumnos trabajan en equipos para resolver problemas, adquieren y aplican el conocimiento en una variedad de contextos. Los alumnos localizan recursos y los profesores los guían en este proceso.
Los alumnos trabajan por separado.	Los alumnos, conformados en pequeños grupos, interactúan con los profesores.
Los alumnos memorizan información para exámenes.	Los alumnos participan activamente en la resolución del problema, identifican necesidades de aprendizaje, investigan, aprenden, aplican y resuelven problemas.
El aprendizaje es individual y de competencia.	Los alumnos experimentan el aprendizaje en un ambiente cooperativo.
Los alumnos buscan la “respuesta correcta” para tener éxito en un examen.	Los profesores evitan sólo una “respuesta correcta” y ayudan a los alumnos a armar sus preguntas, formular problemas, explorar alternativas y tomar decisiones efectivas.
La evaluación es sumatoria y el profesor es el único evaluador.	Los estudiantes evalúan su propio proceso así como los demás miembros del equipo y de todo el grupo. Además el profesor implementa una evaluación integral, en la que es importante tanto el proceso como el resultado.

Ventajas del uso de la metodología del PBL.

El uso de la metodología del Aprendizaje Basado en Problemas proporciona las siguientes ventajas:

- Alumnos con mayor motivación: El método estimula que los alumnos se involucren más en el aprendizaje debido a que sienten que tienen la posibilidad de interactuar con la realidad y observar los resultados de dicha interacción.
- Un aprendizaje más significativo: El ABP ofrece a los alumnos una respuesta obvia a preguntas como ¿Para qué se requiere aprender cierta información?, ¿Cómo se relaciona lo que se hace y aprende en la escuela con lo que pasa en la realidad?
- Desarrollo de habilidades de pensamiento: La misma dinámica del proceso en el ABP y el enfrentarse a problemas lleva a los alumnos hacia un pensamiento crítico y creativo.
- Desarrollo de habilidades para el aprendizaje: El ABP promueve la observación sobre el propio proceso de aprendizaje, los alumnos también evalúan su aprendizaje ya que generan sus propias estrategias para la definición del problema, recaudación de información, análisis de datos, la construcción de hipótesis y la evaluación.
- Integración de un modelo de trabajo: El ABP lleva a los alumnos al aprendizaje de los contenidos de información de manera similar a la que utilizarán en situaciones futuras, fomentando que lo aprendido se comprenda y no sólo se memorice.
- Posibilita mayor retención de información: Al enfrentar situaciones de la realidad los alumnos recuerdan con mayor facilidad la información ya que ésta es más significativa para ellos.
- Permite la integración del conocimiento: El conocimiento de diferentes disciplinas se integra para dar solución al problema sobre el cual se está trabajando, de tal modo que el aprendizaje no se da sólo en fracciones sino de una manera integral y dinámica.
- Las habilidades que se desarrollan son perdurables: Al estimular habilidades de estudio autodirigido, los alumnos mejorarán su capacidad para estudiar e investigar sin ayuda de nadie para afrontar cualquier obstáculo. Los alumnos aprenden resolviendo o analizando problemas del mundo real y aprenden a aplicar los conocimientos adquiridos a lo largo de su vida en problemas reales.
- Incremento de su autodirección: Los alumnos asumen la responsabilidad de su aprendizaje, seleccionan los recursos de investigación que requieren: libros, revistas, bancos de información, etc.
- Mejoramiento de comprensión y desarrollo de habilidades: Con el uso de problemas de la vida real, se incrementan los niveles de comprensión, permitiendo utilizar su conocimiento y habilidades.
- Habilidades interpersonales y de trabajo en equipo: El ABP promueve la interacción incrementando algunas habilidades como; trabajo de dinámica de grupos, evaluación de compañeros y cómo presentar y defender sus trabajos.
- Actitud automotivada: Los problemas en el alumno incrementan su atención y motivación. Es una manera más natural de aprender. Les ayuda a continuar con su aprendizaje al salir de la escuela.

Evaluación

Con respecto a la evaluación es imprescindible tener en cuenta que si cambian las maneras de aprender y enseñar, también será necesario **modificar la forma de evaluar** los aprendizajes.

El **alumno "ideal"** ya no es aquel que se ha estudiado de memoria la lección. El **alumno "ideal"** ahora es aquel que ha adquirido, por medio de un aprendizaje autónomo y cooperativo, los conocimientos necesarios y que, además, ha desarrollado y entrenado las competencias previstas en el programa de la materia gracias a una reflexión profunda y a una construcción activa de los aprendizajes.

Ahora ya no es suficiente un sistema de evaluación tradicional que mida el nivel de conocimiento de los conceptos trabajados en la unidad, deben evaluarse las competencias, más en concreto los descriptores y desempeños seleccionados en la correspondiente unidad didáctica y, para ello, es necesario el uso de nuevas herramientas de evaluación como el porfolio, las rúbricas o las dianas. La evaluación de dichos desempeños habrán de tener un peso concreto en la nota de la evaluación, tal y como se refleja en el PBL propuesto en el taller.

Orientaciones didácticas.

Para una buena planificación de un PBL es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

- **Seleccionar los objetivos** que, enmarcados dentro de las competencias establecidas en la materia, pretendemos que los alumnos logren con la actividad.
- **Escoger la situación del problema** sobre la que los alumnos tendrán que trabajar. Para ello el contenido debe:
    - Ser relevante para la práctica profesional de los alumnos.
    - Ser lo suficientemente complejo (pero no imposible) para que suponga un reto para los estudiantes.
    - Ser lo suficientemente amplio para que los alumnos puedan formularse preguntas y abordar la problemática con una visión de conjunto.
    - El problema debe estar en relación con los objetivos del curso y con problemas o situaciones de la vida diaria para que los alumnos encuentren mayor sentido en el trabajo que realizan.
- Los problemas deben llevar a los alumnos a **tomar decisiones o hacer juicios basados en hechos, información lógica y fundamentada**. Están obligados a justificar sus decisiones y razonamiento en los objetivos de aprendizaje del curso.
- **Orientar las reglas** de la actividad y el trabajo en equipo. La cooperación de todos los integrantes del grupo de trabajo es necesaria para poder abordar el problema de manera eficiente. La longitud y complejidad del problema debe ser administrada por el tutor de tal modo que los alumnos no se dividan el trabajo y cada uno se ocupe únicamente de su parte.
- **Establecer un tiempo** y especificarlo para que los alumnos resuelvan el problema y puedan organizarse.
- **Organizar sesiones de tutoría** donde los alumnos (a nivel individual y grupal) puedan consultar con el tutor sus dudas, sus incertidumbres, sus logros, sus cuestiones, etc.

Algunos ejemplos de PBL.

Para ilustrar la información facilitada e investigada, relativa al Aprendizaje Basado en Problemas, sirvan como ejemplo algunos PBL del área de Matemáticas, para 2º y 4º ESO, de los cuales se facilitan los materiales entregados a los alumnos en los que se aporta el enunciado y la descripción, metodología de trabajo, recursos, presentación de las soluciones, criterios de evaluación, objetivos de aprendizaje y temporalización.

Estos son los enunciados de dichos PBL:

Para 2º ESO:

a) Para trabajar el cálculo de áreas y volúmenes:

Una prestigiosa empresa de verduras navarras en conserva, ubicada en Fitero, quiere conmemorar su XL Aniversario con una edición especial limitada de latas de tomate triturado.

Para ello decide preparar una remesa de 1.000 botes iguales (de diseño) de tomate triturado que regalará a todos sus clientes hasta que se agoten las existencias.

Por todos es conocida la excelente calidad del tomate que envasa esta empresa y consideran que será un regalo que, además de bonito, recogerá la esencia de la exquisitez de sus productos y permitirá premiar la fidelidad de sus clientes.

Para este bello cometido te han encargado el diseño de sus botes que deberán contener 1 kg de este excelente tomate triturado.

El material con el que se fabricarán dichos botes es un tipo especial de cristal que tiene un coste de 0,26 céntimos de € por cm^2. En total se han presupuestado 1.225 € para poder cubrir el coste de dicho material con el que se van a fabricar los botes y, bajo ningún concepto, se podrá exceder dicha cantidad presupuestada.

La forma de los botes puede ser cualquiera entre las siguientes: Cubo, Paralelepípedo, Ortoedro, Prisma, Pirámide, Cono, Cilindro, Tronco de Cono, Tronco de Pirámide, Esfera, Tetraedro, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro, o cualquier modificación o combinación que se pueda confeccionar con dichos cuerpos geométricos.

Es conveniente, para que puedas realizar los cálculos, que conozcas que la densidad del tomate que se va a envasar es de 1,27 kg/dm^3.

Haz uso de tu elevado nivel de cálculo y explota toda tu creatividad para que esta empresa consiga conmemorar su aniversario como la ocasión lo merece y realiza un bonito diseño que permita cumplir con los requisitos marcados y sin sobrepasar la partida económica presupuestada.

Para ello has de indicar todos los cálculos realizados con cada uno de los cuerpos geométricos que hayas seleccionado y has de explicar por qué has seleccionado el que será el diseño definitivo.

Por último exprime tu imaginación para diseñar la etiqueta, creando un símbolo que permita relacionar el contenido del envase con el trabajo matemático realizado.

b) Para trabajar las potencias e introducir la función exponencial.

Has sido contratado por un famosa empresa de elaboración de fármacos, para su prestigioso laboratorio de I+D+I, para poder trabajar en las investigaciones de Stephen J. Hagen, que en su artículo sobre crecimiento bacteriano "Exponential growth of bacteria: Constant multiplication through division" de American Journal of Physics 78, de Diciembre 2010, dice en uno de sus párrafo:

"…El mejor ejemplo del crecimiento exponencial es el crecimiento de las bacterias en un cultivo. Una sola bacteria Escherichia coli a 37 °C se puede dividir una vez cada 20 minutos; repitiendo este proceso durante 11 horas se obtiene una colonia con casi diez mil millones de individuos. Si hubiera nutrientes suficientes en dos días la masa de esta colonia excedería la masa de la Tierra. Obviamente, no los hay. Una sola célula que crece durante 10 horas en un volumen de 10 mililitros de un cultivo con nutrientes se puede dividir unas 30 veces para dar lugar a unos mil millones de células con una densidad cercana a 10 millones de células por mililitro…"

Desde el laboratorio para el que has sido contratado se quiere contrastar dichas afirmaciones y para ello serán necesarios tus excelentes conocimientos sobre potencias. Dispones de un microscopio de alta precisión que te ha permitido obtener las siguientes mediciones, realizadas a 37 °C el día 5 de noviembre:

Hora	08:00	08:20	08:40	09:00	10:00	11:00	12:00
Nº de bacterias Escherichia coli	7	14	28	56	448	3584	28672

¿Estas mediciones te permiten confirmar las afirmaciones realizadas por Stephen J. Hagen?

Además de responder a esa cuestión la empresa que te ha contratado no se conforma con esto, te pide hacer lo siguiente:

- *Realiza un gráfico, indicando la hora en el eje OX y el número de bacterias en el eje OY que te permita visualizar el crecimiento de esta bacteria.*
- *Realiza de nuevo la tabla, indicando el nº de bacterias en forma de potencia, y estimando el resultado de la medición a las 12:20, 12:40, 13:00, 13:20, 13:40 y 14:00.*
- *Expresa la fórmula que permite obtener el nº de bacterias, N(t), en función del tiempo t, expresado en intervalos de 20 minutos transcurridos desde la primera medición.*
- *Indica a cuánto ascenderá la masa de la colonia a las 13:00 y a las 14:00.*
- *Indica a partir de qué hora, si hubiera nutrientes suficientes, la masa de esta colonia superará la masa de la luna.*

Por otro lado, tras la situación de alarma generada con la propagación de la enfermedad del Ébola, esta empresa considera necesario concienciar a la sociedad de la importancia de prevenir la enfermedad y tomar medidas drásticas en caso de padecerla. Para ello te solicita que hagas una estimación del tiempo que tardaría en padecer la enfermedad toda la humanidad en caso de no tomar ninguna medida para evitar el contagio. Es conveniente que para ello hagas una estimación media del número de personas al día con las que un enfermo de Ébola puede estar en contacto. Razona tu respuesta.

c) Para trabajar las funciones e introducir las funciones a trozos.

Una revolucionaria empresa de construcción de vehículos está realizando un estudio de los beneficios que obtiene en función de los vehículos que fabrica. Para ello ha realizado un riguroso seguimiento de las ventas, analizando ingresos obtenidos y gastos realizados para poder elegir, en el futuro, la opción más ventajosa para la empresa.

Tras dicho estudio se ha podido comprobar que los beneficios (y) en euros, tienen la siguiente relación con el número de coches fabricados (x):

Si el número de coches fabricados está entre 0 y 100, ambos incluidos, los beneficios, vienen dados por la función: $y = x^2 + 20x – 900$.

Si el número de coches fabricados es superior a 100 e inferior a 150, los beneficios se obtienen a partir de la función: $y = 21.100 – 100x$.

Y en caso de que se fabriquen a partir de 150 coches el beneficio se obtendrá a través de la función: $y = -3x^2 +1.200x – 106.400$.

La persona de la empresa que realizó el estudio, dado su reconocido prestigio en el análisis económico empresarial y estimaciones de resultados, ha sido contratado por otra empresa que le ha ofrecido mejores condiciones, motivo por el cual ha abandonado la empresa de coches para la que realizó el estudio, que ahora no sabe qué hacer con el trabajo que realizó, ya que no sabe ni interpretar las fórmulas ni extraer conclusiones a partir de ellas.

Esto ha provocado que dicha empresa, que es consciente del alto nivel de los alumnos de 4º de ESO del colegio Nuestra Señora del Pilar en cuanto al conocimiento de las funciones y del análisis de sus propiedades, les haya pedido ayuda para resolver su problema.

Por este motivo la empresa pide tu colaboración y solicita que des respuesta a las siguientes cuestiones para tomar decisiones empresariales importantes:

- *A cuánto asciende el beneficio de la empresa si fabrica 50 coches, 100, 125, 150 ó 200.*
- *Realiza una representación gráfica de los beneficios en función de los coches fabricados.*
- *Indica cuántos coches es posible fabricar.*
- *¿Entre qué valores pueden variar los beneficios obtenidos?*
- *Indica, dependiendo de los coches fabricados, cuándo los beneficios crecen o decrecen.*
- *¿Cuántos coches deben fabricarse para que el beneficio sea el máximo posible?*
- *¿Cuándo el beneficio será el más bajo posible?*
- *¿En algún momento se produce un salto significativo en los beneficios?*
- *¿Qué ocurriría con los beneficios si se fabricase un número ilimitado de coches?*

A partir de las respuestas realiza una interpretación que pueda ayudar a la empresa en sus decisiones y exponles el trabajo realizado de una forma clara que puedan entender.

¡ÁNIMO EN ESTE NUEVO RETO!

Para 4º ESO:

a) Para trabajar la resolución de triángulos:

El ejército del aire ha detectado un objeto volante no identificado situado a una determinada altura sobre la recta que une dos localidades de nuestra provincia: Matalebreras y Villaciervos. Sin embargo dicho objeto ha conseguido salvar todos los controles de sus dispositivos tecnológicos y no consiguen saber a qué altura se encuentra exactamente. El único dato que manejan es que desde Villaciervos se divisa dicho objeto bajo un ángulo de 70° y desde Matalebreras bajo un ángulo de 40°, ángulos medidos sobre la recta que une dichas localidades.

Al estar acostumbrados a manejar los medios tecnológicos los técnicos del ejército del aire no son capaces de obtener manualmente la altura a la que se encuentra el OVNI, ni sobre qué punto se encuentra. Además, en caso de que la altura sea inferior a 5.000 metros deberán declarar el estado de alarma, motivo por el cual deberán obtener estos datos a la mayor brevedad posible.

*Conscientes de que los alumnos de 4º de ESO del colegio nuestra Señora del Pilar han demostrado un alto nivel en la resolución de problemas, han solicitado su ayuda, pidiendo permiso al director del centro a través de un FAX, solicitando urgentemente los datos que precisan: **Altura a la que se encuentra el OVNI y punto exacto sobre el que está situado**, indicando claramente el resultado sobre un mapa de la provincia.*

*Además, dado que existe la posibilidad de que este problema se vuelva a repetir, también han solicitado un **listado con todos los conceptos y fórmulas trigonométricas** necesarias para resolver este tipo de situaciones. Dicho listado debe elaborarse de tal forma que resulte claro y atractivo, pudiendo realizarse tanto sobre papel o cartulina como en soporte digital, haciendo especial énfasis en las fórmulas trigonométricas asociadas a los triángulos, tanto triángulos rectángulos como de otro tipo.*

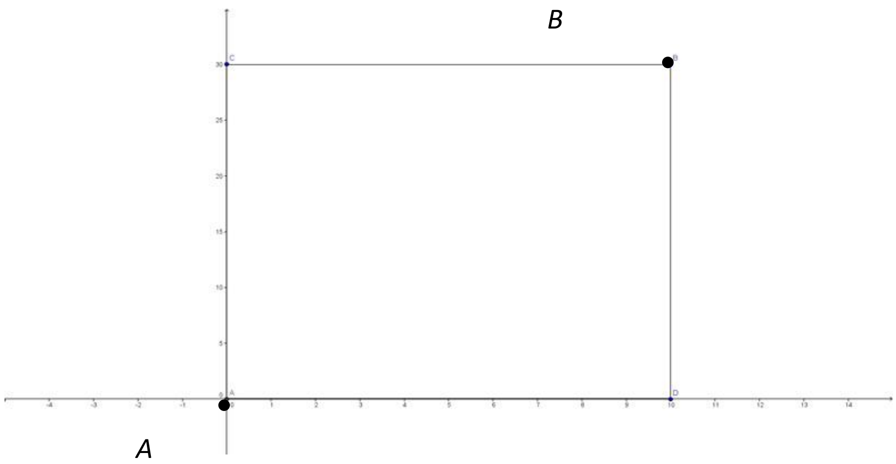
Finalmente todos los materiales generados habrán de presentarse y exponerse de forma clara, junto con los datos solicitados relativos a la posición del OVNI, a los altos mandos del ejército para su conocimiento.

¡Muchísima suerte en esta peligrosa misión! El futuro de nuestra provincia y, posiblemente, de la humanidad está en vuestras manos.

b) Para trabajar la continuidad de funciones:

Un conocido constructor necesita montar una instalación eléctrica subterránea para una nave de superficie rectangular que servirá, en un futuro, para instalar maquinaria de montaje de electrodomésticos.

Dicha instalación debe contar con un cableado que conecte dos puntos A y B, situados en dos vértices opuestos de la nave. Considerando el suelo de la nave como el plano de coordenadas cuyo origen está situado en el punto A, el punto B tendrá coordenadas (10, 30) tal y como muestra el siguiente dibujo:



Para poder montar dicha línea eléctrica cuenta con la oferta de tres empresas diferentes, SINGLE ELECTRIC, ELECTRIC´S KING y THE BEST ELECTRIC. Cada una de estas empresas le ha ofrecido el mismo precio, pero con un diseño diferente:

La empresa SINGLE ELECTRIC le ofrece un diseño según la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 9x - x^2 & 0 \leq x \leq 5 \\ 3x & 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

La empresa ELECTRIC´S KING un diseño según la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 5x & 0 \leq x < 3 \\ x^2 - 10x + 36 & 3 \leq x \leq 7 \\ 5x - 20 & 7 < x \leq 10 \end{cases}$$

Y por último, la empresa THE BEST ELECTRIC se lo ofrece a través de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 4 \\ \dfrac{85 - 10x}{3} & 4 \leq x \leq 7 \\ \dfrac{25x - 160}{3} & 7 < x \leq 10 \end{cases}$$

El constructor sabe que para que dicha línea eléctrica funcione no debe haber ningún corte (salto) en el diseño, pero sus nociones matemáticas sobre funciones continuas son escasas. Como no quiere que le engañen y desea elegir bien la empresa te solicita ayuda, ya que considera que tienes un buen nivel en lo referente a la continuidad de funciones.

Para prestarle ayuda debes hacer lo siguiente:

- *Realizar un resumen de los conceptos relacionados con la continuidad de funciones, incluyendo los tipos de discontinuidad.*
- *Indicar de forma razonada qué empresa o empresas debe seleccionar, teniendo en cuenta que el diseño no puede tener cortes. Debes realizar el razonamiento matemático correspondiente, haciendo uso del estudio de la continuidad de las 3 funciones.*
- *Expresar la relación que existe entre este problema de elegir la empresa o las empresas adecuadas y los conceptos de límites y continuidad.*

¡Ánimo en esta difícil tarea de asesorar al constructor!

c) Para trabajar la probabilidad condicionada:

En ocasiones las apariencias engañan. Son numerosos los juegos de azar en los que aparentemente es fácil ganar y, sin embargo, la realidad es otra, no siendo nada intuitivo encontrar la mejor estrategia para llevarse el premio.

Los conocimientos de Combinatoria y de las Técnicas de Recuento ayudan a descubrir las escasas posibilidades que existen de obtener un premio en algunos juegos de azar, pero esto no es suficiente.

El otro día un grupo de amigos no eran capaces de entender el razonamiento realizado por uno de los protagonistas de la película "21 Black Jack" en una de las escenas.

En dicha escena de la película el profesor de matemáticas (Kevin Spacey) le presenta a uno de sus alumnos la siguiente situación: Se encuentra en un concurso en la que debe escoger entre tres puertas (1,2 y 3). En dos de ellas hay una cabra, sin embargo en una de las 3 hay un flamante coche nuevo. El alumno responde qué puerta quiere abrir. El presentador, conocedor de lo que hay detrás de cada puerta decide abrir otra puerta diferente mostrando detrás de ella una cabra. El profesor se dirige al alumno y le pregunta, ¿cambiarías la puerta o te quedarías con la puerta que tienes? Muchos de nosotros cambiaríamos de puerta pensando que es una treta del presentador para engañarnos.

Ante esa situación el alumno razona el por qué cambiaría de puerta sin embargo, a simple vista, no resulta fácil entender la explicación.

Puedes ver la escena a través del siguiente enlace:

http://www.youtube.com/watch?v=SUMWnh6-XEg

En realidad, se trata de una famosa paradoja conocida como Paradoja de Monty Hall, que toma su nombre de un célebre concurso televisivo de los años 50 en EEUU. Este problema ha tenido hueco en más creaciones dentro del mundo del cine, literatura y TV. Esta paradoja puede encontrarse también en un episodio de la serie Numbers, o en el libro "El curioso incidente del perro a media noche"

Bueno, volviendo al dilema que ahora tiene el grupo de amigos que no comprenden la escena de la película. ¡Necesitan tu ayuda! Son conocedores de tu excelente nivel en el conocimiento de las Técnicas de Recuento y saben de tu enorme facilidad para la investigación y de tus cualidades para la comunicación. Necesitan de tu intervención para conseguir comprender el problema.

Para poder explicarles la solución debes hacer uso de alguno de los siguientes formatos, edición de video explicativo, escenificación, redacción ó presentación de Power Point con exposición oral. Pero, en cualquiera de los casos la explicación debe apoyarse en un razonamiento matemático en términos probabilísticos del *cual dejes constancia por escrito. Precisamente el cálculo probabilístico razonado es el que te va a permitir dar con la solución.*

¡Ánimo, investiga, y demuestra tus excelentes dotes didácticas! Ah, y no te olvides, EN EQUIPO ES MÁS FÁCIL. Realiza el trabajo junto a dos compañeros más. Ya sabes cómo funciona el trabajo cooperativo y cómo deben distribuirse los roles.

PLANIFICANDO NUESTRO PRIMER PBL.

Para terminar el taller se pide a cada participante que programe su primer PBL, que después pondrá en común con su grupo. Para facilitar la programación del mismo pueden ayudar las siguientes indicaciones:

Empieza por la pasión:

- Comienza con una idea motivadora: Tu pasión, lo que te moviliza.
- Busca inspiración en las siguientes preguntas:
    - ¿Cuáles son las aplicaciones más prácticas de tu asignatura?
    - ¿Dónde descubres estas aplicaciones en el mundo que te rodea?
    - ¿Qué te llevó a hacer estos estudios?
    - ¿Qué es lo que más te gusta de tu asignatura?
- Inspírate en los comentarios de los alumnos sobre lo que les gusta de tu materia.
- Tus compañeros de departamento pueden ayudarte a encender la chispa.
- Puedes motivarte pensando en el producto final o en un desafío.
- Sal a la calle, da un paseo, visita un museo, mira una película, escucha música,…

Conecta tu pasión con el curriculum:

- Esta idea, ¿en qué competencias, objetivos y contenidos del currículo aparece con mayor claridad?
- Toma tu currículo y elige los objetivos, contenidos que quieras trabajar en relación a tu idea.
- Pregúntate:
    - ¿Qué quiero que los alumnos investiguen y comprendan?
    - ¿Qué temas servirán de hilos conductores?
    - ¿Cómo se demuestra que los alumnos han comprendido?
- Formula el título que guiará el proyecto, en una sola frase. Prueba con algo directo, descriptivo pero con encanto.

Inventa el desafío y un producto:

- Piensa en la introducción. ¿Cómo será la historia que presentarás a tus alumnos?
- Piensa en una pregunta central que sea motivadora y que no se pueda “googlear”.
- Trata de que tenga sentido la relación entre el desafío y el currículo y que el desafío permita llegar a comprender el currículo.
- Imagina el producto final que presentarás.
- Piensa en las características de la presentación pública.

Comparte el proyecto con tus compañeros:

- Somete tus ideas a las críticas de tus compañeros de claustro.
- Aprovechar la puesta en común para remodelar el proyecto.

Completa la plantilla de presentación, recogiendo los siguientes puntos:

- Materia y nivel.
- Enunciado y descripción del problema.
- Metodología de trabajo.
- Recursos.
- Presentación de las soluciones.
- Criterios de evaluación.
- Objetivos de aprendizaje.
- Temporalización.

Finalmente, tras la elaboración del PBL por parte de cada participante, se realiza una puesta en común que permita presentar algunas de las ideas propuestas y enriquecer la presentación de las mismas.

Para terminar se anima a los participantes a finalizar su PBL y experimentarlo en el aula.

Para hacer referencia al artículo:

Abellón, O. (2015). Taller de PBL (Problem Based Learning) en Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 133-150). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

TALLER DE APRENDIZAJE COOPERATIVO

Raquel Alario Gavilán[a], Paloma Gavilán Bouzas[b]

[a]Colegio Maristas Champagnat, [b]E.A.H.D. Guadalajara

Resumen

En el taller vamos a experimentar el trabajo cooperativo y vamos conocer algunas técnicas y dinámicas de aprendizaje cooperativo que podremos llevar posteriormente al aula. Se trata de una vivencia en directo de las claves que hacen que el aprendizaje cooperativo funcione y una forma práctica de aprender nuevas dinámicas.

Palabras clave: *taller cooperativo, claves de funcionamiento, vivencia cooperativa, dinámicas cooperativas*.

INTRODUCCIÓN.

Como hemos visto en la ponencia, podemos estructurar nuestras clases de manera que los estudiantes trabajen de forma individual, competitiva o cooperativa. Lo más frecuente en nuestro país es el modelo de trabajo individual, sobre todo en secundaria. Basta con mirar la distribución de la mayoría de las aulas de un centro escolar para darse cuenta de ello: mesas ordenadas por filas y columnas; con ver la distribución del aula podemos averiguar qué tipo de trabajo se realiza en ella. En primaria y, sobre todo, en infantil es más común ver las mesas agrupadas aunque eso tampoco asegura que estén trabajando cooperativamente. Pueden estar trabajando en grupo, pero sin cooperar. Las claves que nos indican si se está trabajando cooperativamente o no son, como hemos visto, la interdependencia positiva, la interacción cooperativa, la doble responsabilidad, la puesta en práctica de habilidades sociales y la revisión del funcionamiento de los grupos.

EL TALLER.

Cuando, como profesores, nos iniciamos en el aprendizaje cooperativo sentimos en ocasiones inseguridad ante un método de enseñanza distinto del que hemos trabajado hasta ahora y distinto del que hemos vivido como estudiantes. Por eso es conveniente formarnos bien antes de empezar. No parece aconsejable llegar mañana al aula y poner a los estudiantes a hacer aprendizaje cooperativo sin haber reflexionado previamente sobre cómo vamos a formar los grupos, cuántos estudiantes va a tener cada grupo, cómo se van a distribuir en el aula, cuáles van a ser las normas de la clase, qué habilidades sociales vamos a trabajar y cómo, qué tipo de tareas vamos a realizar y cómo, cuál va a ser nuestro registro de observación, cómo vamos a calificar… En fin, una serie de decisiones que son previas a empezar. No es prudente lanzar a los estudiantes a la piscina si antes no hemos puesto agua en ella.

Pero entre ese extremo y no empezar nunca porque no nos encontramos suficientemente preparados hay puntos intermedios interesantes. Podemos empezar con una estructura básicamente individual en la que los estudiantes practican ocasionalmente dinámicas cooperativas por parejas o grupos pequeños y más adelante ir cambiando a una estructura cooperativa donde trabajamos con distintas técnicas más estructuradas, como puede ser la técnica de los grupos base y los grupos de trabajo (Alario, Gavilán, 2013). En el taller veremos tanto dinámicas cortas como técnicas más estructuradas.

Primeramente, vamos a experimentar lo que es el aprendizaje cooperativo a través de una tarea cooperativa que reúne todas las claves expuestas anteriormente. Analizaremos, mediante de esa experiencia, los elementos básicos del aprendizaje cooperativo. Posteriormente, practicaremos una técnica llamada rompecabezas a través de la cual conoceremos distintas dinámicas para el aula. Hemos dado el nombre de taller CREAS, que son las iniciales de los grupos en que hemos organizado esas dinámicas:

- Dinámicas para favorecer el Consenso.
- Dinámicas para fomentar la Responsabilidad individual y grupal.
- Dinámicas para la Enseñanza recíproca.
- Dinámicas para potenciar las Aportaciones de todos.
- Dinámicas para la Socialización.

La experiencia del taller nos va a permitir acercarnos de un modo mucho más práctico al aprendizaje cooperativo y vivenciar aspectos básicos para que funcione, así como conocer dinámicas y técnicas cooperativas.

Referencias.

Alario, R; Gavilán, P (2013). Grupos cooperativos para la mejora del aprendizaje individual. En P. Membiela, N. Casado y M. I. Cebreiros (Eds). *Experiencias de investigación e innovación en la enseñanza de las ciencias*. Ourense. Educación Editora.

Para hacer referencia al artículo:

Alario R. y Gavilán P. (2015). Taller de aprendizaje cooperativo. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 151-152). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

GEOGEBRA, UN PUNTO DE PARTIDA…

José Manuel Arranz San José[a], Rubén Jiménez Jiménez[b]

[a]IES “Europa” (Ponferrada), [b]IES José Luis L. Aranguren (Ávila)

[a,b] Instituto Geogebra de Castilla y León

Resumen

GeoGebra es un programa dinámico para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas que combina elementos de Geometría, Álgebra, Cálculo, Aritmética, Estadística y Probabilidad.

En los últimos años, GeoGebra se ha convertido en el programa de geometría dinámica (y, cada vez más, de matemáticas, en general) de mayor aceptación entre el profesorado de matemáticas, por su calidad, versatilidad, carácter abierto y gratuito y por la existencia de una amplísima comunidad de usuarios dispuestos a compartir experiencias y materiales educativos realizados con GeoGebra.

El objetivo de este taller es dar a conocer GeoGebra a los profesores de Castilla y León mediante ejercicios sencillos que permitan a los docentes conocer esta excelente herramienta para mejorar las matemáticas del siglo XXI.

Palabras clave: *GeoGebra, geometría, matemáticas, taller.*

GeoGebra es un software libre para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas que combina elementos de Álgebra, Geometría, Estadística, Aritmética, Análisis y Probabilidad.

Fue creado por Markus Hohenwarter en el año 2001 y actualmente es uno de los software que más aceptación está teniendo entre profesores y estudiantes de Matemáticas. Su curva de aprendizaje es muy rápida; en pocos minutos cualquier profesor o estudiante está trabajando con soltura en GeoGebra.

A la calidad del programa se une la ingente comunidad de usuarios de GeoGebra en el mundo que crean materiales, imparten cursos y resuelven dudas en los foros de la web oficial, www.geogebra.org. En el repositorio de materiales de GeoGebra, GeoGebratube, hay miles de actividades ya diseñadas y listas para usar en el aula y que se pueden insertar en blogs, páginas web o aulas de aprendizaje como moodle.

Vamos a ver algunos ejemplos de cómo se puede trabajar con GeoGebra distintos campos de la Matemática.

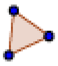
GEOMETRÍA

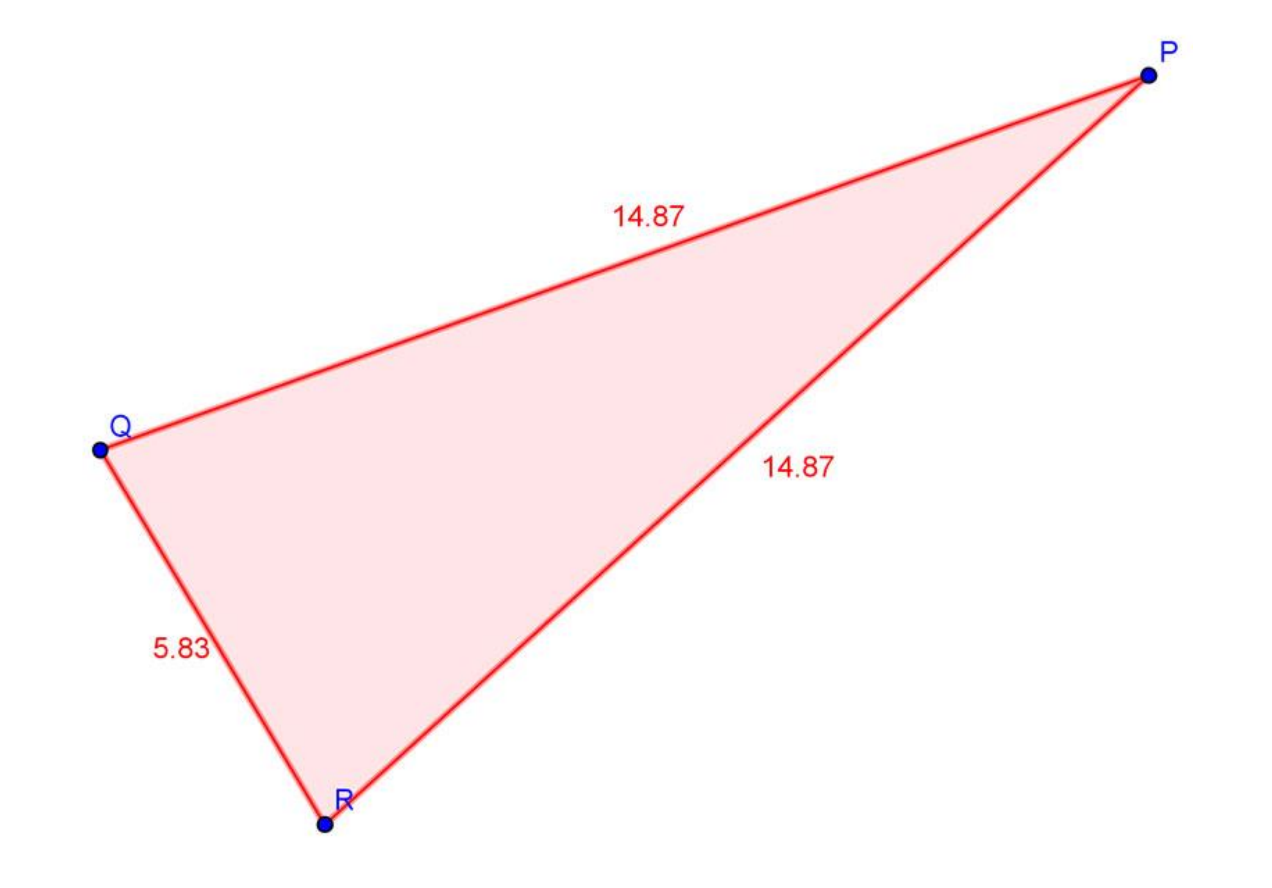
La palabra clave que define a GeoGebra es “dinámica”, GeoGebra hace geometría dinámica. Esto, ¿qué significa? Pues significa que con GeoGebra no sólo realizamos dibujos estáticos; podemos cambiar las condiciones iniciales y comprobar ciertas propiedades. Por ejemplo, podemos dibujar un triángulo cualquiera, dibujar sus tres alturas y comprobar que se cortan en un punto. En el papel nos quedaríamos así pero con GeoGebra podemos mover los vértices del triángulo y comprar que pongamos donde pongamos los vértices las tres alturas se cortan en un punto.

Vamos a realizar una serie de ejercicios de geometría con GeoGebra.

1.

Los puntos de coordenadas $P=(3,8)$, $Q=(-11,3)$ y $R=(-8,2)$ son vértices de un triángulo. Comprueba que el triángulo es isósceles y calcula su área.

	En la barra de entrada escribe $P=(3,8)$
	En la barra de entrada escribe $Q=(-11,3)$
	En la barra de entrada escribe $R=(-8,2)$
	Si no ves los puntos, haz zoom y/0 desplaza la vista gráfica.
	Elige la herramienta Polígono y pincha sobre los puntos P, Q, R y termina pinchando en el vértice inicial P.
	Con el botón derecho pinchamos en propiedades, seleccionamos los tres segmentos y en la pestaña básico seleccionamos *Mostrar Etiqueta->Valor*
	Modifica las propiedades del triángulo: color, sombreado, etc. Oculta los ejes y la cuadrícula si estuvieran visibles.



Alternativamente se puede crear el triángulo directamente escribiendo en la barra de entrada *Polígono[(3,8),(-11,3),(-8,2)]* y en un paso se crean los puntos y el triángulo.

2.

Realiza los siguientes pasos:

a. Construye un cuadrilátero ABCD.

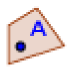
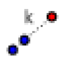
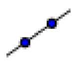
b. Amplíalo a 2,5 veces su tamaño

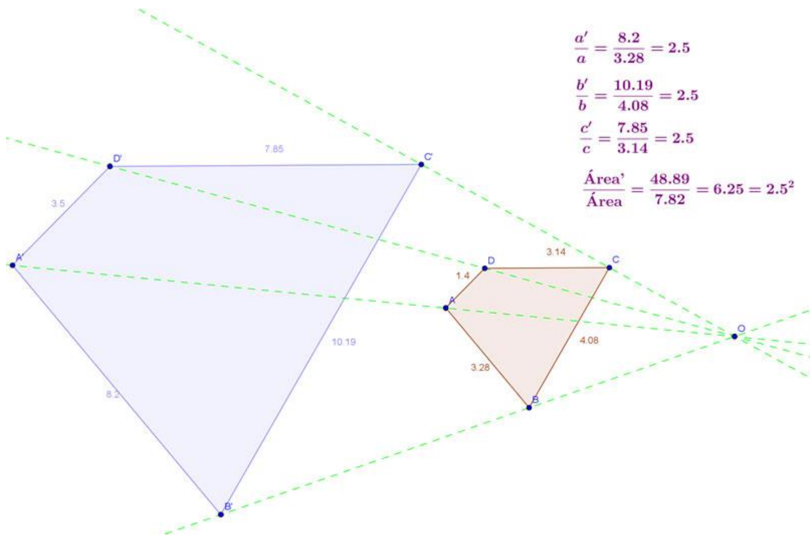
c. Nombra los nuevos vértices A’B’C’D’ y el centro de la homotecia O.

d. Traza las rectas que pasan por el origen de la homotecia y cada uno de los vértices del cuadrilátero original.

e. Modifica las rectas para que sean de color verde y punteadas.

f. Mueve el cuadrilátero original, cámbialo de forma. ¿Puedes mover el resultado de la homotecia?

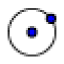
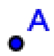
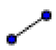
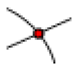
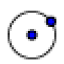
	Con la herramienta Polígono construimos el cuadrilátero haciendo clic en cuatro puntos de la vista gráfica y terminando en el punto inicial
	Elegimos la herramienta Homotecia. Hacemos clic en el cuadrilátero, después en un punto de la vista gráfica (que será el centro de la homotecia) y nos pedirá el factor de escala y ahí escribimos 2.5
	Si no vemos los dos cuadriláteros hacemos zoom hasta que veamos toda la construcción en la vista gráfica.
	Para cambiar el nombre a los vértices, hacemos clic encima de cada vértice con el botón derecho, propiedades, en la pestaña básico, cambiamos el nombre.
	Elegimos la herramienta recta y hacemos clic en los puntos A y A’, B y B’, C y C’. Observa que todas las rectas concurren en el centro de la homotecia, O.
	Sobre cualquier recta hacemos clic en el botón derecho, propiedades. En la parte izquierda seleccionamos las cuatro rectas (MAY+CLIC o CTRL+CLIC) y en las pestañas color y estilo, cambiamos a color verde y el estilo punteado.
	Mueve el cuadrilátero original y observa como la construcción se actualiza

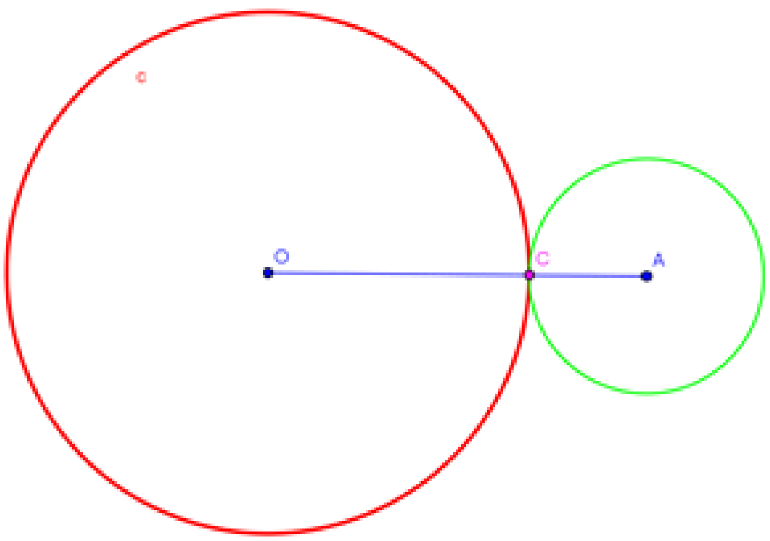


Puedes completar esta actividad mostrando las longitudes de los lados de cada cuadrilátero, las áreas y comprobando que la razón entre cada lado es 2.5 y entre las áreas 2.5^2

3.

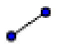
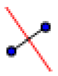
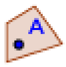
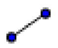
Dada una circunferencia, c, y un punto exterior a ella, A, traza una circunferencia que tenga por centro el punto A y sea tangente a c.

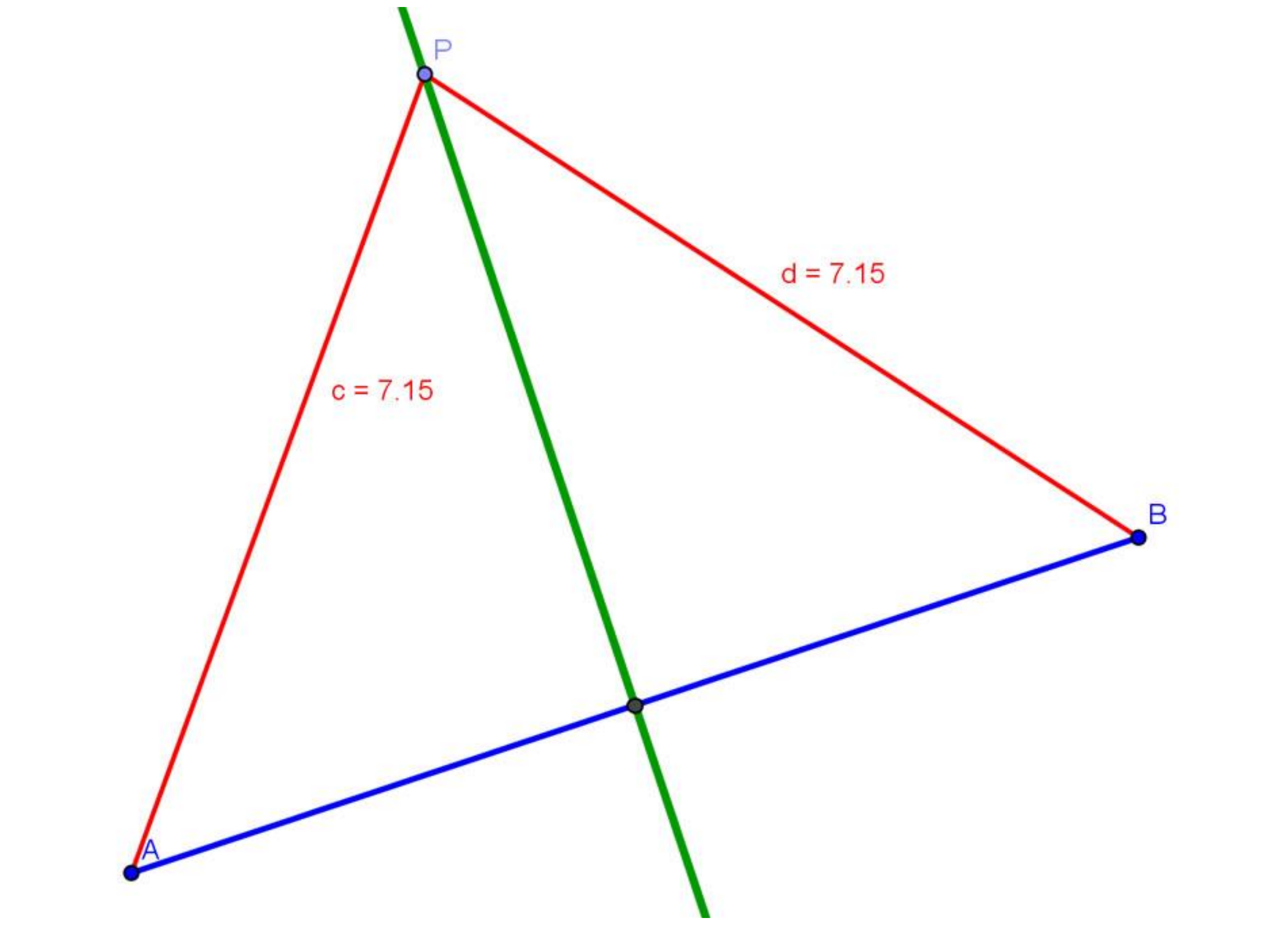
	Construimos una circunferencia pinchando en un punto, que será el centro y en otro punto que será un punto perteneciente a la circunferencia.
	Sobre el centro, botón derecho, propiedades, en la pestaña básico, cambiamos el nombre por O,
	Con la herramienta Punto, hacemos clic en un punto de la vista gráfica exterior a la circunferencia *c*.
	Con la herramienta Segmento, creamos un segmento que una el centro de la circunferencia c, O, y A.
	Con la herramienta Intersección, hallamos la intersección de la circunferencia *c* y el segmento creado en el apartado anterior, que llamaremos *C*.
	Con la herramienta Circunferencia (centro, punto) creamos la circunferencia de centro A y que pasa por *C*. Llamamos *d* a esta circunferencia.
	Modifica el grosor de las circunferencias, los colores, y oculta los elementos que no se necesiten.
	Si movemos la circunferencia c o la cambiamos de tamaño, podemos observar que la circunferencia *d* sigue siendo tangente.



4.

Construye la mediatriz de un segmento. Dibuja un punto cualquiera de la mediatriz y halla su distancia a los extremos del segmento. Mueve el punto sobre la mediatriz y comprueba que la distancia es siempre la misma.

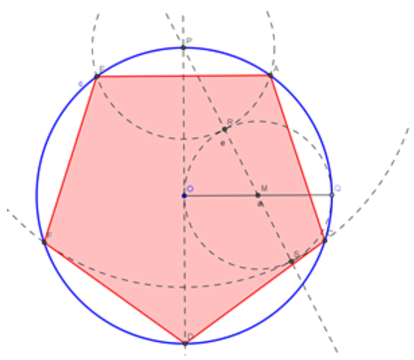
	Con la herramienta *Segmento*, construimos un segmento de extremos A y B.
	Con la herramienta *Mediatriz*, pinchamos en el segmento *a*.
	Con la herramienta *Punto en objeto*, dibujamos un punto, que llamaremos P, sobre la mediatriz. Mueve el punto P y observa que sólo se mueve a lo largo de la mediatriz.
	De nuevo, con la herramienta segmento, dibujamos dos segmentos que unan el punto P con los puntos A y B.
	Con el botón derecho del ratón, en propiedades, seleccionamos los dos segmentos, en la pestaña *básico*, en mostrar etiqueta, le decimos que sólo muestre el valor. Observa que al mover el punto P, la longitud de los segmentos PA y PB es igual.



5.

Construye con regla y compás un pentágono regular.

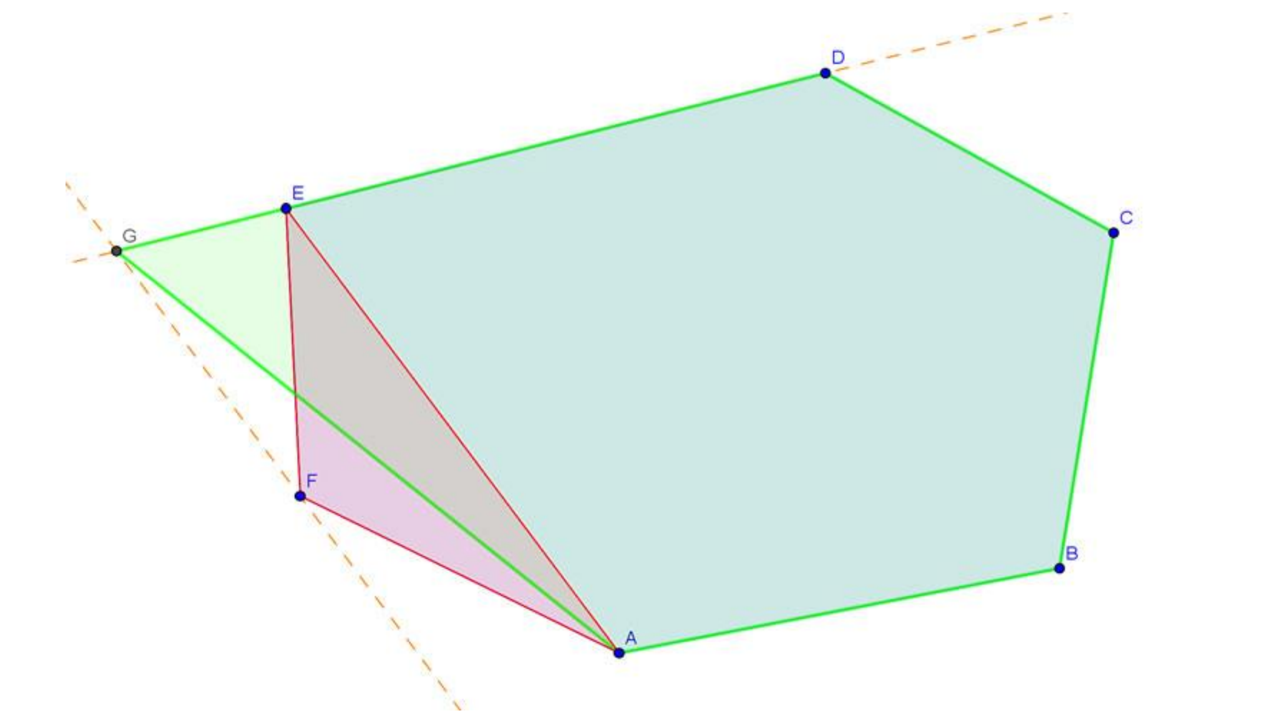
	Dibujamos una circunferencia, *c*. Le cambiamos a color azul y aumentamos su grosor. Será la circunferencia donde estará adscrito el pentágono. Al centro de la circunferencia le llamamos O,
	Dibujamos un punto Q sobre la circunferencia *c*.
	Trazamos el segmento *OQ*.
	Trazamos una recta, *b*, perpendicular al segmento *OQ* y que pase por el centro de la circunferencia *O*.
	Hallamos la intersección de la recta *b* con la circunferencia *c*. Lo llamamos *P*.
	Determinamos el punto medio, *M*, del segmento *OQ*.
	Trazamos la recta *PM*.
	Con centro en *M* trazamos la circunferencia que pase por *O*. Llamemos *e* a esta circunferencia.
	Hallamos las intersecciones de la recta *PM* con la circunferencia *e*. Llamamos *R* y *S* a estos puntos.
	Las circunferencias de centro en P y que pasan por R y S determinan los vértices del pentágono regular.
	Dibujamos las intersecciones anteriores.
	Con la herramienta Polígono, unimos los puntos anteriores y obtenemos el pentágono regular.
	Cambia las propiedades de los objetos para que se vea más clara la construcción (punteados, con menor grosor, etc.).



6.

A partir de un polígono cualquiera construye un nuevo polígono de un lado menos y cuya área sea igual a la del polígono inicial.

	Ocultamos los ejes y la cuadrícula si es que están visibles.
	Con la herramienta *Polígono* creamos un polígono cualquiera, por ejemplo, de lado 6. Mostramos la etiqueta de los vértices *A, B, C, D, E* y *F*.
	Con la misma herramienta Polígono consideramos el triángulo *AEF*.
	Con la herramienta *Recta que pasa por dos puntos*, prolongamos el lado *DE*.
	Con la herramienta *Paralela* trazamos una recta paralela al lado *AE* que pase por *F*.
	Con la herramienta *Intersección* hallamos la intersección de la recta paralela del paso anterior con la prolongación del lado *DE*. Llamamos *G* a ese punto.
	Los triángulos AEF y AEG tienen la misma área porque tienen las mismas base y altura.
	El polígono que buscamos tiene por vértices *A, B, C, D* y *G*.
	Modifica colores y grosores para que se vea bien la construcción.

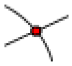


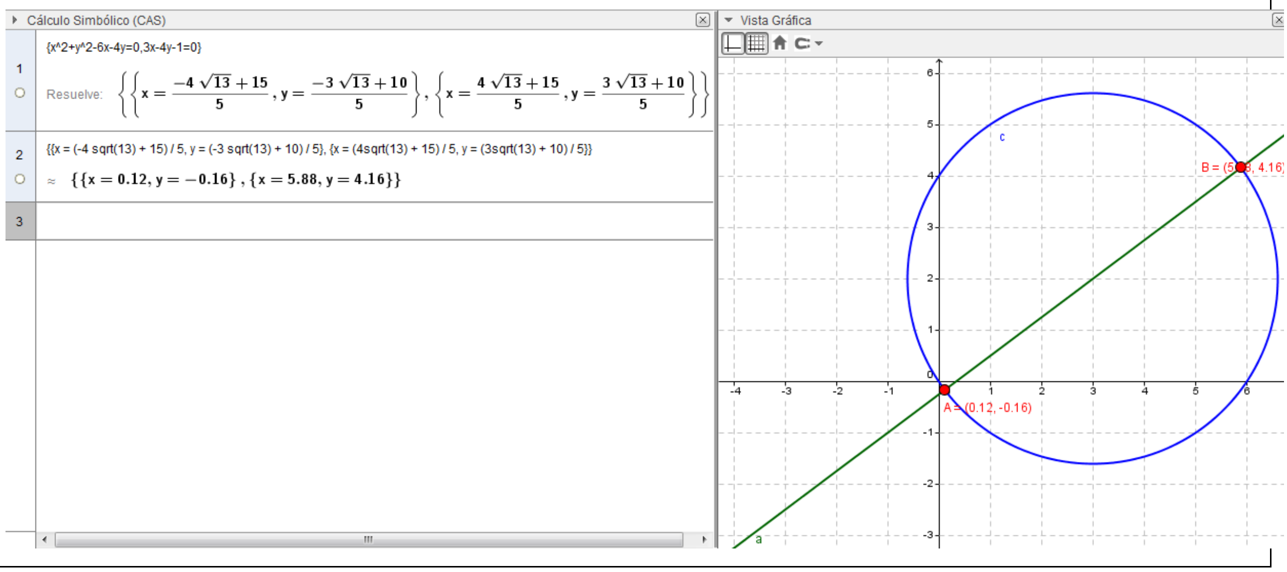
ÁLGEBRA

7.

Halla la posición relativa (y los posibles puntos de corte) de la circunferencia $x^2+y^2-6x-4y=0$ y la recta $3x-4y-1=0$ o lo que es lo mismo, resuelve gráficamente el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x-4y=0 \\ 3x-4y-1=0 \end{cases}$$

	Escribimos en la barra de entrada la expresión de la circunferencia x^2+y^2-6x-4y=0 y la de la recta 3x-4y-1=0
	Con la herramienta *Intersección* hacemos clic sobre las intersecciones de la recta y la circunferencia y nos creará los puntos A y B.
	Con el botón derecho, propiedades, modificamos los colores, grosores, estilo, etc., para que se vean las coordenadas de la intersección.
X=	También se puede resolver el sistema en la vista CAS escribiendo {x^2+y^2-6x-4y=0,3x-4y-1=0} y dando al botón indicado en la celda izquierda.



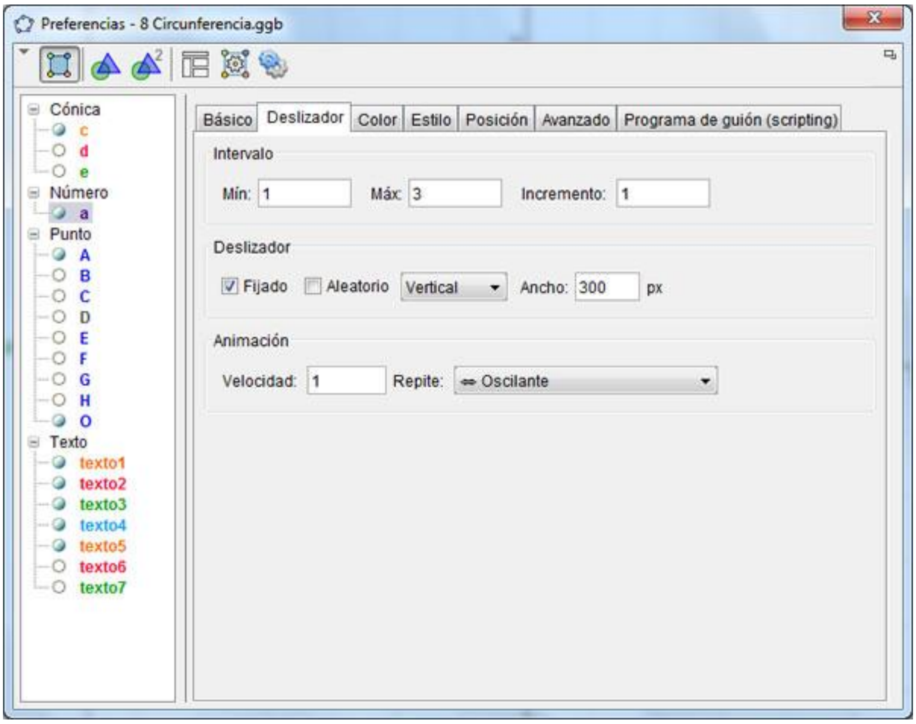
8.

Vamos a realizar esta sencilla actividad, pero vamos a combinar las dos vistas gráficas de las que dispone GeoGebra y el uso de deslizadores. El ejercicio consiste en:

Halla la ecuación de la circunferencia, en los siguientes casos:

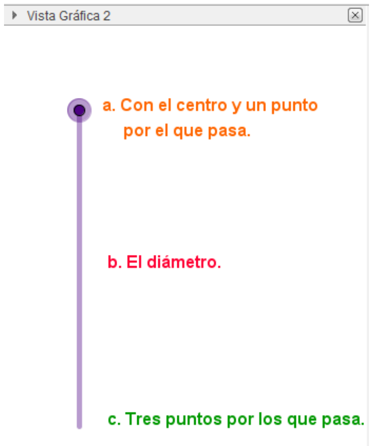
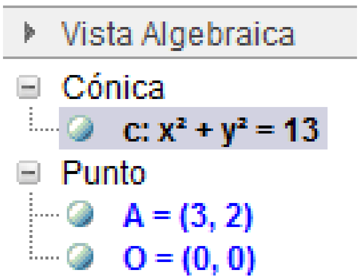
- Pasa por el punto $(3,2)$ y tiene su centro en el origen de coordenadas.
- Su diámetro es el segmento de extremos $(2,3)$ y $(-2,-3)$.
- Pasa por los puntos $P(0,-3)$, $Q(5,3)$ y $R(-3,5)$.

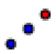
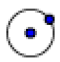
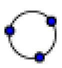
<table>
<tr><td></td><td>En el menú vista, activamos Vista Gráfica 2, o bien, la combinación de teclas Ctrl+Mayús+2. Colocamos la vista gráfica 2 a la izquierda de la vista gráfica 1 pinchando en el título de la vista gráfica y arrastrando.</td></tr>
<tr><td>a = 2</td><td>Creamos un deslizador en la Vista Gráfica 2 con las propiedades que se ven en la imagen:

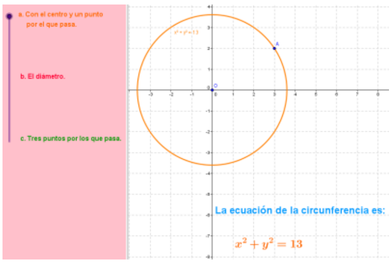


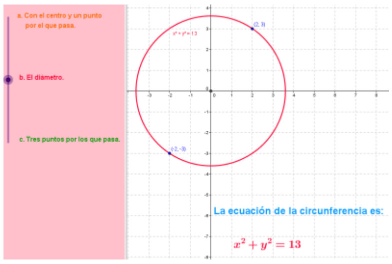
El deslizador lo utilizaremos para mostrar cada uno de los apartados de este ejercicio.

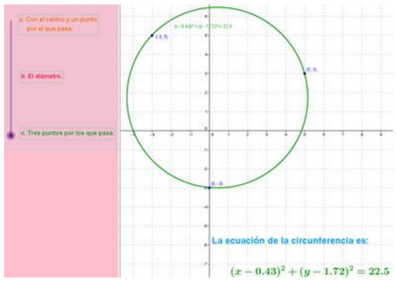
El deslizador *a*, tomará tres valores: 1, 2 y 3.</td></tr>
<tr><td>ABC</td><td>Para el apartado a) escribimos un texto junto al deslizador a la altura del deslizador que toma por valor 1 y escribimos el texto “a. Con el centro y punto por el que pasa”. En las propiedades del texto le ponemos negrita, tamaño grande y color naranja.</td></tr>
<tr><td>ABC</td><td>Igualmente escribimos el texto “b. El diámetro” a la altura del deslizador que toma el valor 2. En las propiedades del texto le ponemos negrita, tamaño grande y color rojo.</td></tr>
</table>

ABC	Por último escribimos el texto del apartado c): “c. Tres puntos por los que pasa”. En las propiedades del texto le ponemos negrita, tamaño grande y color verde. Debe quedar algo parecido a esto. 
	Vamos a por el apartado a). Mostramos en la vista gráfica 1, los ejes y la cuadrícula.
	Escribimos en la barra de entrada $O=(0,0)$ y pulsamos Enter.
	Escribimos en la barra de entrada $A=(3,2)$ y pulsamos Enter.
	Con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* pinchando primero en O (centro) y después en A (punto por el que pasa la circunferencia). En las propiedades de la circunferencia la aumentamos el grosor y la pintamos de naranja.
	En la vista algebraica vemos la ecuación de la circunferencia  Ya tenemos la ecuación de la circunferencia que nos pedían, pero nosotros vamos a escribir un texto en la Vista Gráfica con la ecuación de la circunferencia.
ABC	Con la herramienta Texto escribimos La ecuación de la circunferencia es: En las propiedades de este objeto le ponemos negrita, tamaño grande y color azul claro.
A	Creamos un punto H=(1,-7) que nos servirá para situar los textos de las ecuaciones de las circunferencias.
	Con la herramienta Texto seleccionada, pinchamos en cualquier punto de la Vista Gráfica 1 y nos saldrá una ventana emergente para escribir nuestro texto.

	- Marcamos la casilla *Fórmula Látex* porque lo que va a aparecer es una ecuación matemática y el texto parecerá más profesional. - Hacemos clic en el botón Objetos y elegimos el objeto c, en espacio Edita nos aparecerá *c* en un cuadrado y en la ventana *Vista Previa* nos aparecerá la ecuación de la circunferencia *c*. - Le damos a Ok y finalizamos la creación del texto. En principio el texto lo habíamos puesto en cualquier lugar de la vista gráfica 1, ahora vamos a situarlo debajo del texto de la ecuación. Para ello pinchamos con el botón derecho sobre el texto y vamos a propiedades. - En la pestaña texto elegimos tamaño grande y en negrita. - En la pestaña color, le ponemos naranja (el mismo que el texto de este apartado que pusimos junto al deslizador). - En la pestaña Posición, elegimos como punto de origen H.
	Ahora lo que vamos a hacer es que sólo se muestre esta construcción cuando esté seleccionado en la Vista Gráfica 2 el apartado a, es decir, cuando el deslizador *a* toma el valor 3.
	Pinchamos en cualquier punto de la vista gráfica y damos a propiedades. En la parte izquierda seleccionamos: la circunferencia C, los puntos O y A y el texto que nos muestra la ecuación. Cuando esté seleccionado todo (también podemos hacerlo de uno en uno) vamos a la pestaña *Avanzado* y en condición para mostrar objeto escribimos $a=3$ y le damos a enter para que GeoGeogebra coja esta orden.
	Para el apartado b), primero dibujamos los dos puntos $(2,3)$ y $(-2,-3)$.
	Con la herramienta punto medio hallamos el punto medio de este segmento.
	Con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* pinchando primero en el punto medio del segmento y después en uno de los extremos del segmento (punto por el que pasa la circunferencia). Propiedades, la aumentamos el grosor y la pintamos de color rojo.
	Para que sólo se muestre este ejercicio hacemos igual que en el apartado a) pero pondremos la condición que todos los objetos de este apartado se muestren cuando $a=2$
	Para el apartado c) dibujamos los tres puntos.
	Con la herramienta *Circunferencia tres puntos* hacemos clic en los tres puntos y obtenemos la circunferencia pedida. En propiedades la aumentamos el grosor y la ponemos de color verde.
	Ponemos la condición que sólo se muestre cuando $a=1$



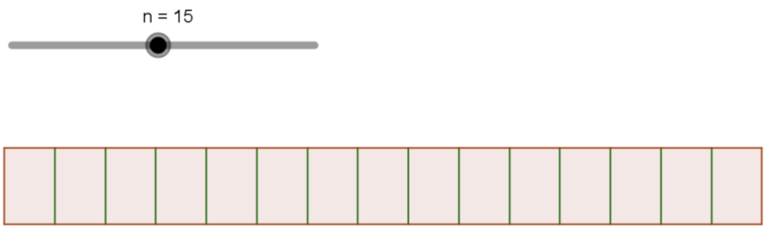




9. Secuencias

Vamos a dividir un rectángulo de ancho 10 cm y de alto 1 cm en *n* partes iguales, donde *n* lo va a marcar un deslizador.

	Ocultamos los ejes y la cuadrícula si estuvieran visibles
	Escribimos en la barra de entrada *Polígono[(0,1), (0,0), (10,0), (10,1)]*
	Sobre el polígono, botón derecho, propiedades, selecciona todos los segmentos y oculta la etiqueta.
	Creamos un deslizador que llamaremos *n* con valor mínimo 1, valor máximo 30, e incremento 1.
	Las divisiones son segmentos verticales. Utilizamos el comando secuencia: *Secuencia[Segmento[(10i/n,0),(10i/n,1)], i, 1, n-1]*



ESTADÍSTICA

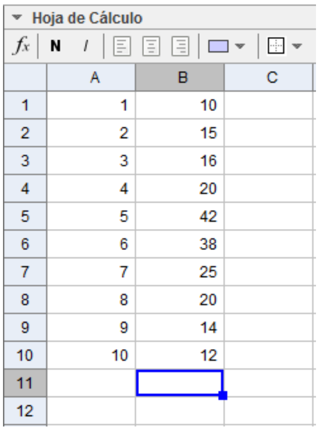
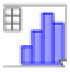
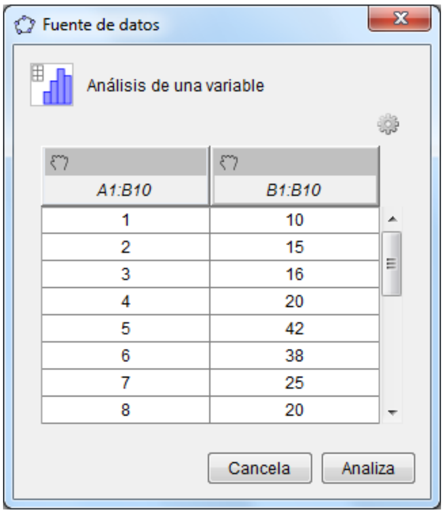
Quizá las aplicaciones que puede darnos GeoGebra para trabajar la Estadística es la parte más desconocida de GeoGebra. Vamos a estudiar algunos ejercicios clásicos de estadística descriptiva, estadística bidimensional, intervalos de confianza y distribuciones de probabilidad.

10. Estadística descriptiva

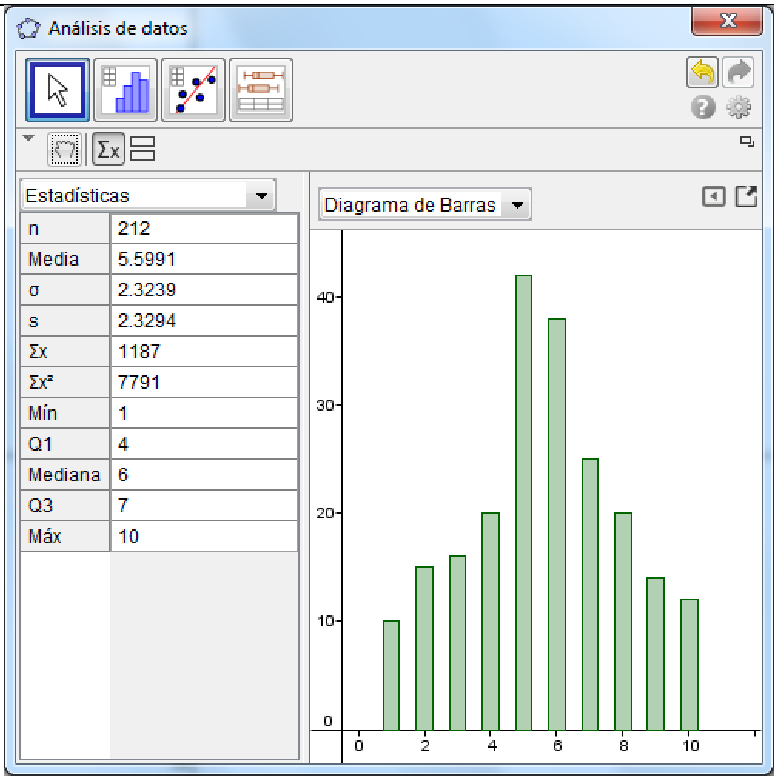
Analizamos las notas de los alumnos de un centro en la evaluación final obteniendo los siguientes resultados:

NOTA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
NÚMERO	10	15	16	20	42	38	25	20	14	12

Realiza un estudio estadístico completo incluido un diagrama de barras.

<table>
<tr><td></td><td>En el menú Herramientas ->Vista Hoja de cálculo</td></tr>
<tr><td></td><td>Copiamos los valores de la tabla en la hoja de cálculo

</td></tr>
<tr><td></td><td>En la barra de herramientas de la hoja de cálculo pinchamos en el botón de estadística descriptiva</td></tr>
<tr><td></td><td>Elegimos datos con frecuencias. Seleccionamos las celdas B1:B10 y pinchamos en la mano que aparece en frecuencias. Nos queda de esta manera:


Y le damos al botón Analiza</td></tr>
<tr><td></td><td>En la ventana resultante pinchamos en el botón $\sum x$ para ver los datos (número de datos, media, desviación típica, etc.)</td></tr>
</table>

	
	Pinchando en el botón con la flecha, a la derecha de la ventana anterior, podemos copiar el diagrama a la vista gráfica para trabajar con él o bien copiarlo como una imagen para pegarlo en documento de texto.
	También se puede trabajar la estadística descriptiva mediante comandos. Despliega la ayuda de la barra de entrada y todos los comandos de estadística descriptiva se encuentran en la Sección ESTADÍSTICAS.

11. Estadística bidimensional

En la siguiente tabla se recoge la distribución de la cilindrada de un motor y la velocidad máxima que puede generar:

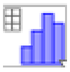
Cilindrada (cm^3)	1000	1200	1400	1600	1600	1800	2000	2000	2200
Velocidad (km/h)	125	130	140	145	150	170	190	195	200

Dibuja la nube de puntos y estudia la correlación que existe entre ambas variables. Si compramos un coche con una cilindrada de 2300 cm^3 . ¿Qué velocidad se espera que adquiera?

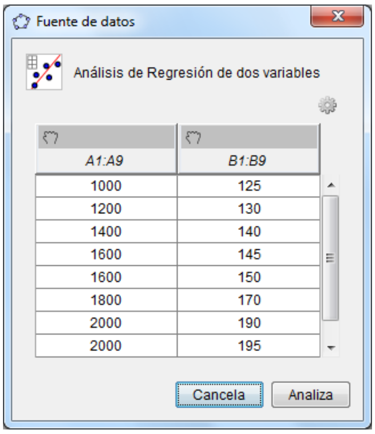
En el menú Herramientas ->Vista Hoja de cálculo

Copiamos los datos en la hoja de cálculo:

	A	B
1	1000	125
2	1200	130
3	1400	140
4	1600	145
5	1600	150
6	1800	170
7	2000	190
8	2000	195
9	2200	200

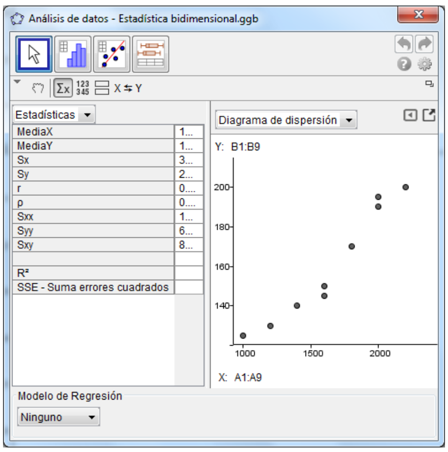


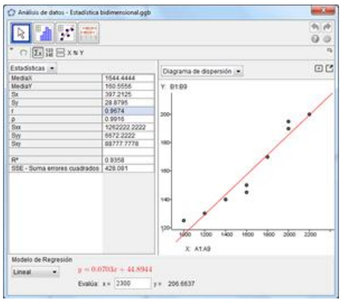
Seleccionamos las celdas A1 hasta B9En el segundo botón de la barra de herramientas de la hoja de cálculo, elegimos Análisis de regresión en dos variables.



Le damos al botón Analiza.

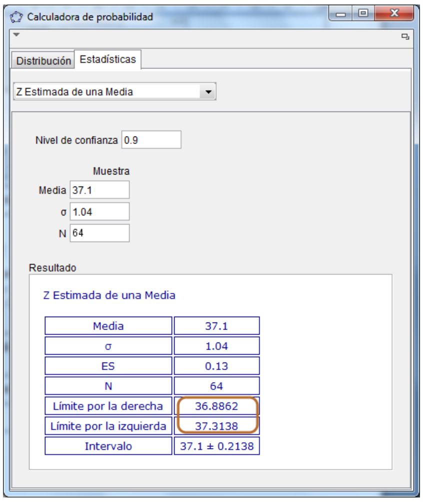
Obtenemos la siguiente ventana con la nube de puntos. Si además le damos al botón $\sum X$ obtendremos todos los cálculos necesarios para analizar la regresión.



	Si además, en el botón inferior, donde pone modelo de Regresión marcamos *Lineal* obtenemos la recta de regresión dibujada y unas casillas para introducir valores. 
	Todos los cálculos de regresión lineal se pueden realizar en la ventana gráfica y en la vista CAS.

12. Intervalos de confianza.

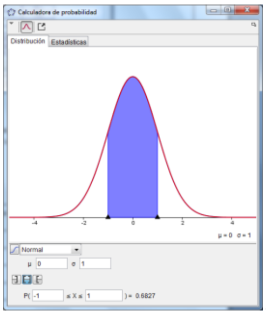
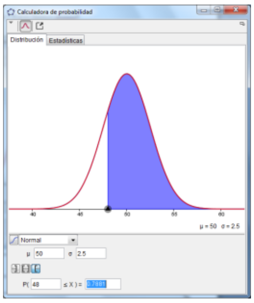
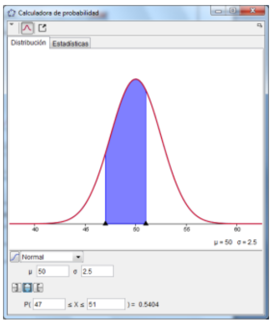
En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes para estimar la temperatura media de sus enfermos. La media de la muestra ha sido 37,1 ºC y se sabe que la desviación típica de toda la población es 1,04 ºC. Obtén un intervalo de confianza, al 90 %, para la media poblacional.

	En el menú Vista, elegimos Calculadora de Probabilidad. En la nueva ventana escogemos la pestaña Estadísticas.
	Como me piden un intervalo de confianza para la media escogemos Z estimada de una media e introducimos los datos del problema
	
	El intervalo de confianza es (36.8862,37.3138)

Cálculo de probabilidades

Sea X una variable estadística que sigue una distribución normal de media $\mu = 50$ y desviación típica $\sigma = 2.5$. Si escogimos un individuo al azar, calcula:

- $P(X \geq 48)$
- $P(47 \leq X \leq 51)$
- $P(X \leq 58)$

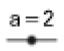
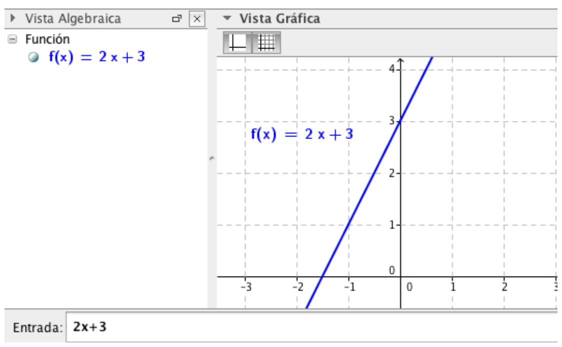
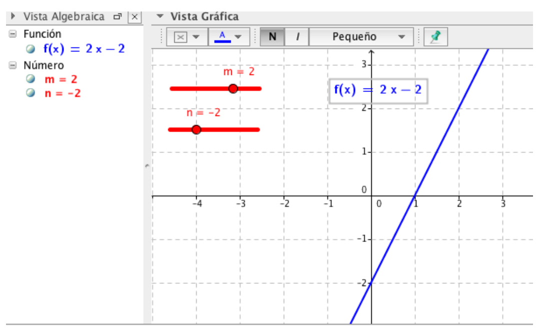
	En el menú Vista, elegimos Calculadora de Probabilidad. En la nueva ventana escogemos la pestaña Distribución .
	Damos al botón anterior para calcular $P(X \geq 48)$ y escribimos los datos de la distribución.  Nos sale que $P(X \geq 48) = 0.7881$
	Para hallar $P(47 \leq X \leq 51)$ damos a este botón y escribimos los datos de la distribución  Tenemos que $P(47 \leq X \leq 51) = 0.5404$

ESTUDIO DE FUNCIONES.

GeoGebra permite representar funciones de forma inmediata. Para representar gráficamente una función concreta basta escribir su expresión en la barra de entrada y por defecto aparece su representación en la ventana gráfica.

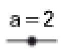
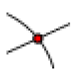
Con ayuda de deslizadores, no nos limitamos a representar una función sino todas las curvas que se obtienen al variar los parámetros que la definen.

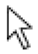
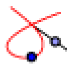
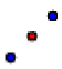
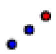
13.

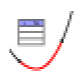
<table>
<tr><td colspan="2">Escribe en la barra de entrada $2x+3$. En la ventana algebraica aparece su expresión, $f(x)=2x+3$ y en la gráfica su representación. Figura de la izquierda.</td></tr>
<tr><td></td><td>En la misma construcción crea dos deslizadores de nombres m, n con valores de -5 a 5, que ya aparecen por defecto, y modifica el incremento a 1.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Con botón derecho sobre $f(x)=2x+3$ en la ventana algebraica o en su representación en la ventana gráfica entra en propiedades y cambia su definición, escribe $m\,x+n$, dejando un espacio entre m y x.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se obtiene la grafica de $f(x)=mx+n$ para los valores de m y n actuales.</td></tr>
<tr><td></td><td>Modifica los valores de m y n en los deslizadores para ver la gráfica.</td></tr>
<tr><td>$f(x)=2x+3$</td><td>$f(x)=mx+n$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

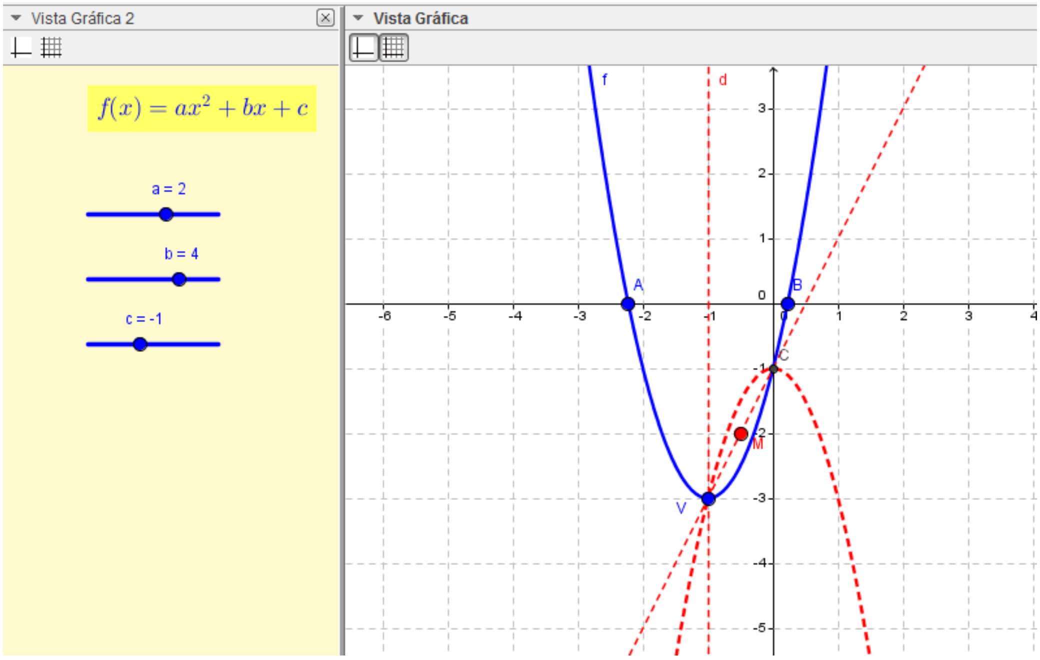
14.

Estudio de la función cuadrática: $f(x)=ax^2+bx+c$

<table>
<tr><td></td><td>Crea tres deslizadores a, b, c con valores entre -10 y 10 con incremento 1.</td></tr>
<tr><td></td><td>En la barra de entrada escribe $a\,x^2+b\,x+c$. Es importante dejar espacio entre a y b con x, en caso contrario GeoGebra lo considera una variable diferente, no definida.</td></tr>
<tr><td></td><td>Con la herramienta Intersección determina los puntos de corte de la parábola con los ejes. Modifica si es preciso a, b y c.</td></tr>
</table>

	Modifica los valores de *a*, *b* y *c* y observa los cambios en la gráfica.
	Representa el vértice de la parábola. Un forma de hacerlo es escribir en la barra de entrada V:=(-b/(2a) , f(-b/(2a)) . También puede representarse la recta x=-b/(2a) y a continuación intersección recta y parábola.
	Activa el rastro del vértice. Botón derecho sobre el punto V, “rastro activado”
	Modifica ahora el valor de los coeficientes de forma ordenada y observa el rastro del vértice al variar éstos.
Ctrl+F	La secuencia de teclas Ctrl+F borra el rastro (Cmd +F en mac)
	¿Qué curva describe el vértice al variar b?
	Utiliza ahora la herramienta “*lugar*” para comprobar que el lugar geométrico del vértice al variar los parámetros a, b, c.
	Modifica los valores de a y c y observa como varía el lugar geométrico
	Modifica los aspectos visuales: color, grosor, estilo,… de los objetos. Para ello selecciona cada uno de ellos con botón derecho y accede a sus propiedades.
	¿Podrías determinar las ecuaciones de los tres lugares obtenidos? Nota: La versión 5 de GoeGebra permite mediante el comando EcuaciónLugar determinar de forma automática la ecuación de lugares geométricos construidos como lugar de un punto al variar otro, pero no calcula la ecuación si el trazado se obtiene al variar un deslizador.
	Solución: Lugar al variar c: recta x= -b/2a. Al variar a: recta y=-(b/2)x+c. Observa que es la recta que pasa por V y el punto (0,c), corte de la parábola con el eje. El lugar más interesante es el que se obtiene al variar b, una parábola invertida respecto a la original, que pasa por el vértice y el punto de corte con eje y. Su ecuación es $y=-ax^2+c$. Puede obtenerse como simetría de la parábola original.
	Determina el punto medio del vértice y el punto de corte de la parábola con el eje y.
	Simetría central de la parábola respecto al punto medio.
	Introduce en la barra de entrada las tres expresiones anteriores para comprobar que las ecuaciones de los lugares son las indicadas x= -b/(2a) y= (b/2)x+c $y=-ax^2+c$

	Utiliza ahora la herramienta "inspección de funciones" que nos permite obtener información de forma sencilla de las funciones representadas.



15.

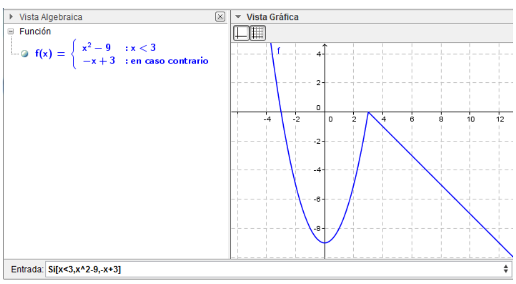
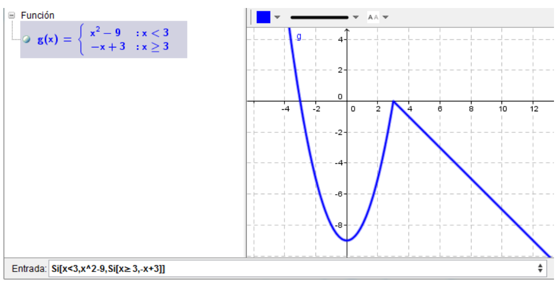
Haz un estudio similar de la hipérbola $y = a + \dfrac{k}{x-b}$

16. Funciones a trozos o definidas en intervalos.

Para definir funciones en intervalos se utiliza el comando *Si*, cuya estructura es:

*Si[condición, entonces, si no]*el comando admite el uso de Si más de una vez de forma anidada.

Vamos a representar la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 \ \ si \ \ x < 3 \\ -x + 3 \ \ \ si \ \ x \geq 2 \end{cases}$

	
$Si[x < 3, x \wedge 2 - 9, -x + 3]$	$Si[x < 3, x \wedge 2 - 9, Si[x \geq 3, -x + 3]]$

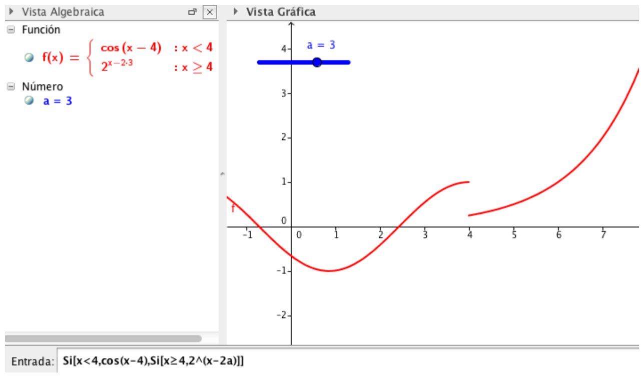
17. Continuidad de una función.

Podemos utilizar parámetros, definidos mediante deslizadores para estudiar gráficamente la continuidad de una función.

Determina el valor de a para que

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x-4) & \text{si } x<4\\ 2^{x-2a} & \text{si } x\geq 4\end{cases}$$

sea continua en $x=4$.



Crea un deslizador, a, con valores entre -10 y 10 con incremento 1, y escribe en la barra de entrada la expresión: Si**[x<4,cos(x-4),Si[x≥4,2^(x-2a)]].** Solución $f(x)$ continua para $a=2$.

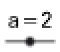
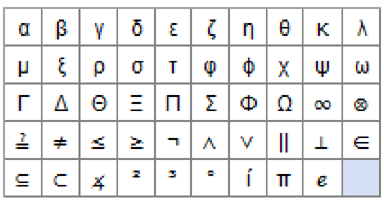
Nota. La versión 5.0 de reciente aparición permite abreviar la sintaxis, que en este caso es:

Si[x<4,cos(x-4),x≥4,2^(x-2a)].

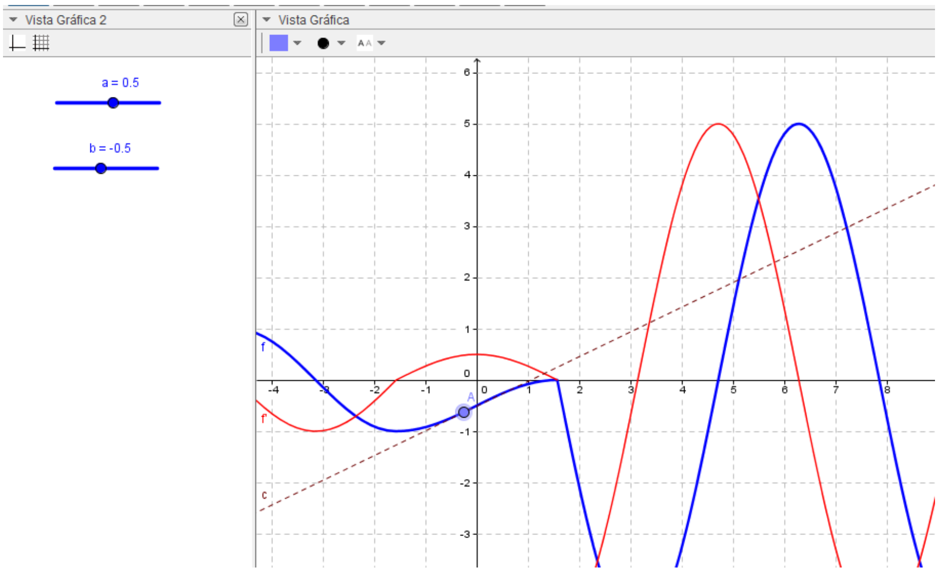
18.

Determinar *a* y *b* para que $f(x)=\begin{cases} sen\, x & si \quad x\leq -\dfrac{\pi}{2}\\ a\, sen\, x+b & si \quad -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 5\cos x & si \quad x\geq \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ sea continua en □ .

Estudia la derivabilidad de $f(x)$.

	Creamos dos deslizadores a y b.		
	En la barra de entrada definimos las tres funciones f1, f2 y f3 y con botón derecho pinchamos en mostrar objeto para que no sean visibles.		
	f1(x)= sen(x)	f2(x)= a sen(x)+b	f3(x)=5 cos(x)
	En la barra de entrada escribimos : f(x) = Si[x ≤ -pi/2, f1,Si[-pi/2 x < pi/2, f2,Si[x ≥ pi/2,f3]]] Los símbolos ≤, ≥,… aparecen al hacer clic en la “alfa” que aparece a la derecha de la barra de entrada.		

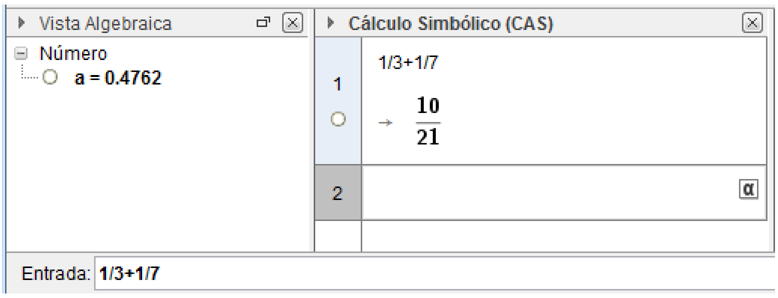
	Modificamos los valores de a y b hasta conseguir que $f(x)$ sea continua. Solución: $a = 0,5$ y $b = -0,5$.
	Construimos un punto sobre $f(x)$.
	Con la herramienta “tangentes” construimos la recta tangente a $f(x)$ en el punto A.
	Desplaza el punto A y observa la variación de la pendiente de la recta tangente.
f’(x)	En la barra de entrada escribe $f'(x)$ para representar la función derivada.



GEOGEBRA CAS. (CÁLCULO ALGEBRAICO SIMBÓLICO)

Veamos con un ejemplo el significado de CAS.

Si introducimos en la barra de entrada la expresión 1/3+1/7 la ventana algebraica muestra su valor decimal 0,4762, (el número de decimales se establece en el menú *Opciones/Redondeo*). Esta misma expresión en la vista CAS muestra su valor exacto 10/21.



La vista CAS cuenta con barra de herramientas propia, sencilla pero suficiente para la mayoria de los cálculos más habituales. Además hay una serie de comandos específicos CAS y otros generales que permiten realizar muchos otros cálculos.

GeoGebra permite desde la vista CAS operaciones con números en forma exacta, incluyendo radicales y numeros complejos, factorizar números y polinomios, operaciones con fracciones numéricas y algebraicas, resolución de ecuaciones y sistemas, calculo de límites, calculo de derivadas e integrales, operaciones con vectores y matrices,…

Para acceder a la vista CAS basta con seleccionarla en el menú vista o bien en el cuadro que se abre al iniciar el programa.

19.

Ejemplos inmediatos de utilización de algunas herramientas.

=	Evalua	Realiza calculos exactos en caso de que sea posible.

Introduce en la linea de entrada las siguientes expresiones y pulsa la herramienta *Evalúa*.

- 1+3/4 ·5/6-2/3(1-1/2)
- $\sqrt{2}+3\sqrt{8}-2\sqrt{50}$. La combinacion de teclas ALT+R introduce el signo raiz.
- $(2-a)^4$. Para elevar utiliza la tecla ^.
- $(3+i)^5$. La unidad imaginaria, i, se obtiene como ALT+i.

≈	Valor numérico	Se obtiene el valor númerico de la expresión introducida con la precisión que se haya fijado.

Realiza los calculos del apartado anterior y pulsa la herramienta valor numérico.

15 3 • 5	Factoriza	Factoriza números y polinomios.

- Factoriza 123456
- Factoriza $x^5 - x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 8x + 12$

(( ))	Desarrolla	Desarrolla la expresión introducida

- Desarrolla la expresión: $(x-3)^2(2x-1)(x^2+4)$

7	Sustituye	Sustituye en una expresión una variable por un valor.

- $(x-3)^2(2x-1)(x^2+4)$ calcula el valor en x=-2

x=	Resuelve	Resuelve una ecuacion, inecuación o sistemas.

- Reuelve la ecuación $\frac{x-1}{3} + \frac{1}{x} = 2$
- Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-2y+z=2 \\ x-y+4z=4 \end{array}\right\}$

Para introducir un sistema hay que escribir {x+y+z=1,x-2y+z=2,x-y+4z=4}

x≈	Resolución numérica	Resuelve una ecuaciones de forma numérica.

- Resuelve x^2+ cos x =3

f' ∫	Derivada Integral	Calcula derivada o integral de la expresión introducida.

- Calcula la derivada de $f(x) = \ln\left(x^2+3\right)$.
- Calcula la integral indefinida de $f(x) = \ln\left(x^2+3\right)$.
- Además de las herramientas hay gran cantidad de comandos para realizar otros cálculos:

- Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}$. Basta escribir Límite[sen(x)/x,0]. En caso de no existir el límite pueden calcularse los límites laterales mediante los comandos LímiteSuperior y LímiteInferior respectivamente.

GEOGEBRA 3D.

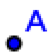
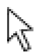
Una de las novedades más significativas de la reciente versión 5.0 de GeoGebra (octubre de 2014) es la aparición de la ventana 3D.

La ventana 3D cuenta con barra de herramientas propia que permite la representación de objetos tridimensionales: poliedros, cilindros, esferas, planos en el espacio...

Además existen comandos propios de 3D y son también utilizables otros generales.

Al abrir la ventana 3D se muestran los ejes de coordenadas, x en rojo, y en verde y z en azul.

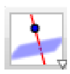
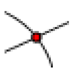
20. Crear puntos 3D

	Al hacer clic sobre el plano que aparece (color gris por defecto) se crea un punto en el plano XOY.
	AL seleccionar el punto aparece una doble flecha que permite mover el punto sobre dicho plano. Haciendo clic sobre el punto, se modifica la flecha a posición vertical y nos permite moverlo perpendicularmente al plano.
	Desde la barra de entrada puede crearse directamente un punto en el espacio escribiendo sus coordenadas. Por ejemplo (1,-1,3) y desplazarlo vertical u horizontalmente como se ha indicado.

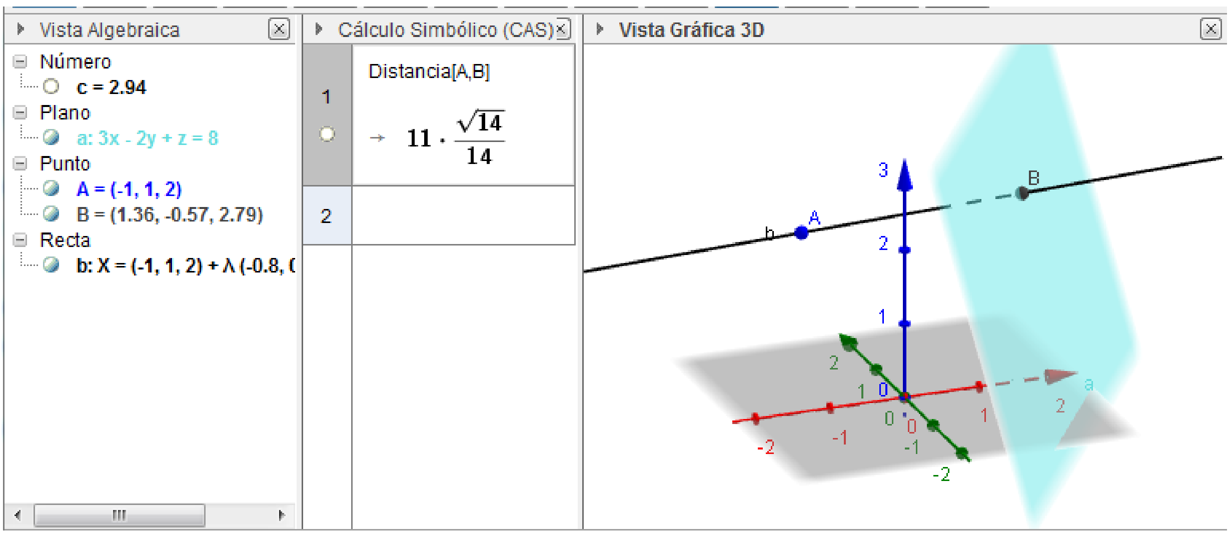
21.

Calcula la distancia del punto $A(-1,1,2)$ al plano $a: 3x-2y+z=8$.

Activa si no lo está la vista 3D

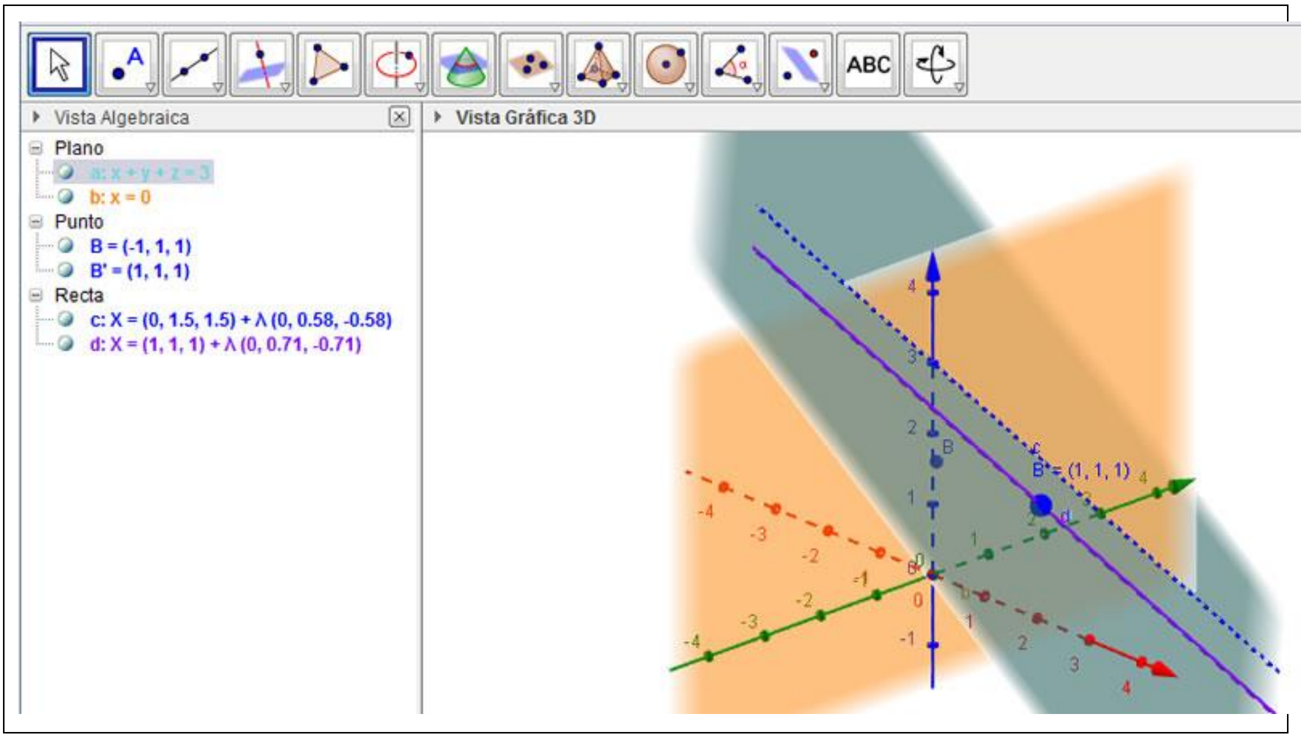
	Escribe en la barra de entrada (-1,1,2)
	Escribe en la barra de entrada 3x-2y+z=8
	Selecciona la herramienta Perpendicular y haz clic en el punto y en la recta. De forma alternativa puedes escribir en la barra de entrada Perpendicular[A,a]
	Con la herramienta intersección selecciona la recta y el plano. Interseca[a,b]

	Selecciona la herramienta *distancia o longitud* y haz clic en los dos puntos. O bien escribe en la barra de entrada Distancia[A,B]. Se obtiene 2,94.
Activa la vista CAS	
=	Escribe Distancia[A,B], en este caso se obtiene la expresión exacta $\frac{11\sqrt{14}}{14}$.
≈	Si el punto no tiene coordenadas enteras, el cálculo exacto no es posible. Utiliza en este caso la herramienta *Valor numérico*.



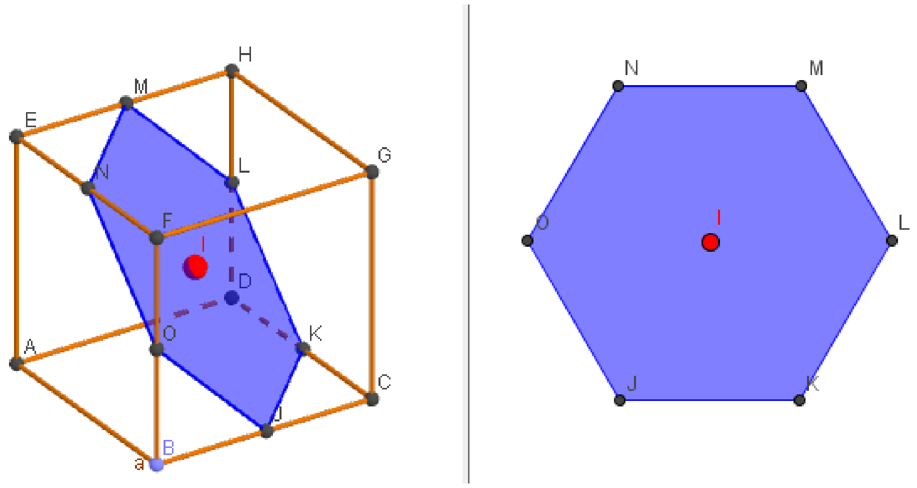
22. PAU Castilla y León, Junio de 2014 Opción B.

Calcular la recta contenida en el plano $\pi_1 \equiv x+y+z=3$ paralela al plano $\pi_2 \equiv x=0$ y que pasa por el simétrico de B(-1,1,1) respecto de π_2.



23. Cortes en el cubo.

	Sitúa un punto en el origen de coordenadas o escribe en la barra de entrada (0,0,0). De forma análoga sitúa un punto sobre el eje x (rojo) a unas 2 unidades del origen.
Para evitar que cada objeto aparezca con el nombre, desde el Menú Opciones /Etiquetado/ Solo puntos nuevos.	
	Selecciona la herramienta Cubo, y haz clic en A y en B, o bien escribe en la barra de entrada cubo [A, B].
	Recta que contiene a una diagonal del cubo.
	Construye un punto sobre la recta.
	Selecciona la herramienta plano perpendicular y haz clic en la recta y en el punto sobre ella.
	En la barra de entrada utiliza el comando Interseca[<Objeto>, <Objeto>] y escribe el nombre del plano y del cubo. Interseca[a,e].
Oculta todos los objetos excepto las aristas del cubo, el punto sobre la recta y el polígono que se ha construido.	
	Mueve el punto sobre la recta en el interior del cubo. Si hay dificultades para seleccionar el punto, marca no permitir seleccionar en el resto de objetos.

Con botón derecho sobre el polígono intersección de plano y cubo selecciona “Representación 2D de polígono” y aparece éste en una nueva ventana.
Estudia los diferentes polígonos que se forman.


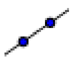
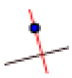
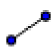
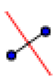
LUGARES GEOMÉTRICOS

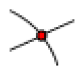
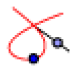
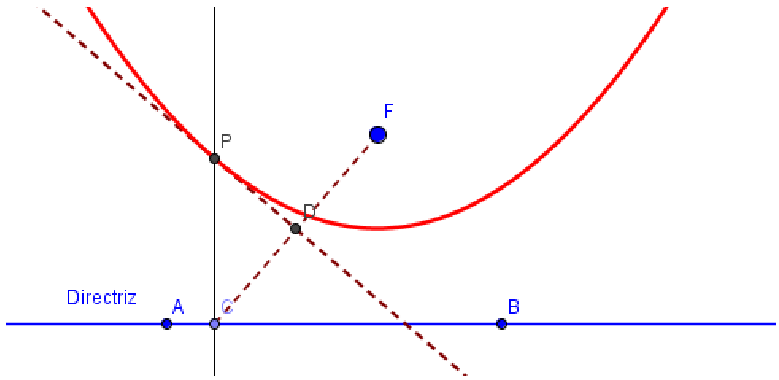
GeoGebra permite construir de forma sencilla e intuitiva lugares geométricos, de momento solo construye lugares de puntos, no es posible construir el lugar de un segmento, circunferencia u otros objetos.

Veamos dos sencillos y cásicos ejemplos.

24. Parábola como lugar geométrico.

Recordemos que la parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta llamada directriz.

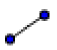
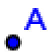
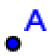
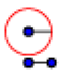
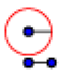
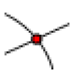
	Selecciona la herramienta “punto” y ha clic en un punto de la vista gráfica. Selecciona el punto con el botón derecho del ratón**, renombra**, y escribe F.
	Con la herramienta recta pincha en dos puntos de la pantalla y construye una recta exterior a F. Cambia su nombre a d, directriz.
	Construye un punto sobre la recta anterior, C, diferente de A y B utilizados para definir la recta.
	Construye la perpendicular a la directriz por el punto C.
	Construye el segmento CF
	Construye ahora la mediatriz del segmento anterior, o si prefieres, construye el punto medio del segmento y la perpendicular al segmento por el punto medio.

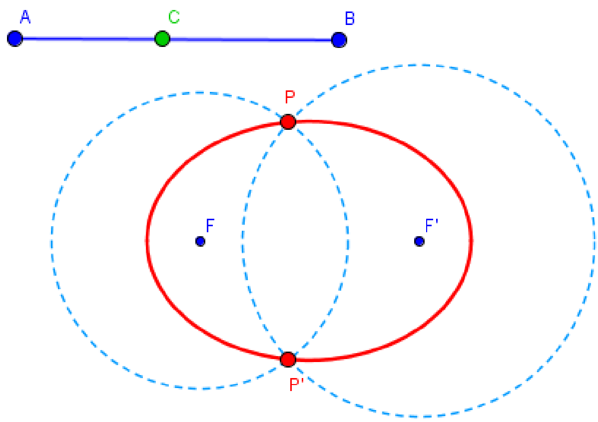
	Utilizando la herramienta “intersección” construye la intersección de la perpendicular a la directriz y la mediatriz del segmento. Llama P al punto de intersección.
	Por último, construye el lugar geométrico. Selecciona la herramienta y haz clic, en este orden en P, y en C, punto cualquiera de la directriz. Con lo que queda construida la parábola.
	Mueve los elementos libres, puntos A y B que definen la recta, y F para ver la parábola con distinto foco y directriz. Moviendo el punto C, punto sobre la recta, observa como varía P, que es el punto que construye la parábola.
Modifica los aspectos visuales: color, grosor, estilo… de los objetos. Para ello selecciona cada uno de ellos con botón derecho y accede a sus propiedades.	
	

25. Elipse como lugar geométrico.

La elipse se define como el lugar de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante.

La construcción con esta definición es extremadamente sencilla.

	Construye un segmento AB, en la parte superior de la pantalla. Su longitud será la suma de las distancias a los focos.
	Construye un punto C en el segmento A, B.
	Construye dos puntos, F y F’, en la zona central de la pantalla. Su distancia ha de ser menor que la longitud del segmento AB.
	Selecciona la herramienta “**compás**” y haz clic en este orden en A, luego en C y finalmente en F.
	Con la herramienta compás, haz clic en C, B y finalmente en F’.
	Construye los puntos de intersección, P y P’ de las dos circunferencias que has construido.

<table>
<tr><td></td><td>Selecciona la herramienta “lugar” y haz clic en P a continuación en C. Se crea la mitad de la elipse</td></tr>
<tr><td></td><td>Con la herramienta lugar seleccionada haz clic en P’ y en C para construir la otra mitad de la elipse.</td></tr>
<tr><td></td><td>Mueve los elementos libres, puntos A y B que definen la distancia, y F y F’ para ver los cambios que producen en la elipse. Moviendo el punto C, observa la variación de P y P’-</td></tr>
<tr><td colspan="2">Modifica los aspectos visuales: color, grosor, estilo,… de los objetos. Para ello selecciona cada uno de ellos con botón derecho y accede a sus propiedades.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

La versión 5 de GeoGebra incorpora el comando EcuaciónLugar que nos da la ecuación del mismo y permite trabajar con el lugar para construcciones posteriores.

RASTRO DE UN OBJETO. COLOR DINÁMICO.

En muchas ocasiones, en vez de construir el lugar geométrico directamente es más interesante y casi siempre más didáctico observar el movimiento de un objeto cuando varía la posición de otro.

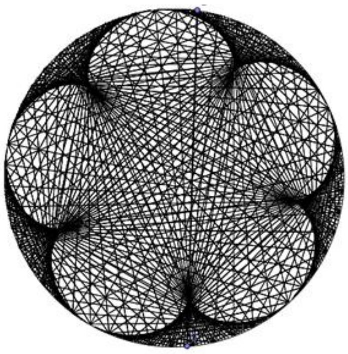
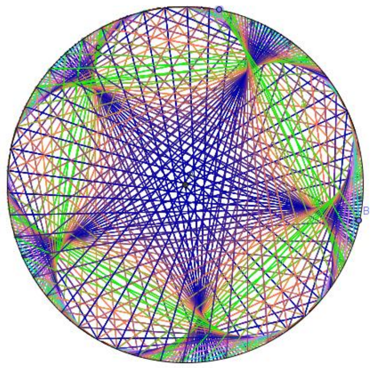
GeoGebra dispone de esta posibilidad aplicable a cualquier objeto gráfico con el nombre “rastro activado” desde el menú contextual o con el comando Rastro[A, true/false] que activa o desactiva esta característica.

Esta característica permite crear a la vez bellas figuras matemáticas o no, con sencillas instrucciones. Su combinación con el color dinámico hace aún más bellas las construcciones.

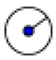
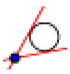
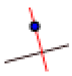
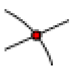
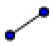
26.

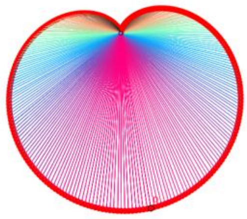
Veamos un sencillo y vistoso ejemplo.

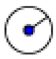
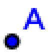
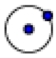
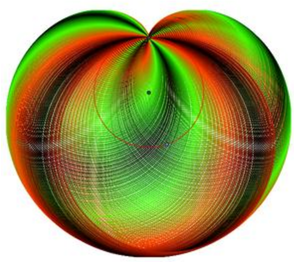
	Selección la herramienta “circunferencia (centro, radio)”, haz clic en un punto de la pantalla y en el cuadro que se abre da el valor 4 para el radio.
	Construye un segmento AB con A y B puntos de la circunferencia y con botón derecho sobre él, activa su rastro.

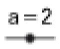
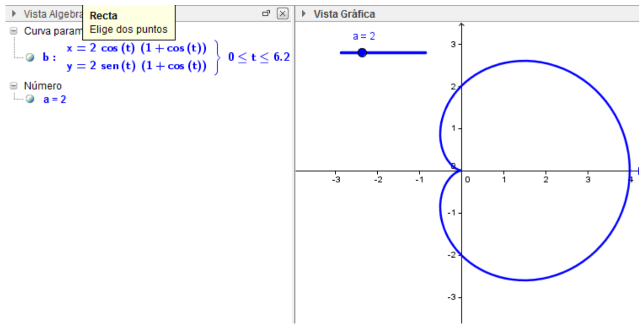
Entra en propiedades de los puntos A y B (botón derecho) y selecciona “animación activada”. Por defecto la velocidad de animación es 1. Deja A con esa velocidad y da a B velocidad 6.	
 	Desde los botones play y pausa que aparecen en la esquina inferior izquierda puedes animar o detener cuantas veces se desee.
Ctrl+F	La combinación de teclas Ctrl + F borra los rastros.
Se obtiene la imagen que se representa a la izquierda,	
Color Dinámico	Nuevamente en propiedades del segmento, botón derecho, entra en “Avanzado” y en Color dinámico asigna los valores Rojo: a ,Verde: a/2, Azul: a/3,. Activa el play si es necesario y obtendrás una imagen similar a la representada a la derecha.
	

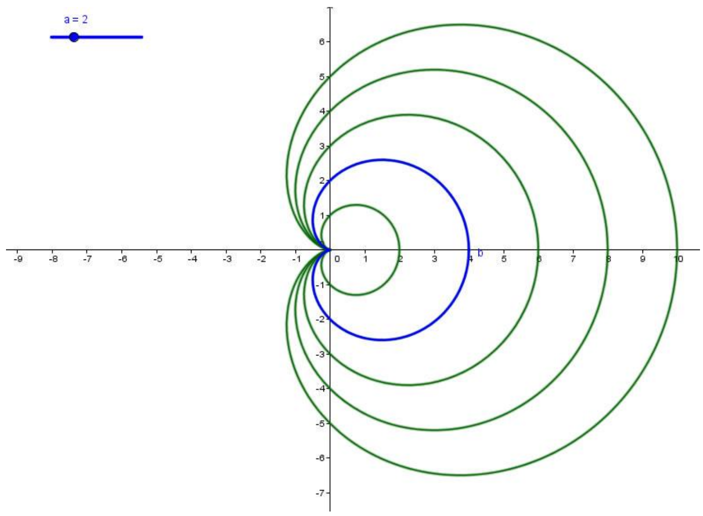
27. Cardiode como lugar geométrico y como curva algebraica.

Lugar geométrico de un punto.	
	Selección la herramienta “circunferencia (centro, radio)”, haz clic en un punto de la pantalla y en el cuadro que se abre da el valor 4 para el radio. Llama O al centro.
	Crea dos puntos A y B sobre la circunferencia.
	Tangente a la circunferencia por el punto A.
	Perpendicular a la tangente por el punto B.
	Intersección de las dos rectas. Renombra a ese punto como P. Botón derecho renombrar.
	Construye el segmento BP.

<table>
<tr><td>Rastro</td><td colspan="2">Activa el rastro del punto B y del segmento d, construidos.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Con botón derecho sobre el segmento, propiedades, avanzado, asigna a los colores números dependientes de d, por ejemplo R=d, V=d/2 , A=d/3. Puedes probar otros números.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Oculta, botón derecho “mostrar objeto” todos los elementos excepto el punto B y el segmento construidos. También se puede hacer pinchando sobre el circulito que aparece en la definición de los objetos en la ventana algebraica.</td></tr>
<tr><td>Animación</td><td>Con botón derecho sobre B, selecciona “animación activada”.</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>
</td><td>Desde los botones play y pausa que aparecen en la esquina inferior izquierda puedes animar o detener cuantas veces se desee.</td></tr>
<tr><td>Ctrl+F</td><td>La combinación de teclas Ctrl+F borra los rastros.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Lugar geométrico de la envolvente de circunferencias.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Selección la herramienta “Circunferencia (centro, radio)”, haz clic en un punto de la pantalla y en el cuadro que se abre da el valor 2 para el radio. Llama O al centro.</td></tr>
<tr><td>
</td><td colspan="2">Define dos puntos sobre la circunferencia A y B.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Con la herramienta Circunferencia(centro, punto) construye la circunferencia centrada en B que pasa por A.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Activa el rastro de esta ultima circunferencia y en propiedades avanzadas asigna colores dinámicos Rojo= x(B), Verde= y(B), Azul=x(B)-y(B)</td></tr>
<tr><td>Animación</td><td>Con botón derecho sobre B, selecciona “animación activada”.</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>
</td><td>Desde los botones play y pausa que aparecen en la esquina inferior izquierda puedes animar o detener cuantas veces se desee.</td></tr>
<tr><td>Ctrl+F</td><td>La combinación de teclas Ctrl+F borra los rastros.</td></tr>
</table>

Curva algebraica, coordenadas paramétricas.	
	Crea un deslizador a con valores entre 1 y 5 e incremento 1.
En la barra de entrada se escribe la expresión de la curva. **Curva[a cos(t)(1+cos(t)),a sen(t)(1+cos(t)),t,0,2 pi]**.	
¿Cómo es la curva si a es negativo? modifica los valores del deslizador, entre -5 y 5. Para ello pulsa boton derecho sobre el deslizador o sobre su definición.	

Utilizando el comando Secuencia podemos ver la familia de cardiodes en función de un parámetro.
Barra de entrada: *Secuencia[Curva[i cos(t) (1 + cos(t)), i sen(t) (1 + cos(t)), t, 0, 2 pi],i,1,5]*


RECURSOS PARA TRABAJAR CON GEOGEBRA.

Existen en internet una enorme cantidad de materiales elaborados, tanto para aprender su utilización como para trabajar en el aula si se desea.

Destacamos algunos de ellos.

GeoGebraTube http://www.GeoGebratube.org almacén de recursos realizado por los usuarios de la comunidad GeoGebra. Actualmente hay más de cien mil recursos libres y listos para utilizar en el aula. Cualquier usuario, previo registro, puede incluir sus materiales y ponerlos a disposición de otros usuarios.

Proyecto Gauss http://recursostic.educacion.es/gauss/web Colección de unas 600 actividades desarrolladas por José Luis Álvarez y Rafael Losada y perteneciente al programa Escuela 2.0 del Ministerio de Educación que abarcan todos los contenidos de educación Primaria (tercer ciclo) y educación secundaria y bachillerato. Cada actividad, interactiva, lleva un guión de trabajo para que el alumno pueda investigar y resolver los problemas propuestos.

Curso Virtual GeoGebra. http://GeoGebra.es/cvg creado por Rafael Losada Liste, probablemente el curso más completo de GeoGebra que existe en español.

Páginas personales, hay cientos de páginas en español con recursos elaborados en GeoGebra. La página de Manuel Sada: http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra y la de José Antonio Mora http://jmora7.com son dos buenos ejemplos.

Institutos GeoGebra, existen actualmente diez en España, http://institutosgeogebra.es donde aparece toda la información de actividades y cursos sobre GeoGebra. Recientemente se ha creado el IGCL (Instituto GeoGebra de Castilla y León), http://www.geogebracyl.socylem.es/ donde todos los profesores que lo deseen pueden aportar y compartir sus experiencias con GeoGebra.

Las construcciones que aparecen en este documento están disponibles en: http://ggbtu.be/bt0Et2tkC

Para hacer referencia al artículo:

Arranz, JM. y Jiménez R. (2015). Geogebra, un punto de partida... En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 153-186). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

ASPECTOS MULTIDISCIPLINARES EN LA DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA MEDIANTE HERRAMIENTAS TIC INNOVADORAS

Noemi de Castro-Garcia, M.T. Trobajo

Dpto. de Matemáticas. Universidad de León.

Resumen

El taller propuesto tiene como finalidad mostrar el uso de actuales herramientas TIC que permitan analizar e interpretar bases de datos del mundo real. El objetivo principal es dar a conocer al profesorado nuevas formas de enseñar estadística de tal manera que el alumnado vea las matemáticas como una de las herramientas más potentes para poder comprender, analizar y predecir los fenómenos del mundo que les rodea.

Las técnicas propuestas se basan en metodologías dinámicas e innovadoras, acercándose al aprendizaje constructivo y por aproximación, y refuerzan puntos débiles en la enseñanza de las matemáticas como la aplicabilidad de los conceptos y la motivación de los estudiantes. Además, pueden aplicarse de una forma multidisciplinar para estudiar y entender otras áreas que aparentemente nada tienen que ver con el mundo matemático.

Palabras clave: *estadística, matemáticas, aspectos multidisciplinares, visual-learning, TIC.*

INTRODUCCIÓN

Dos de las dificultades que se encuentran en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son su aplicación y la motivación de los estudiantes. El planteamiento didáctico de este taller va dirigido a afrontar este problema en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística. En este sentido, en el taller se propone el uso de técnicas de visual learning (Murphy, 2009), en concreto a través de la herramienta Gapminder (Rosling et al, 2005). Gapminder es un software libre que usa datos del mundo real y los analiza mediante presentaciones interactivas. Se usa principalmente para descubrir y analizar tendencias y relaciones entre variables.

En los cursos básicos de estadística, el objetivo principal es introducir a los estudiantes en métodos de exploración de datos que les permitan leer e interpretar información numérica o cualitativa de manera visual. En este taller se mostrarán algunas de las posibilidades de Gapminder para motivar y llamar la atención y la curiosidad de los alumnos hacia estos conceptos, analizando datos reales. De este modo podrán desarrollar su capacidad crítica y hacerse preguntas acerca de los acontecimientos históricos, sociales o económicos que han contribuido al desarrollo mundial y, a la vez, aprender matemáticas.

La interfaz del software y la naturaleza interactiva de los gráficos hacen que la exploración de datos y el análisis visual de éstos sea una tarea divertida, dinámica, informativa y muy intuitiva (Trang Le, 2013). Además, ofrece al docente una ventaja extra: la riqueza de las bases de datos de Gapminder permite hacer una gran propuesta de proyectos de investigación por y para los alumnos. De esta manera, los estudiantes encontrarán una motivación para usar y entender estadísticas, poniendo en práctica métodos científicos como identificar problemas, reunir evidencias, descubrir herramientas e interpretar datos, dando sentido a la información estadística.

Justificación

La propuesta de este taller parte de una metodología de aprendizaje activo y heurístico, y está basada en el aprendizaje constructivo y por aproximación. Para el alumno es posible ilustrar conceptos y procedimientos, ver propiedades, y utilizar la metacognición para reflexionar sobre lo aprendido, construyendo así una interpretación que le sirva para entender de una manera más crítica el mundo que le rodea. Además, otras vertientes metodológicas de interés en el taller se basan en métodos globalizados e interdisciplinares de aprendizaje.

Skovsmose (1994a, 1994b) asigna como objetivo docente propiciar la alfabetización matemática de los individuos. La primera dimensión de esta alfabetización podría calificarse como un conocer matemático. Esta dimensión se refiere al dominio de los conceptos, procedimientos, habilidades, destrezas y competencias propios de la matemática. Es un requisito indispensable para una segunda dimensión: el conocer tecnológico. Este tipo de conocimiento se refiere al de las aplicaciones basadas en modelos matemáticos, es decir basadas en la aplicación de conceptos y de procedimientos matemáticos. Y por último, existe una tercera dimensión, la del conocer reflexivo. Este conocer se refiere a los aspectos sociológicos y éticos inherentes a los objetivos y a la forma en que se maneja esa tecnología basada en modelos matemáticos. No puede haber alfabetización matemática si no se alcanza este tercer nivel, ya que las competencias matemática y tecnológica no poseen la capacidad de predecir y de analizar los resultados de su propia producción.

De esta manera, yendo más allá de la primera dimensión de la alfabetización matemática, se consigue que los alumnos vean el gran potencial de las matemáticas como herramienta, empezando a verlas como un oficio y no como una lección (Andonegui, 2005), y se resuelve parte de la problemática surgida por la poca motivación que los estudiantes presentan hacia las matemáticas y que provoca parte del fracaso escolar en la materia.

Y esto, ¿Para qué sirve?

Gran parte de la actividad matemática puede ser descrita como procesos de modelización, en los que interpretamos de forma abstracta, simplificada e idealizada, un objeto, un conjunto de relaciones o un proceso evolutivo que surge de la descripción de la realidad. El propósito de construir un modelo es obtener una mejor comprensión de una parte de nuestro universo y, así, poder predecir y si es posible controlar esta parte de la realidad.

Utilizar el proceso de modelar matemáticamente problemas del mundo real para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y en concreto, de la estadística, permite a los alumnos analizar la relación existente entre las matemáticas y la sociedad actual. Una sociedad en la que existe una matematización prescriptiva (Davis y Hersh, 1988) desconocida para la gran mayoría de personas, presente desde la antigüedad y que se ha incrementado casi ilimitadamente hasta nuestros tiempos, estando presente en numerosos sistemas que rigen nuestra vida.

Decía P. Puig Adam: *Para nuestros alumnos de clases elementales lo concreto empieza por ser el mundo observable, lo que impresiona directamente sus sentidos, y al mismo tiempo los invita a actuar.*

En este sentido, mostrar a los estudiantes que las matemáticas son una herramienta fundamental para el estudio de gran cantidad de áreas supone entender la importancia de lo que estudian y comprender los aspectos multidisciplinares y aplicabilidad de los conceptos estadísticos.

Uno de las aplicaciones actuales con mayor proyección es el análisis de grandes bases de datos (Big Data), con aplicaciones en Marketing e Investigación de Mercados y Sociología entre otros. En este sentido, las tendencias encontradas pasan a convertirse en algoritmos matemáticos que nos ayudan a optimizar y encontrar relaciones entre datos para resolver un problema de la mejor manera posible. Los algoritmos y grafos son una de las herramientas matemáticas más aplicadas y se utilizan en campos como la Medicina, la Ciberseguridad, y el análisis de sistemas que rigen, por ejemplo, las rutas de transportes o los sistemas eléctricos de una ciudad.

De la misma manera, la recogida de datos y la modelización se usan en áreas relativamente nuevas como la Cliodinámica que aspira a descifrar el pasado histórico cuantificando los principales factores que han afectado a éste, y así, poder definir, mediante los datos, grandes dinámicas o ciclos que nos permitan predecir y corregir los acontecimientos mundiales, dándole así solidez a otras disciplinas.

DESARROLLO DEL TALLER

Gapminder

El software utilizado para enseñar matemáticas, y en especial, estadística, suele utilizar métodos numéricos y procedimientos teóricos que se quedan fuera de un uso intuitivo y dinámico (Trang Le, 2013). En este sentido, es necesario utilizar otro tipo de herramientas que sean más adecuadas para los estudiantes. Los alumnos viven en la era del mundo tecnológico donde la información visual es la norma (Murphy, 2009). Atendiendo a esta necesidad, en este taller se promueve el uso de Gapminder (Rosling *et al*, 2005).

Gapminder es un software libre e intuitivo que sirve para visualizar datos del mundo real. Fue desarrollado por Gapminder Foundation en Suecia en 2005 y adquirido por Google Inc. en 2006. Su cofundador es Hans Rosling. La mayoría de los conjuntos de datos que están en Gapminder proceden de la base de datos de las Naciones Unidas.

Vertientes metodológicas del uso de Gapminder en el aula

Existen al menos dos vertientes claras del uso de Gapminder en el aula según cuál sea la finalidad a la hora de la enseñanza y el aprendizaje de la estadística. No se puede afirmar que una sea mejor que otra. Todo depende del tipo de alumnado, nivel educativo, conocimientos previos y del tiempo que el docente pueda dedicar al desarrollo de la actividad.

- Vertiente conceptual: El docente parte del concepto matemático que ilustra a través de gráficas realizadas con Gapminder.
- Vertiente interdisciplinar: Se basa en la utilización de las matemáticas para modelar procesos del mundo real. Desde este punto de vista, se parte de un evento y/o periodo (histórico, social, económico,…) sobre el que se quiera analizar su repercusión o evolución. Gapminder permite, mediante la exploración interactiva de sus bases de datos, formular hipótesis, estudiar posibles patrones, explicaciones y tendencias. Los conceptos matemáticos surgen en el proceso de aprendizaje de forma natural, desordenada. Es posible también utilizar una metodología basada en proyectos. Esta última vertiente del uso de Gapminder es factible gracias a una gran diversidad de bases de datos mediante las que estudiar diferentes y múltiples problemas. Este tipo de experiencia ya se ha llevado a cabo con buenos resultados (Trang Le, 2013, Jesse Spivack, 2011).

Esquema del taller

- Introducción a la herramienta Gapminder.
- Descripción del programa y de la pantalla.
- Desarrollo de ejemplos.
    - Versión conceptual: Desarrollo de diferentes ejemplos de conceptos matemáticos estadísticos que se pueden enseñar a través de Gapminder. (Ver Anexo de Figuras)
    - Versión multidisciplinar: Desarrollo del ejemplo *200 years that changed the world* (Rosling *et al*, 2005) en el que se pueden ver los aspectos multidisciplinares de la herramienta Gapminder, permitiendo estudiar 200 años de historia del mundo actual desde puntos de vista económicos, sociales, históricos, etc. a través de la herramienta estadística.

Propuesta final

Se propondrán problemas para analizar con Gapminder y/o se debatirá acerca de otras posibilidades metodológicas de utilización de la aplicación.

ALTERNATIVAS A GAPMINDER

A pesar de su versatilidad, facilidad de acceso, distribución y uso, Gapminder tiene sus limitaciones. La primera es que no es como tal un software de análisis de datos, por lo que se usa básicamente para analizar de forma visual conjuntos de datos. Además el usuario no puede utilizar sus propios conjuntos de datos porque no es posible cargar conjuntos de datos externos.

Por ello pueden proponerse otras alternativas de libre acceso como StatTrends, Google API (Trang Le, 2013) o Google Public Data Explorer. Esta última opción es especialmente interesante pues permite la importación de conjuntos propios de datos y es compatible con otras aplicaciones de Google.

CONCLUSIONES

Los conceptos matemáticos con frecuencia han tenido su origen en el mundo real, para resolver necesidades cotidianas, y no debemos descartar esa perspectiva, sino utilizarla para dirigir el proceso de enseñanza de las matemáticas hacia la utilización de éstas como respuesta a la tarea de resolver problemas. Como tal, forman parte de un proceso cultural, y no deben separarse del contexto histórico y social en que se elaboran.

En particular la enseñanza de la Estadística, aunque presente en el currículo de Matemáticas desde la Educación Primaria, es comúnmente relegada por los docentes y, en el mejor de los casos, suele reducirse a la obtención de estadísticas descriptivas y gráficas sencillas como parte aislada y no como parte de la formación integral de los estudiantes. Con este taller se propone una metodología activa y multidisciplinar, basada en técnicas de visual-learning. Se proponen alternativas innovadoras de enseñanza y aprendizaje en un contexto real. Estas alternativas tienen como objetivo que el alumno se haga preguntas (why, what if?), investigue, explore, analice y descubra cómo es el mundo que le rodea, a la vez que aprende matemáticas.

ANEXO DE FIGURAS

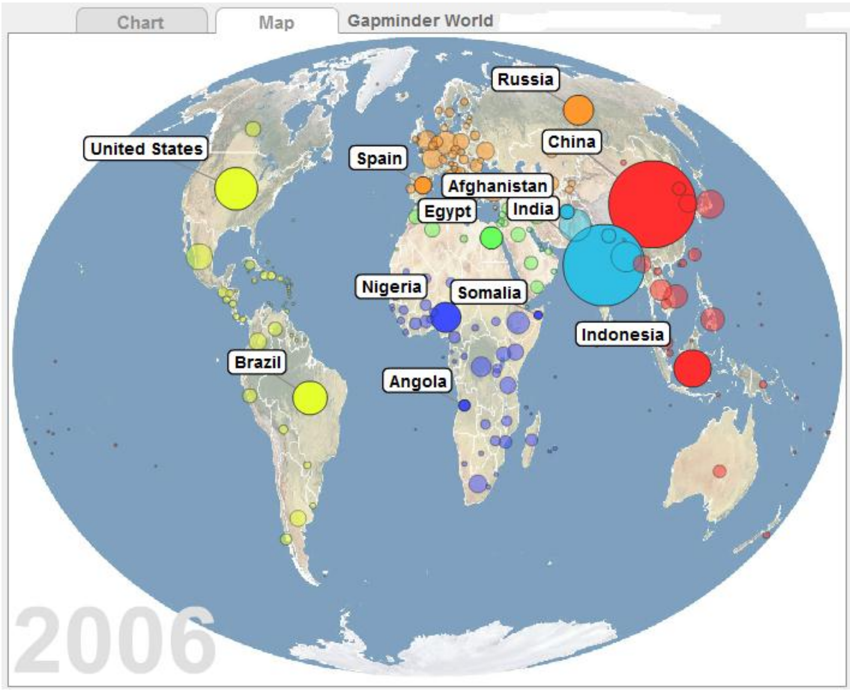


Figura 13. PROPORCIONALIDAD. Tamaño de la burbuja proporcional al tamaño de la población. Se han destacado, entre otros, los países más poblados de cada uno de los continentes (1310M China, 1160 India, 300 EEUU, 245 Indonesia, 143 Rusia, 44 España., etc).

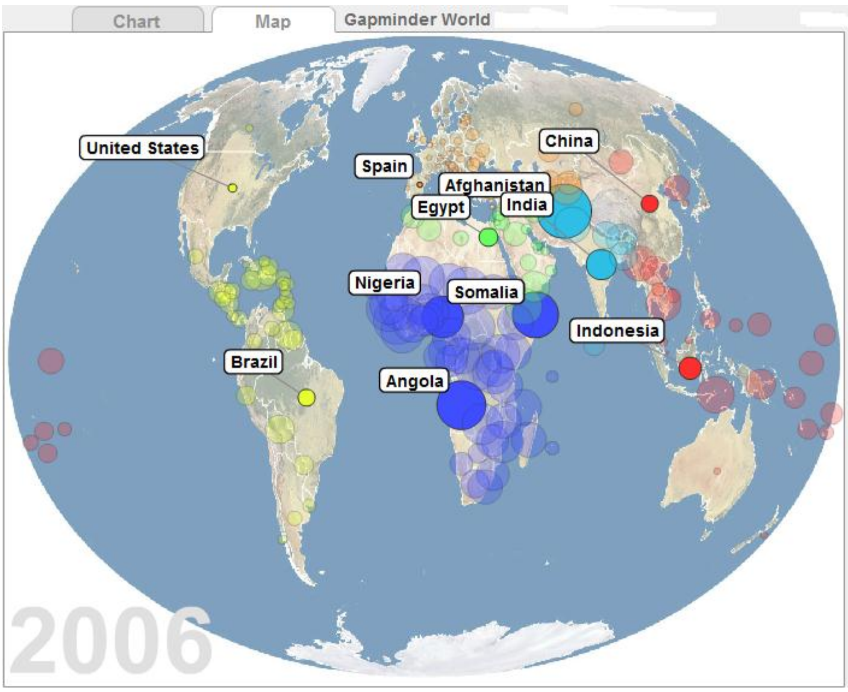


Figura 14. PROPORCIONALIDAD. Tamaño de la burbuja proporcional al número de muertes de niños de 0 a 5 años por cada 1000 nacimientos. Puede destacarse la alta mortalidad infantil en los países africanos (191 Angola, 170 Somalia, 163 Nigeria) y surasiáticos (115 Afganistán, 72 India), la baja en los EEUU y en los países europeos (7.9 EEUU, 5.5 España).

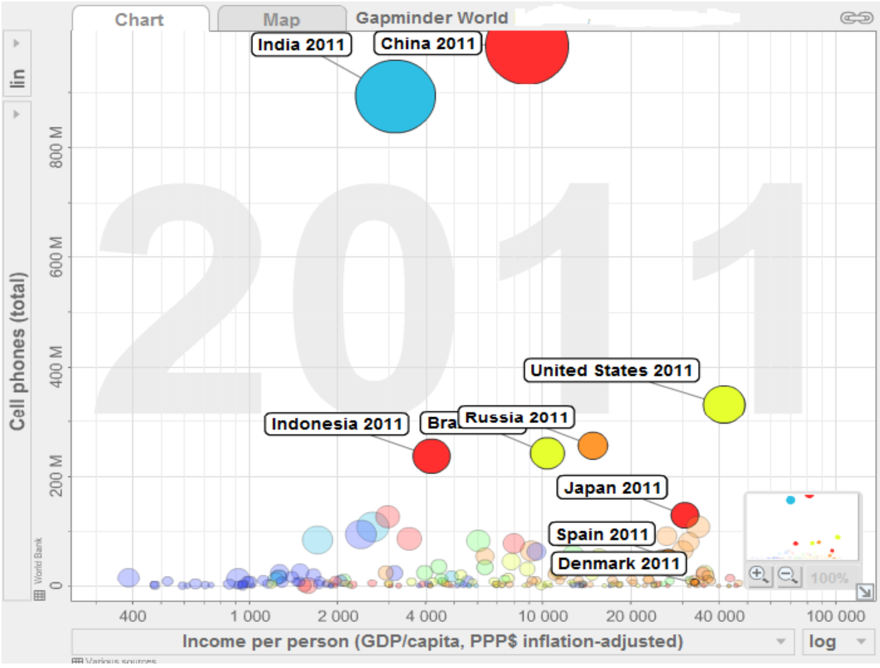


Figura 15. FRECUENCIAS ABSOLUTAS. En la parte superior los países con un número mayor de teléfonos móviles, en la parte inferior los países con menor número de teléfonos móviles. Destacan India y China con más de 800 M de teléfonos móviles frente a España, con 53 M o Dinamarca con 33M.

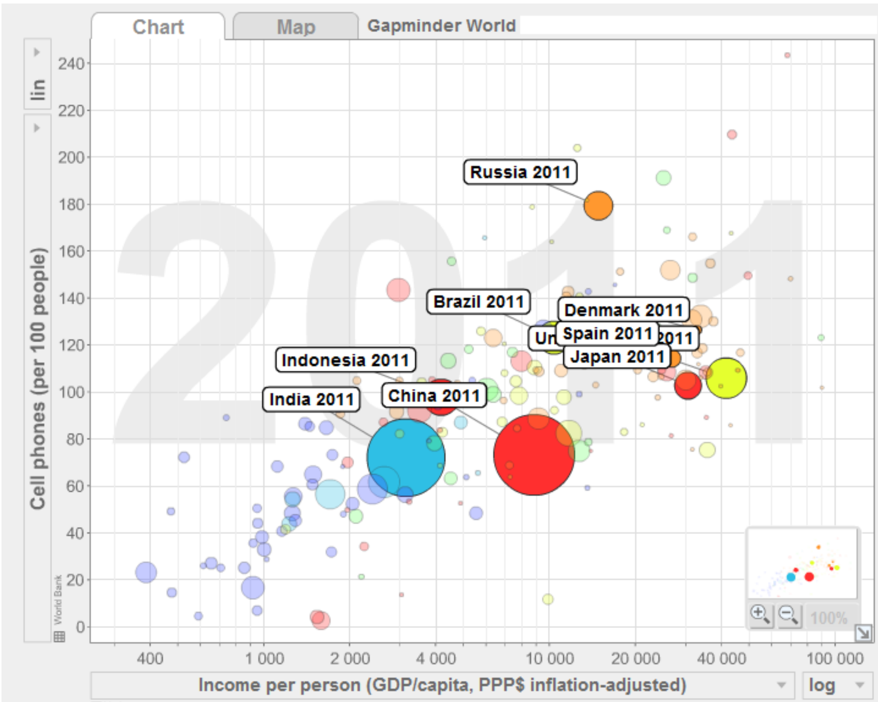


Figura 16. FRECUENCIAS RELATIVAS: En la parte superior los países con un número mayor de teléfonos móviles por cada 100 habitantes, en la inferior los de número menor. China e India, los países más poblados del planeta se encuentran en la parte superior en la figura 3, sin embargo se encuentran en la inferior en la figura 4, con 72 teléfonos por cada 100 habitantes, mientras que España o Dinamarca suben, con 114 y 126 por cada 100 habitantes respectivamente.

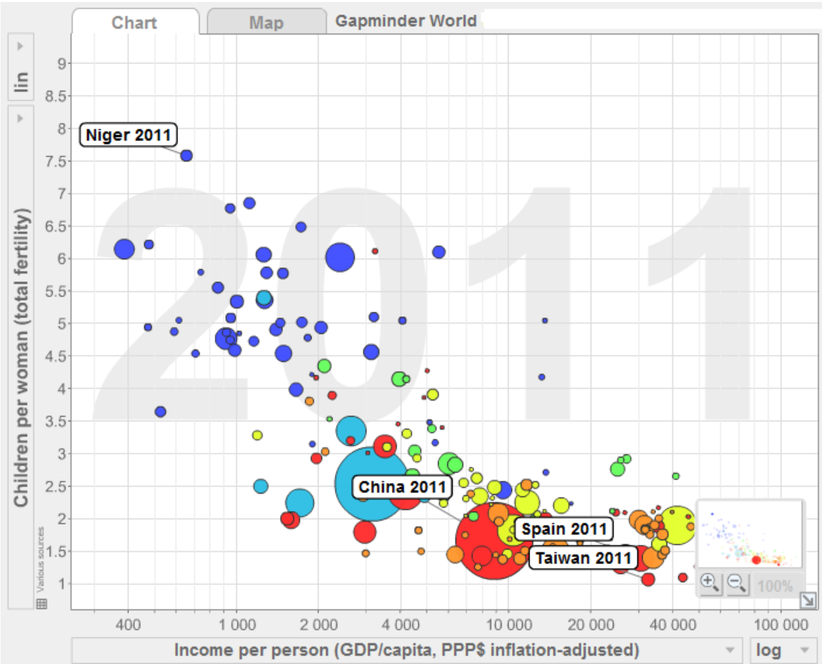


Figura 17. MEDIA DE UNA COLECCIÓN DE DATOS: Representación del número medio de hijos por mujer como indicador de fertilidad. Valores promedios no enteros para una característica entera. (Desde 7.6 en Nigeria hasta 1.7 en China, 1.5 en España o 1.1 en Taiwán). Este mismo gráfico puede utilizarse, por ejemplo, para analizar el concepto de correlación negativa.

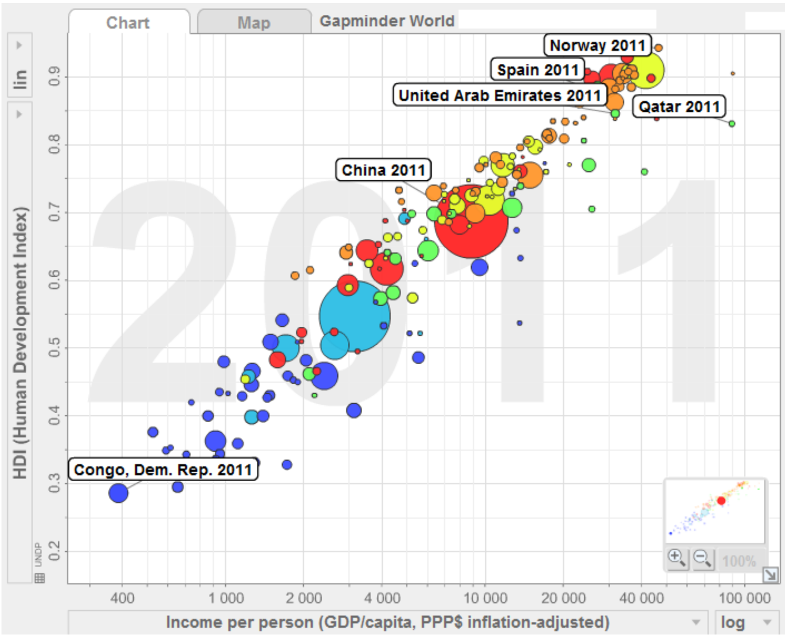


Figura 18. GRÁFICOS BIDIMENSIONALES. CORRELACIÓN Y REGRESIÓN. Representación de nube de puntos con alta correlación positiva. En el eje vertical el índice HDI (Human Development Index) trata de medir tres dimensiones de la calidad de vida de los países: nivel de salud, nivel de educación y nivel de vida. En el eje horizontal el índice GDP, mide el PIB per cápita. En la parte inferior izquierda los países más pobres y con peor calidad de vida (la mayoría pertenecientes al áfrica subsahariana). En la parte superior derecha los países más ricos y con mejor calidad de vida, la mayoría de los países europeos, EEUU, Japón, Corea del Sur y algunos países de Oriente Medio como Israel, Qatar o Emiratos Árabes.

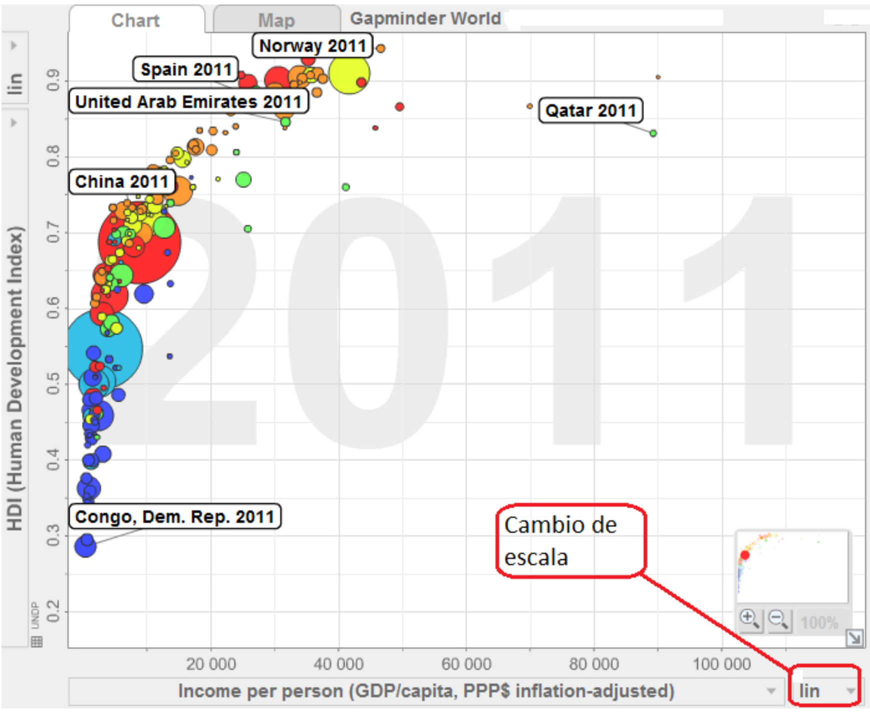


Figura 19. OTROS CONCEPTOS MATEMÁTICOS. El mismo gráfico que en la figura 6 con representación a escala no logarítmica en el eje horizontal. La substancial modificación del aspecto para la misma representación de datos permite introducir y visualizar varios conceptos de matemáticas: LOGARITMOS, ESCALONAMIENTO EN GRÁFICOS, CORRELACIÓN, AJUSTE LINEAL Y NO LINEAL, etc.

Referencias

Andonegui Zabala, (2005) M., *El conocimiento matemático,* Serie: Desarrollo del pensamiento matemático 1

Dai-Trang Le (2013), Bringing Data to Life into an Introductory Statistics Course with GAPMINDER, *Teaching Statistics*, volume issue

Davis, P., Hersh, R. (1988). *Descartes'dream: The world according to mathematics.* London: Penguin Books

Murphy, S.J. (2009), *The power of visual learning in secondary mathematics education*. Pearson Education

Rosling O., A. and H, (2005), Página oficial de la herramienta Gapminder, registration number 802424-7721. Recuperado de http://www.gapminder.org , Stockholm

Spevack J. (2011), Página de NYC ischool.

Recuperado de https://sites.google.com/a/nycischool.org/gapminder/home, New York

Skovsmose, O. (1994a). Towards a critical mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 35-57

Skovsmose, O. (1994b). T*owards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Para hacer referencia al artículo:

De Castro-García, N. y Trobajo, M.T. (2015). Aspectos multidisciplinares en la didáctica de la Estadística para Educación Secundaria Obligatoria mediante herramientas TIC innovadoras. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: *·Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 187-194). Lugar: Academia de Artillería de Segovia

LA SESIÓN COOPERATIVA. LA INTERACCIÓN AL SERVICIO DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

Departamento de Innovación del Colegio Ártica.

Colegio Ártica. (Madrid)

Resumen

La sesión cooperativa constituye un intento de adaptación de los Grupos de Aprendizaje Cooperativo Informal de los hermanos Johnson al contexto escolar. La propuesta se articula sobre cuatro momentos distintos, que se justifican desde la perspectiva del aprendizaje significativo, en el que el aprendizaje se concibe como un proceso de construcción personal del alumno, a partir de sus esquemas de conocimiento previos.

Momento 1: activación de conocimientos previos y orientación hacia la tarea.

Momento 2: presentación de los contenidos.

Momento 3: procesamiento de la nueva información.

Momento 4: recapitulación y cierre.

Palabras clave: *aprendizaje cooperativo, aprendizaje significativo, metodología.*

MOMENTO 1.

Activación de conocimientos previos y orientación hacia la tarea.
(5-10 minutos)

La forma en la que empieza la sesión es fundamental para los resultados que obtengamos de la misma. Los primeros minutos de clase deben enfocarse de forma que preparemos las condiciones para el aprendizaje. Y uno de los primeros pasos en esta preparación es, sin duda, la **activación** de los conocimientos previos. Siguiendo a Ferreiro Gravie[1], podemos decir:

> *"La activación es captar la atención y movilizar sus procesos y operaciones mentales con una intención educativa previamente planteada. Cabría preguntarse lo siguiente: ¿qué hace un campesino cuando va a sembrar y un deportista, por ejemplo aquél dedicado al levantamiento de pesas, al iniciar su rutina de entrenamiento diario? ¿Y el piloto de un moderno avión antes de emprender el vuelo? ¿Qué hacen todos ellos? Sin duda, preparar las condiciones. […]*
>
> *El alumno nunca parte de cero al aprender algo nuevo, pues siempre tiene cierta información, alguna vivencia anterior o punto de referencia relacionado con el tema, o al menos intuye o se imagina algo al respecto.*
>
> *A ese conjunto imperfecto y no estructurado de información, vivencias, puntos de referencia e intuición o fantasía se le conoce como conocimiento previo, y es necesario despertarlo, refrescarlo, para construir el nuevo a partir de él. En tal sentido, las estrategias de activación constituyen el recurso didáctico que nos permite crear las condiciones para iniciar el proceso de adquisición nombrado aprendizaje".*

1 Ferreiro Gravié, 2006.

Desde esta perspectiva, la finalidad de este primer momento de clase sería "sacar a flote" lo que al alumno sabe sobre los contenidos que se van a presentar, de cara a allanar el camino hacia el aprendizaje. Esto supone…

> *… "activar conocimientos previos sobre los contenidos a tratar" y*
>
> *… recordar lo aprendido en las sesiones anteriores.*

Todo lo anterior, se pone de manifiesto en las palabras de Ausubel, citadas por los hermanos Johnson[2]:

> *[...] "La nueva información sólo adquiere sentido si puede incorporarse en alguna estructura de conocimiento ya existente. Los profesores deben, por tanto, organizar las estructuras de conocimiento para sus estudiantes, presentarlas ante ellos de forma clara y precisa, y relacionarlas con estructuras adquiridas previamente".*

Igualmente, resulta importante **orientar** a los alumnos hacia la tarea, lo que implica hacer explícitos los objetivos que se pretenden alcanzar. Existen investigaciones que demuestran que el hecho de que el alumno reciba información sobre lo que se va a aprender (contenidos), cómo va a hacerlo (actividades) y qué haremos para comprobar si ha aprendido (evaluación), reduce la ansiedad y aumenta la motivación, lo que se traduce en una mejora del rendimiento escolar. En palabras de Ferreiro Gravié[3]:

> *"Los alumnos aprenden en la medida en que están orientados. La orientación es una condición imprescindible para comprender. Las estrategias de orientación de la atención (o de la comprensión, como también se les llama) tienen –como su nombre lo indica– la finalidad de llamar la atención de los escolares sobre lo que se aprende, cómo se aprende, y los resultados o logros por alcanzar, para conseguir que en cada uno se estructure su conocimiento.*
>
> *La atención es un proceso psicológico básico que consiste en la excitación óptima de los órganos sensoriales hacia determinados estímulos, al mismo tiempo que se inhiben hacia los estímulos restantes que coinciden en espacio y tiempo. En otras palabras, la atención consiste en enfocar aspectos de la realidad por lo llamativo o importante que éstos resultan para la satisfacción de necesidades y expectativas. […]*
>
> *El docente orienta la atención cuando les presenta a los alumnos el objetivo o propósito por el cual se desarrolla en clase un tema. También cuando, de manera precisa y de forma verbal y/o escrita (o bien mediante un recurso visual), da las instrucciones para realizar una tarea, o cuando recuerda cada cierto tiempo qué se está estudiando y qué se espera que aprendan.*
>
> *Las estrategias didácticas de la orientación de la atención promueven, poco a poco, el compromiso de los alumnos en su aprendizaje, en la medida en que éstos hacen suyo el objetivo, se exploran sus expectativas y se va comprobando, en la práctica, que se logran y rebasan; y, más aún, en la medida en que, con la explicación del maestro y de los puntos de vista, criterios y opiniones de sus compañeros, estructuran lógicamente el conocimiento".*

Así mismo, estos primeros minutos de sesión, también sirven para ofrecer a los chicos el tiempo necesario para centrarse de cara a la fase de la presentación de la información, que requiere de un cierto nivel de atención. En este sentido, si vienen de otra clase, hay que dar tiempo para desconectar; si vienen del recreo, deben relajarse, etc.

---

2 Johnson, D. W. y R. T. Johnson: 1999

3 Ferreiro Gravié, 2006.

Finalmente, las actividades para la activación de conocimientos previos permiten al docente comprobar de una forma sistemática lo que el grupo sabe en cada momento, dándole la oportunidad de realizar adaptaciones constantes en la programación.

10 Estrategias para la activación de conocimientos previos y orientación hacia la tarea.

Algunas de las estrategias que podemos utilizar en esta fase:

1. **Pensar - formar parejas - poner en común.**

    1. El profesor expone un problema o pregunta relacionados con los contenidos que se abordarán en clase.

    2. Los alumnos reflexionan individualmente sobre el mismo, durante un tiempo un par de minutos.

    3. A continuación, los estudiantes se agrupan en parejas y discuten sus puntos de vista sobre el problema.

    4. Finalmente, se realiza una breve puesta en común.

2. **Corrección cooperativa de los deberes.**

    1. Al comenzar la clase, los alumnos se reúnen en parejas para poner en común los deberes.

    2. Las parejas empiezan por el primer ejercicio comparando tanto el resultado como el proceso seguido. Si están de acuerdo, pasan al siguiente. Si no, deben consensuar la forma correcta de hacerlo.

    3. Una vez corregidos todos los deberes, cada pareja pone en común su trabajo con otra.

3. **Parejas de discusión enfocada introductoria.**

    Como preparación para la clase se les puede pedir a los estudiantes que hagan una breve tarea de discusión enfocada inicial.

    1. El profesor plantea algunas preguntas (puede escribirlas en la pizarra o proyectarlas) que serán contestadas a lo largo de la sesión.

    2. Los estudiantes discuten las preguntas en parejas. El objetivo de la discusión está dirigido a promover una organización preliminar de lo que los estudiantes saben sobre los temas que se presentan y qué cubrirá la clase.

    3. Se realiza una breve puesta en común.

4. **Cuestionario inicial.**

    1. El docente entrega a los alumnos un cuestionario inicial (similar a un pequeño *test* pero sin generar nota) consistente en unas pocas preguntas (respuesta múltiple, respuesta corta, redacción) relativas al tema que se abordará en la sesión.

    2. Cada estudiante realiza el control de progreso de forma individual.

    3. Los alumnos se agrupan en parejas o pequeños grupos y comparan sus respuestas.

5. **Frase mural.**

    Otra estrategia de activación es aquella que consiste en escribir en la pizarra o proyectar un mensaje corto alusivo al tema de la lección que iniciamos y orientar a los alumnos para que:

    1. Lo lean con atención.

2. Piensen por un momento al respecto (un minuto, por ejemplo).

3. Se reúnan en pequeños grupos para compartir sus opiniones, puntos de vista o comentarios sobre lo que les sugiere tal planteamiento.

4. Poner en común las ideas en gran grupo.

Aquí, como en otras estrategias de activación, debemos escucharlos atentamente, no interrumpir y aceptar todos y cada uno de los criterios. También son útiles las preguntas de apoyo, como: *"¿Qué te hace pensar eso?"*, etcétera.

El éxito de esta estrategia radica en el contenido del mensaje. El maestro deberá tener mucho cuidado al seleccionarlo, pues entre otros requisitos se debe ajustar al tema y a la intención pedagógica que tengamos.

Una variante de la estrategia anterior es la de presentar una fotografía o lámina y proyectarla en acetato con el retroproyector. Resultan muy útiles las caricaturas, preferentemente sin texto.

6. Construir oraciones con significado.

1. Se les dan a los alumnos de tres a cinco palabras clave del tema que se va a desarrollar; pueden escribirse en la pizarra o proyectarse en la pantalla.

2. Los estudiantes trabajan en parejas para construir distintos enunciados con estas palabras.

3. Finalmente, el docente recoge estas oraciones y las utiliza para ir introduciendo distintos aspectos de la unidad didáctica.

7. Frases incompletas.

Esta valiosa estrategia de activación consiste en que el alumno complete oraciones incompletas. Todos los enunciados tendrán el mismo sujeto; a continuación, se escriben pies forzados que correspondan a cada una de las cinco preguntas básicas: *qué*, *por qué*, *para qué*, *cómo* y *dónde/cuándo*. Por ejemplo:

La Constitución Española:

Es...

Se justifica...

Permite...

Se redactó en...

Se aprobó...

Los alumnos completan los enunciados a partir de sus conocimientos previos y de la intuición que al respecto tengan. No se necesita que consulten fuente alguna para buscar posibles respuestas; lo importante es descubrir con qué conocimientos cuentan para resolver el problema de completar las frases y que, al esforzarse por completarlas, este esfuerzo active las funciones corticales por las sinapsis que se estimulan.

En un segundo momento, los alumnos confrontan (en dúos o tríos) sus respuestas. Después habrá un momento de compartir posibles respuestas en el grupo, lo que permitirá al maestro realizar una valoración diagnóstica inicial, de manera rápida y dinámica, acerca del referente de conocimientos del grupo sobre el tema.

8. Aligerar el ambiente.

Se puede lograr rápidamente un ambiente de cordialidad e informalidad en la clase invitando a los alumnos a utilizar su humor creativo con la materia en cuestión. Esta estrategia permite lograr eso y, al mismo tiempo, hace pensar a los alumnos.

1. Explicar a los alumnos que sería interesante empezar con un ejercicio divertido antes de ponerse serios con la materia.
2. Dividirlos en subgrupos. Asignarles tareas que los induzcan a tomar con humor cualquier tema o concepto importante de su curso.
3. Éstos son algunos ejemplos:
    - *Gobierno: describe el gobierno más opresivo o impracticable que puedas imaginarte.*
    - *Matemática: elabora una lista con los métodos más ineficaces para hacer cálculos matemáticos.*
    - *Salud: crea una dieta lo menos nutritiva posible.*
    - *Gramática: escribe una oración con la mayor cantidad posible de errores gramaticales.*
    - *Ingeniería: diseña un puente destinado a caerse.*
4. Invitar a los subgrupos a presentar sus “creaciones”. Aplaudir los resultados.
5. Preguntar: “*¿Qué han aprendido sobre nuestra materia con este ejercicio?*”

Variaciones…

1. El docente puede bromear con una creación propia sobre la materia.
2. Elaborar un cuestionario de respuesta múltiple sobre el tema que se vaya a dictar. Incorporar el humor a las alternativas propuestas para cada ítem. Para cada pregunta, pedir a los alumnos que escojan la pregunta que tiene más probabilidades de ser incorrecta.

9. Concordar–Discordar.

Esta estrategia de activación consiste en presentarles a los alumnos un mínimo de 10 y un máximo de 20 enunciados breves y redactados en forma tal que provoquen en ellos la reflexión (primero individualmente y después en equipos de no más de cuatro integrantes).

Esta estrategia tiene la finalidad de crear en los alumnos una crisis sociocognitiva, o sea, un conflicto o replanteo sobre la veracidad de un planteamiento o, mejor aún, de un conjunto de ellos sobre el tema de la lección que se inicia, No es un ejercicio de verdadero o falso, ni de sí o no. De lo que se trata es de que, a partir de la lectura del enunciado, el alumno tome posición al respecto y decida si lo hace suyo (concuerda), lo que suele identificarse con la letra C, o lo rechaza (no concuerda, discute) lo que se expresa con la letra D.

El éxito de esta formidable estrategia depende de que el docente:

1. Redacte los enunciados de forma precisa y breve. Al redactar, incluya ciertos términos que anulan la veracidad del planteamiento; por ejemplo: siempre, lo más importante, etcétera.
2. Entregue el ejercicio por escrito a cada alumno.
3. Dé un tiempo a los alumnos para responder individualmente.
4. Pida que se trabaje en equipo y, mediante consenso, se llegue a una respuesta de grupo.

El siguiente es un ejemplo de dicha estrategia:

Tabla1. Ejemplo de ejercicio para la estrategia concordar-discordar.

1.Cualquier cambio en la conducta es el aprendizaje.	
2. Los cambios de la conducta producto de las drogas, el alcohol o de una reacción emocional es el aprendizaje.	
3.Basta con practicar para aprender.	
4.El aprendizaje, más que un cambio de conducta, es un proceso de adquisición de experiencia.	
5.La ejecución o desempeño está determinada por el nivel de aprendizaje.	
6. La memoria mecánica es un proceso que siempre está presente en todo buen aprendizaje.	
7.Hay aprendizaje realmente cuando lo aprendido se inserta adecuadamente en lo ya conocido.	
8. La persona en su integridad aprende y lo hace de forma tal que es muy difícil diferenciar lo afectivo de lo cognitivo.	
9.El aprendizaje exige actividad y comunicación.	
10. Puede haber aprendizaje sin un cambio en la actuación del sujeto.	

10. Confeccionar preguntas.

1. El profesor presenta muy brevemente el tema que se va a tratar durante la unidad didáctica.
2. Cada alumno, en un folio, escribe su nombre y, a continuación, una pregunta que le sugiera el tema.
3. Cuando todos han terminado, las distintas preguntas empiezan a circular entre todos los estudiantes. Los alumnos añaden su nombre debajo de aquellas preguntas de sus compañeros que les resulten interesantes.
4. El docente recoge todas las preguntas y responde a aquéllas que han despertado más interés.

Variaciones…

Se puede desarrollar la misma dinámica sólo que en lugar de preguntas, los alumnos hacen predicciones sobre los asuntos que se tratarán durante la unidad.

MOMENTO 2.

Presentación de los contenidos.

(15-20 minutos)

Esta es la fase en la que presentamos los contenidos que tenemos programados para la sesión. Para conseguir ser eficaces y promover el aprendizaje significativo, es necesario que la presentación no se alargue más de 20 minutos, ya que está demostrado que la asimilación real de información no se prolonga mucho más allá.

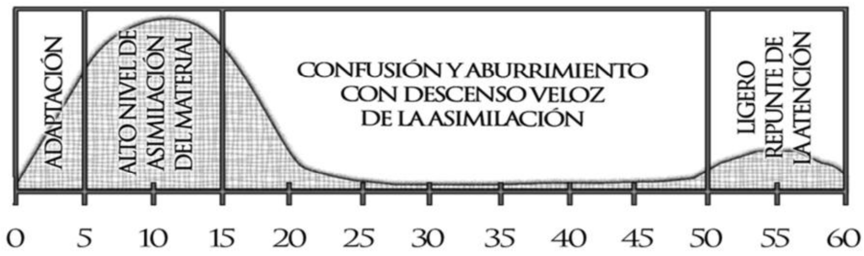


Figura 1. Patrón de atención para una clase de 60 minutos (Stuart y Rutherford)

Esto supone un trabajo previo de selección de aquello que se quiere enseñar, identificando claramente los contenidos fundamentales que se quieren trabajar y presentándolos de una forma secuenciada y clara.

La presentación de los contenidos debe ir enfocada hacia el momento siguiente, de procesamiento de la información. Por ello, los ejercicios y actividades que realicen, deben ser similares a los que se propondrán a los alumnos a continuación.

10 Estrategias para la presentación de los contenidos.

Algunas de las estrategias que podemos utilizar para presentar la información, serían:

1. Exposición

Una buena exposición debe atender a tres momentos fundamentales:

- **Introducción.** En la que se describen los objetivos de aprendizaje. Se trata de comunicar a los alumnos aquello que se les va a explicar a continuación. En este sentido, resulta muy útil facilitar un esquema o mapa conceptual sobre los contenidos que se van a desarrollar.

- **Desarrollo.** En el que presentamos la información de una forma clara, sencilla, organizada en pequeños pasos secuenciados. En esta presentación, resultaría interesante utilizar diversos canales, ya que de esa forma no sólo respetamos los distintos estilos de aprendizaje, sino que somos consecuentes con una concepción próxima a la teoría de las inteligencias múltiples.

  - De igual forma, a lo largo de la presentación, convendría…

  - … repetir de formas distintas los contenidos fundamentales que se pretenden transmitir;

  - … incorporar preguntas que nos permitan comprobar el nivel de asimilación que van teniendo los alumnos (por ejemplo, utilizar la técnica “parada de tres minutos” reseñada anteriormente) y

  - … elaborar guías o fichas de seguimiento que aseguren que los alumnos van procesando la información.

- **Conclusión**. Se trata de un resumen, una recapitulación integradora de la estructura de los contenidos presentados.

Podemos utilizar estrategias cooperativas para mejorar la comprensión de las explicaciones, como por ejemplo, la parada de tres minutos, las parejas cooperativas de toma de apuntes o los equipos de oyentes.

Parada de tres minutos…

Dentro de una exposición, el docente introduce pequeñas paradas de tres minutos, en las que los grupos…

…tratan de resumir verbalmente los contenidos explicados hasta el momento, …redactan dos preguntas sobre esa parte del material.

Una vez transcurridos los tres minutos, cada equipo plantea una de sus preguntas al resto de los grupos. Si una pregunta –u otra muy parecida- ya ha sido planteada por otro equipo, formulan la otra.

Cuando ya se han planteado todas las preguntas, el profesor prosigue la explicación, hasta que haga una nueva parada de tres minutos.

Parejas cooperativas de toma de apuntes

1. El docente forma parejas heterogéneas de toma de apuntes, con el objetivo de que ambos generen una gran cantidad de notas precisas que les permitan aprender y repasar los contenidos tratados.
2. Cada 10 ó 15 minutos, el profesor detiene la exposición y pide a las parejas que comparen sus notas: el alumno A resume sus notas para B y viceversa.
3. Cada alumno debe tomar algo de las notas de su compañero para mejorar las propias.

Equipos de oyentes

1. Dividir a los alumnos en cuatro equipos, y asignar las siguientes tareas.

EQUIPO	ROL	TAREA
1	**Interrogar**	Después de la exposición, formularalmenos dos preguntas sobre el material tratado.
2	**Aprobar**	Después de la exposición,indicar con qué puntos estuvieron de acuerdo o encontraron útiles y porqué.
3	**Desaprobar**	Después de la exposición, comentar con qué discreparon (o encontraron inútil) y explicar por qué.
4	**Dar ejemplos**	Después de la conferencia, brindar aplicaciones o ejemplos específicos del material.

2. Presentar la exposición. Cuando haya terminado, esperar unos momentos para que los equipos puedan completar sus tareas.
3. Pedir a cada grupo que cuestione, apruebe, etc.
4. En la siguiente sesión, los grupos intercambian los roles.

2. Demostración

Se utiliza sobre todo cuando se trata de enseñar procedimientos, destrezas, procesos… A la hora de utilizar este recurso, resulta conveniente realizar las demostraciones más de una vez, si puede ser, siguiendo caminos distintos para llegar al mismo fin.

Una variación interesante podría ser la técnica demostración silenciosa:

Demostración silenciosa

1. Escoger un procedimiento de múltiples etapas que quiera enseñar a sus alumnos.

2. Pedir a los alumnos que observen mientras el docente realiza todo el procedimiento. Hacerlo sin dar explicaciones ni hacer comentarios. Dar un vistazo de la imagen total de toda la tarea. No esperar que los estudiantes lo retengan. Por el momento, sólo se los prepara para el aprendizaje.

3. Formar parejas. Demostrar la primera parte del procedimiento, nuevamente sin hacer comentarios. Pedir a las parejas que conversen sobre lo que observaron hacer. Solicitar un voluntario que explique lo que ha visto. Resaltar las observaciones correctas.

4. Indicar a las parejas que practiquen la primera parte del procedimiento. Cuando lo hayan dominado, proceder con una demostración silenciosa de las siguientes partes y continuar con la práctica en parejas.

5. Finalizar la clase pidiendo a los alumnos que realicen todo el procedimiento sin ninguna ayuda.

3. Visionados

Para presentar los contenidos, también podemos servirnos de extractos de películas, documentales o servirnos de fotografías que resultan especialmente adecuados. Este recurso, además de utilizar más de un canal para la presentación de la información, tiene la ventaja de poseer un carácter motivador que potencia el proceso de aprendizaje.

A la hora de realizar un visionado, conviene no utilizar toda la sesión, ya que es necesario respetar el resto de momentos de la sesión. Así mismo, sería interesante acompañar el visionado de guías de seguimiento que aseguren el procesamiento de los contenidos. Estas guías deberían ser breves y contener preguntas directamente relacionadas con los contenidos fundamentales, que puedan responderse en pocas palabras.

4. Trabajo sobre materiales

Entregar a los alumnos un texto, documento, página Web… sobre el que deben trabajar para entrar en contacto con los contenidos. Una buena forma de hacerlo es utilizando técnicas cooperativas:

Parejas cooperativas de lectura

1. Forme parejas de alumnos (uno de buen nivel de lectura y otro de bajo nivel en cada pareja). Dígales qué páginas quiere que lean.

2. Ambos alumnos leen todos los encabezamientos para tener un panorama general.

3. Ambos alumnos leen en silencio el primer párrafo. El alumno A es inicialmente el encargado de resumir y el alumno B es el que debe verificar la precisión. Después de cada párrafo, invierten los roles. El que debe resumir sintetiza en sus propias palabras el contenido del párrafo para su compañero. El encargado de verificar la precisión escucha con cuidado, corrige errores y agrega la información omitida. Luego, observa cómo el material se relaciona con algo que ya conoce.

4. Los alumnos pasan al párrafo siguiente, invierten sus roles y repiten el procedimiento. Continúan así hasta haber leído todo. Resumen y acuerdan el sentido general del material asignado.

Gemelos lectores

1. El profesor asigna una lectura y forma “parejas de gemelos”.
2. FASE 1: Prelectura. Los alumnos, de forma individual, “echan un vistazo” a los elementos más destacados del texto (título, subtítulos, textos en negrita, imágenes, tablas, pies de foto, recuadros...), de cara a construir una primera idea sobre el mismo.
3. FASE 2: Hipótesis. Cada miembro de la pareja comparte su hipótesis sobre el contenido del texto. Discuten brevemente sobre ello.
4. FASE 3: Lectura general. Los alumnos leen de forma individual y silenciosa todo el texto. Al finalizar, comparten la idea general que han construido sobre el material y la contrastan con su hipótesis anterior.
5. FASE 4: Lectura detallada. La pareja vuelve a leer el texto, párrafo a párrafo, identificando la idea principal de cada uno. Para ello, utilizan el siguiente procedimiento:
    - El alumno A lee el primer párrafo, mientras el alumno B sigue la lectura.
    - A señala la idea principal del párrafo, mientras B corrige posibles errores, agregando o quitando información.
    - A continuación se intercambian los roles.
    - A y B continúan de esta manera hasta completar la lectura.
    - Al finalizar el texto realizan un resumen del mismo.

El aprendizaje parte de una pregunta

El proceso de aprender algo nuevo es más efectivo si el alumno tiene una actitud más activa que receptiva. Una manera de generar esta disposición es estimular a los estudiantes para que investiguen la materia por su cuenta, sin explicaciones previas por parte del docente. Esta simple estrategia impulsa a los alumnos a formular preguntas, lo cual constituye la clave del aprendizaje.

1. Distribuir material instructivo entre los alumnos (transcribir una página de un texto o prepare un material escrito). En la elección del material, lo importante es que estimule preguntas por parte del lector. Lo ideal es un material escrito que proporcione mucha información pero carezca de detalles o explicaciones. También se puede usar un texto abierto a las interpretaciones. El objetivo es despertar curiosidad.
2. Proponer a los alumnos que estudien el material con un compañero. Pedirles que traten de comprender su sentido y que identifiquen lo que no entiendan escribiendo sus preguntas junto a las dudas. Instarlos a que hagan todas las preguntas que deseen. Si el tiempo lo permite, transforme las parejas en cuartetos y permita que los grupos se ayuden entre ellos. Por ejemplo, un profesor de física. puede repartir un diagrama que ilustre cómo la energía potencial se convierte en cinética mostrando a un equilibrista de circo saltando de un poste de 50 metros. Los alumnos trabajan con un compañero en el análisis de la ilustración y la determinación de preguntas (por ejemplo: *¿Cuál es el momento exacto en que la energía potencial se transforma en cinética?, ¿Cuál es la diferencia básica entre ambos tipos de energía?*).
3. Reunir a la clase y recoger las preguntas de los alumnos. De esta manera, el docente enseña a través de sus respuestas a las dudas de ellos, en lugar de utilizar una lección preestablecida.

Otra posibilidad es escuchar todas las preguntas juntas y luego dictar una clase previamente preparada, dedicando un interés especial a responder las dudas planteadas.

Variaciones…

1. Si el docente considera que los estudiantes pueden sentirse perdidos al tratar de estudiar el material por su cuenta, antes de formar los grupos de estudio puede proporcionarles cierta información para orientarlos o brindarles los conocimientos básicos que necesitarán para poder investigar solos.
2. Empezar el procedimiento con un estudio individual en lugar de hacerlo por parejas.

5. Pequeños experimentos

En la línea del aprendizaje por descubrimiento, podríamos proponer a los alumnos la realización de un pequeño experimento a partir del cual, deban realizar hipótesis, contrastarlas y construir conocimiento. Podemos promover que la investigación se realice de forma cooperativa utilizando estrategias específicas para ello:

Parejas cooperativas de investigación

Se propone a los alumnos que realicen un trabajo o proyecto de investigación.

FASE 1: Plantear el tema.

- El profesor plantea el tema a investigar, partiendo de una situación problemática que requiere una respuesta.
- Los alumnos, dentro de sus equipos-base, discuten el tema planteado, asegurándose que todos lo comprenden.

FASE 2: Formular una hipótesis.

- Los alumnos, de forma individual, articulan una respuesta personal a la cuestión planteada, partiendo de su intuición y sus conocimientos previos sobre el tema.
- A continuación, se ponen en común dentro del equipo base las distintas hipótesis de sus miembros, buscando consensuar una, que será puesta a prueba en la investigación.

FASE 3: Elegir y diseñar un plan

- El equipo elabora un plan para comprobar la hipótesis, estableciendo la secuencia de acciones que desarrollarán.
- Cuando han diseñado el plan, se aseguran de que todos lo comprenden.

FASE 4: Ejecutar el plan.

- El equipo se subdivide en parejas para desarrollar el plan elaborado.

FASE 5: Elaborar las conclusiones.

- Tras ejecutar el plan, cada pareja escribe sus conclusiones.
- A continuación, la contrastan con la otra pareja del equipo, buscando un consenso.

FASE 6: Comprobar la hipótesis.

- Finalmente, el equipo-base contrasta sus conclusiones con la hipótesis planteada anteriormente.

6. **Diálogos**

   Partiendo de imágenes, preguntas, afirmaciones… los alumnos dialogan tratando de establecer los contenidos que queremos presentar. Entronca con el método socrático y el aprendizaje dialógico de Freire.

7. **Enseñanza programada**

   Los alumnos trabajan sobre fichas secuenciadas en las que los contenidos se presentan de forma organizada a través de breves extractos de teoría acompañada de ejercicios relacionados. Parte de una tradición conductista, en la que se parte de la idea de que los pequeños éxitos motivan a los alumnos a seguir trabajando. En principio, permite una cierta personalización del proceso de aprendizaje, ya que los alumnos avanzan a su ritmo por el currículo.

8. **Mini rompecabezas**

   1. Formamos grupos de 4 alumnos.
   2. Distribuya un conjunto de materiales a cada grupo de manera tal que cada uno tenga parte de los materiales.
   3. Pida a los alumnos que formen una **pareja de preparación** junto con un integrante de otro grupo que tenga la misma parte que ellos. Los alumnos tendrán dos tareas:
      (a) Aprender y volverse expertos en su parte de los materiales.
      (b) Planificar cómo enseñar su parte a los demás integrantes de sus grupos.
      (c) Elaboran un plan de enseñanza.
   4. Los alumnos forman **parejas de práctica** con un integrante de otro grupo que tenga la misma parte que ellos pero que haya estado en otra pareja de preparación. Las tareas consisten en que los miembros practiquen la enseñanza de su parte del material asignado, escuchen con atención la práctica de su compañero e incorporen las mejores ideas de la presentación del otro a la propia.
   5. Los alumnos vuelven a sus grupos cooperativos. Sus tareas son:
      (a) Enseñar su parte a los otros integrantes del grupo.
      (b) Aprender lo que los otros les enseñan.
   6. Finalmente, evaluamos el grado de dominio del material que tienen los alumnos por medio de una evaluación individual.

9. **Los cuatro sabios**

   1. Días antes, el profesor elige cuatro estudiantes de la clase que dominen un determinado tema, habilidad o procedimiento. Éstos se convierten en "sabios" en una determinada cosa. Les pide que se preparen bien, puesto que deberán enseñar lo que saben a sus compañeros de clase.
   2. En la sesión, el portavoz de cada equipo base acude a uno de los “cuatro sabios” para que le explique su tema, habilidad o procedimiento.
   3. El portavoz vuelve a su equipo a explicar lo aprendido al resto de sus compañeros.

Consejos:

- Asegurar que haya tantos expertos como equipos-base, de cara a que el trabajo no se ralentice porque algún portavoz tiene que “esperar su turno”.
- Pedir a los sabios que generen una serie de ejercicios para que los equipos-base puedan trabajar sobre lo aprendido.
- Cuando los sabios han explicado a todos los portavoces, pedirles que se muevan por la clase asesorando a los grupos sobre su tema, habilidad o procedimiento.

10.WebQuest[4]

Según Bernie Dodge, creador de las WebQuest, se trata de “una actividad de investigación en la que la información con la que interactúan los alumnos proviene total o parcialmente de recursos de la Internet”.

En las WebQuest los alumnos, formando equipos cooperativos, trabajan sobre un conjunto de tareas que se derivan de un “escenario” inicial en que se plantea una situación problema o proyecto de producción. El acceso a los contenidos se produce a través de un conjunto de recursos de Internet que los estudiantes deben analizar, elaborar y aplicar en soluciones creativas.

Para Jordi Adell, una WebQuest propone a los alumnos una tarea factible y atractiva que les lleva a un procesamiento muy profundo de la información, ya que deben seleccionarla, analizarla, sintetizarla, comprenderla, transformarla, crearla, juzgarla, valorarla, publicarla, compartirla, etc. Se trata de algo mucho más profundo que responder preguntas o copiar lo que aparece en la pantalla del ordenador a una ficha (“copiar y pegar” e “imprimir” son los peores enemigos de “comprender”).

Las WebQuests suelen ser propuestas muy estructuradas que promueven la autonomía del alumnado. Se concretan siempre en un documento para los alumnos, normalmente accesible a través de la web, dividido en apartados como introducción, descripción de la tarea, del proceso para llevarla a cabo y de cómo será evaluada y una especie de conclusión.

MOMENTO 3

Procesamiento de la información

(15-20 minutos)

Para aproximarnos al procesamiento de la información, acudimos nuevamente a Ferreiro Gravié[5]:

> *“El procesamiento de la información consiste en la secuencia de acciones ininterrumpidas que permiten al sujeto captar y seleccionar estímulos de diferentes tipos (entrada al sistema), procesarlos según necesidades e intereses (procesos del sistema), para dar respuestas a los mismos (salida del sistema). […]*
>
> *El momento PI, de procesamiento de la información, es aquel momento de una clase de aprendizaje cooperativo en el que los alumnos, guiados por el maestro y empleando determinadas estrategias que el docente orienta, procesan de forma activa, independiente y creadora, un contenido de enseñanza.*
>
> *El momento del procesamiento de la información puede ser individual (cada alumno en solitario), en equipo, o bien, primero solos (cada uno lo suyo) y más tarde con la participación de otro o de otros.*

4 La información sobre este recurso ha sido tomada de http://www.webquest.es

5 Ferreiro Gravié, 2006.

> *Este momento y las estrategias que durante el mismo se emplean tienen la finalidad, de que el estudiante se apropie de la lógica del contenido de aprendizaje. […]*
>
> *El maestro, en su papel de mediador, debe crear situaciones de aprendizaje que posibiliten no tan sólo las interrelaciones entre los alumnos para aprender, sino también la interactividad o confrontación del sujeto que aprende con el objeto de conocimiento; es éste, precisamente, el momento PI, de procesamiento de la información."*

Por otra parte, está demostrado que aquellos contenidos sobre los que se trabaja inmediatamente después de ser presentados, se asimilan de una forma más profunda. Sin embargo, en algunas ocasiones, en aras de abarcar el máximo número de contenidos curriculares, las clases se limitan a la simple presentación de información, dándose por hecho de que los alumnos, de forma individual y fuera del entorno escolar, realizarán las tareas necesarias para comprenderlo en profundidad.

Esta situación presenta dos problemas evidentes: por un lado, el docente no puede estar seguro de que los alumnos efectivamente realicen ese trabajo, por más que haya establecido un conjunto de deberes que el estudiante debe realizar; por otro, aunque lo haga, no tenemos la seguridad de que el procesamiento se realice de una forma adecuada y que los alumnos aprendan correctamente los contenidos.

Una buena solución es limitar el tiempo de la exposición y arbitrar espacios para que ese procesamiento se realice en el aula. De esa forma conseguimos varias ventajas:

- En principio, podemos tener una certeza mayor de que los alumnos realicen este proceso.
- El hecho de realizarlo de forma inmediata, tras la presentación de los contenidos, asegura una mayor comprensión de los mismos.
- El docente puede supervisar el proceso, de forma que aumenten las posibilidades de que los aprendizajes estén bien construidos.
- Podemos beneficiarnos de las enormes ventajas que ofrece la interacción cooperativa para el desarrollo de estos procesos: la confrontación de puntos de vista, el andamiaje, la tutorización…

Ahora bien, esto no significa que haya que dejar de lado el trabajo individual en casa –recordemos que la idea es que el aprendizaje cooperativo permita a los alumnos aprender en grupo a hacer cosas de forma individual–; todo lo contrario, este trabajo compartido de procesamiento en el aula beneficia de forma evidente el trabajo individual, ya que el alumno se encontrará mejor preparado para asumirlo si previamente ha realizado tareas similares en clase, recibiendo el apoyo, las explicaciones y las correcciones pertinentes, tanto por parte del docente como de sus compañeros.

10 Estrategias para el procesamiento de la información.

1. **Lápices al centro.**

    1. Se entrega a los equipos una hoja con tantas preguntas/ejercicios como miembros tienen. Cada alumno se hace cargo de una.

    2. Los lápices se colocan al centro de la mesa para indicar que en esos momentos sólo se puede hablar y escuchar, y no se puede escribir. Cada uno de los alumnos…

        … lee en voz alta su pregunta o ejercicio,

        … se asegura que todo el grupo expresa su opinión y

        … comprueba que todos comprenden la respuesta acordada.

    3. Cada alumno coge su lápiz y responde a la pregunta por escrito. En este momento, no se puede hablar, sólo escribir.

4. A continuación, se vuelven a poner los lápices en el centro de la mesa, y se procede del mismo modo con otra pregunta o cuestión, esta vez dirigida por otro alumno.

2. Uno para todos.

1. Los alumnos trabajan sobre una serie de ejercicios dentro de sus grupos, asegurándose que todos realizan correctamente la tarea.

2. Una vez finalizado el tiempo, el profesor recoge al azar el cuaderno de ejercicios de un miembro del equipo, lo corrige, y la calificación obtenida es la misma para todos los miembros del equipo.

3. De este modo, evalúa la producción de uno (un alumno) para todos (el conjunto del equipo).

3. 1-2-4.

1. El profesor plantea un problema o pregunta.

2. Cada alumno dedica unos minutos a pensar en la respuesta.

3. Ponen en común sus ideas con su "pareja de hombro" dentro del equipo-base, tratando de formular una única respuesta.

4. Luego, las parejas contrastan sus respuestas dentro del equipo-base, buscando la respuesta más adecuada a la pregunta/problema planteada.

5. El profesor dirige una puesta en común en gran grupo, pidiendo a un miembro de cada equipo-base que exponga la respuesta de su grupo.

4. Parejas de ejercitación-revisión.

1. Formamos grupos de 4 alumnos, estableciendo además dos parejas en cada uno.

2. El alumno A lee el problema y explica paso a paso los procedimientos y las estrategias necesarios para resolverlo. El alumno B verifica la precisión de la solución y proporciona estímulo y guía.

3. El alumno B resuelve el segundo problema, describiendo paso a paso los procedimientos y las estrategias necesarios para hacerlo. El alumno A verifica la solución y proporciona estímulo y guía.

4. Cuando la pareja termina los problemas, sus integrantes verifican sus respuestas con la otra pareja. Si no están de acuerdo, resuelven el problema hasta llegar a un consenso sobre la respuesta. Si están de acuerdo, siguen trabajando por parejas.

5. El procedimiento se repite hasta terminar todos los problemas.

5. Parejas de escritura y edición cooperativas.

Cuando la actividad exija que sus alumnos escriban una composición, un informe o un poema, o que repasen lo que han leído, recurra a las parejas de escritura y edición cooperativas.

1. El docente forma parejas. En cada una de ellas debe haber, al menos, un buen lector.

2. El alumno A describe al alumno B qué piensa escribir. El alumno B escucha cuidadosamente, hace preguntas y esboza la composición del alumno A. Luego, le da el plan delineado escrito al alumno A.

3. El procedimiento se invierte. B describe a A lo que piensa escribir; A lo escucha con atención y escribe un esbozo de la composición de B, que luego le entrega.

4. Los alumnos investigan individualmente los materiales que necesitan para escribir sus composiciones, atentos también a los materiales que puedan resultar útiles para sus compañeros.

5. Ambos alumnos trabajan juntos en la escritura del primer párrafo de cada una de las composiciones. Esto asegura que ambos tengan un buen comienzo

6. Los alumnos escriben el resto de sus composiciones individualmente.

7. Una vez terminadas, los alumnos leen las composiciones de sus compañeros, corrigen las mayúsculas, la puntuación, la ortografía, el uso del lenguaje, el empleo de oraciones tópicas y otros aspectos de la escritura especificados por el docente. Los alumnos también se hacen sugerencias mutuas para la revisión.

8. Los alumnos repasan sus composiciones, haciendo todas las revisiones sugeridas.

9. Los alumnos releen la composición de sus respectivos compañeros y firman (indicando así que ellos aseguran que no hay errores en la composición).

6. Parejas de práctica y ensayo.

Esta es una estrategia simple para practicar y ensayar cualquier habilidad o procedimiento con un compañero de aprendizaje. El objetivo es procurar que ambos integrantes puedan realizar la tarea.

1. Escoger un conjunto de habilidades o procedimientos que se desee transmitir a los alumnos. Formar parejas. Dentro de cada pareja, asignar dos roles: *el que explica o demuestra* y *el que verifica*.

2. El primero explica o demuestra cómo realizar cualquier habilidad o procedimiento específico. El segundo verifica que la explicación y/o demostración es conecta, estimula y proporciona entrenamiento en caso necesario.

3. Los integrantes de las parejas invierten sus roles y reciben otra asignación.

4. El proceso continúa hasta que se hayan ensayado todas las habilidades.

Variaciones…

1. Utilizar un procedimiento en varias etapas en lugar de un conjunto de ellos. Hacer que un integrante de la pareja ejecute la primera etapa, el otro la siguiente, y que continúen rotando hasta que se haya completado toda la secuencia.

2. Cuando las parejas hayan finalizado su trabajo, proponer una demostración frente a los demás grupos.

7. Mapa conceptual a 4 bandas.

1. Al terminar el trabajo sobre un contenido, tema o material, cada equipo elabora un mapa conceptual que sintetice sus aspectos principales.

2. El profesor determina con el grupo-clase los apartados que deberá recoger el mapa conceptual.

3. Los equipos se reparten los distintos apartados, de modo que cada integrante se hace responsable de uno y lo desarrolla.

4. Los equipos ponen en común los distintos apartados y verifican la coherencia del mapa resultante.

5. Los integrantes del equipo copian el mapa, que servirá como material de estudio.

8. Intercambiar dificultades.

1. Tras una explicación, el docente pide a los alumnos que…

… piensen en una dificultad que hayan encontrado a lo largo de la exposición;

… la formulen como un problema o pregunta; y

… la escriban en el anverso de una tarjeta proporcionada por el docente.

2. Los equipos-base trabajan sobre los problemas/preguntas de sus miembros, tratando de responderlas. A continuación, cada alumno escribe la respuesta en el reverso de su tarjeta.

3. Finalmente, los equipos-base intercambian con otro sus tarjetas y tratan de responder a los problemas/preguntas. Cuando han consensuado una respuesta, la cotejan con el reverso de la tarjeta. Si es correcto, pasan a la siguiente; si no, revisan el proceso para introducir las correcciones necesarias.

9. Construir un glosario.

Cada tema, capítulo, asignatura o disciplina tiene un conjunto de conceptos que le son propios y que constituyen su vocabulario. Muchas veces éste aparece como un glosario que forma parte del libro de texto, o bien, el docente lo proporciona a sus alumnos. Una mejor práctica resulta que, en equipo, los alumnos construyan (durante el curso o al final del mismo) el glosario de la asignatura; un requisito para ello es que el grupo sea capaz de seleccionar los términos clave y domine la estrategia de definición de conceptos.

Los pasos para la construcción del glosario son:

1. Seleccionar los términos.

2. Distribuir los términos entre los integrantes del o de los equipos.

3. Definir cada término. Hacer tantas aproximaciones como sea necesario hasta lograr una definición que, por consenso del equipo, sea la más correcta.

4. Ordenar los términos definidos por riguroso orden alfabético.

5. Establecer la relación entre los términos indicando, después de la definición dada, con cuál o cuáles se relaciona.

10. Tutoría por parejas de toda la clase.

1. Los alumnos se agrupan en parejas.

2. Se asignan dos roles: tutor – tutorado.

3. El alumno tutor presenta problemas a su compañero. Pueden ser “creados” por el tutor o proporcionados por el profesor.

4. Si la respuesta es correcta, ganan puntos; si no, el tutor da la respuesta y el tutorado corregir su error.

5. Pasados 10 minutos, los roles se intercambian y la dinámica vuelve a empezar.

6. Las parejas que obtienen una cantidad determinada de puntos, reciben la recompensa estipulada.

MOMENTO 4.

Recapitulación de lo aprendido.

(5-10 minutos)

Entendemos recapitular, como recordar, repasar, volver sobre lo trabajado. Dentro de nuestra propuesta, puede definirse como sintetizar de forma ordenada los contenidos tratados en clase.

Con la recapitulación buscamos contrarrestar el olvido, que borra las adquisiciones realizadas durante el proceso de aprendizaje. Podemos definir el olvido como la incapacidad de recordar total o parcialmente lo almacenado en la memoria. Desde esta perspectiva, podríamos justificar los procesos de recapitulación porque lo que no se recuerda o se ejercita, se debilita con el tiempo, llegando incluso a perderse definitivamente.

Así mismo, la recapitulación ofrece al alumno la oportunidad de ordenar la información asimilada, de forma que facilita la construcción de esquemas de conocimiento que no sólo aseguran un aprendizaje de mayor calidad, sino que constituirán una base más sólida sobre la que abordar nuevos aprendizajes.

10 Estrategias para la recapitulación de lo aprendido.

Algunas de las estrategias que podemos utilizar en esta fase, y que se recogieron anteriormente en la parte dedicada al aprendizaje cooperativo informal, son:

1. **Cierre de la discusión enfocada.**

   Al final de la clase los estudiantes deben discutir el contenido de la misma. Deben disponer de cuatro o cinco minutos para resumir y discutir el material presentado. La discusión debería producir en los estudiantes la integración de lo que acaban de aprender en las estructuras de conocimiento existentes. La tarea también puede dirigir a los estudiantes hacia el contenido de los deberes o al contenido de la siguiente clase. Esto produce el cierre de la clase. Por ejemplo, a las parejas de estudiantes se les puede pedir que listen las cinco cosas más importantes que han aprendido y dos preguntas que les gustaría formular. El profesor recoge las respuestas y las revisa para reforzar la importancia del procedimiento y también para observar qué han aprendido los estudiantes. Devolver los papeles periódicamente con breves comentarios del profesor también ayuda a reforzar este procedimiento ante los estudiantes.

2. **Cierre para las parejas cooperativas escribientes.**

   Es útil para los profesores pedirle a los estudiantes que escriban un ‘resumen-de-un-minuto’ (*one minute paper*) al final de cada clase que describa la cosa más importante que hayan aprendido y la cuestión sin respuesta más importante que todavía tengan (Light 1990). Esto ayuda a los estudiantes a enfocarse en los temas centrales del curso.

3. **Folio giratorio.**

   1. El docente entrega a los grupos un folio con una frase relacionada con los contenidos que se trabajaron durante la sesión.

   2. El folio se coloca en el centro de la mesa del grupo y va girando para que cada alumno escriba las ideas que la frase le sugiere.

   3. Los grupos intercambian el folio con otros equipos y añaden algunas ideas que no estén recogidas.

4. Finalmente, cada grupo recoge su folio con las aportaciones de otros grupos y trata de construir una idea general sobre la frase.

4. Inventario de lo aprendido en clase.

Al finalizar la clase, el profesor pide a los alumnos que realicen un inventario de lo aprendido, utilizando un formato similar al siguiente:

Hoy, día de del año ,en clase de

He aprendido

y también

Una vez realizado de forma individual, se pone en común dentro del grupo, de cara a obtener un inventario más exhaustivo.

5. Revisión de los aprendizajes.

Esta estrategia proporciona a los alumnos la ocasión de resumir lo que han aprendido y de presentar su resumen ante los demás. Es una buena manera de instar a los estudiantes a revisar lo que han aprendido por su cuenta.

1. Dividir a los alumnos en grupos de dos a cuatro miembros.
2. Pedir a cada grupo que cree su propio resumen de la clase. Estimularlos a elaborar un bosquejo, un mapa mental o cualquier otro medio que les permita comunicar el resumen a los demás.
3. Utilizar cualquiera de las siguientes preguntas para orientar el trabajo.
   - ¿Cuáles fueron los principales temas que hemos examinado?
   - ¿Cuáles fueron algunos de los principales puntos que surgieron en la clase de hoy?
   - ¿Qué experiencias han tenido hoy? ¿Qué han extraído de ellas?
   - ¿Qué ideas o sugerencias se llevan de esta clase?
4. Invitar a los alumnos a compartir sus resúmenes. Aplaudir sus esfuerzos.

Variaciones…

5. Proporcionar un bosquejo con los temas del día y pedir a los alumnos que completen los detalles.

6. Galería de aprendizaje.

1. Dividir a los alumnos en grupos de cuatro miembros.
2. Pedir a cada grupo que dialogue sobre lo que sus miembros “se llevan de la clase”. Esto puede incluir los siguientes temas: nuevos conocimientos; nuevas habilidades; perfeccionamiento en algún ámbito; nuevo o renovado interés en algún contenido; mayor seguridad en el uso de un procedimiento…
3. Empapelar las paredes con estas listas.
4. Pedir a los alumnos que recorran las listas y coloquen una marca junto a los enunciados de otros que también hayan significado un aprendizaje para ellos.
5. Examinar los resultados, mencionando los factores más comunes y también los más inesperados.

7. Brindar preguntas y recibir respuestas.

Ésta es una estrategia pensada para el repaso del material trabajado en clase.

1. Entregar dos tarjetas a cada alumno.
2. Pedir a los alumnos que completen las oraciones de las tarjetas.

   Tarjeta 1: Todavía tengo una pregunta sobre ...

   Tarjeta 2: Puedo responder a una pregunta sobre ...

3. Formar grupos y pedir a cada uno que elija la “pregunta a formular” más pertinente y la “pregunta a responder” más interesante de las tarjetas que poseen los miembros de su grupo.
4. Pedir a cada grupo que informe la “pregunta a formular” que ha escogido. Averiguar si en toda la clase hay alguien que pueda responderla. En caso contrario, debe hacerlo el docente.
5. Pedir a cada grupo que informe la “pregunta a responder” que ha escogido. Hacer que los miembros delgrupo compartan la respuesta con el resto de la clase.

8. Informar acerca de lo realizado y aprendido.

Informar qué se realizó, cómo y cuál fue el aprendizaje obtenido ayuda a interiorizar procesos y resultados. Puede hacerse individualmente o en equipo. El formato que se presenta enseguida puede usarse para informar lo realizado por el grupo cooperativo.

a) Hoy es:

---

b) La tarea realizada fue:

Cumplimos la tarea de la siguiente manera:

---

c) Aprendimos lo siguiente:

---

d) Lo aprendido lo podemos aplicar en:

---

9. La sustancia.

Estructura pensada para determinar las ideas principales – lo que es sustancial – de un texto o de un tema.

1. El profesor pide a los alumnos que escriban una frase sobre una idea principal de un texto o del tema trabajado en clase.
2. Una vez escrita, la enseñan a sus compañeros de equipo y entre todos discuten si está bien o no, la corrigen, la matizan o la descartan.
3. Cuando se han discutido las frases de todos los miembros del grupo, se ordenan de una forma lógica y cada uno las copia en su cuaderno. De esta manera tienen un resumen de las principales ideas de un texto o del tema trabajado.

10. Ejercicios para el desarrollo de la transferencia.

1. El docente prepara una ficha de trabajo para el desarrollo de la transferencia, con las siguientes cuestiones:

    a) ¿Para qué te sirve lo tratado hoy en clase? (responder mentalmente, por escrito, o bien, verbalmente):

    - En tu propia vida.
    - Para los demás.
    - Para la sociedad.

    b) ¿Cómo podrías "hacer uso" de lo aprendido?

    - De manera inmediata.
    - En el futuro.
    - En el pasado, si lo hubieras sabido.

    c) ¿Cómo puedes relacionar lo aprendido hoy con otros temas o contenidos? ¿Con qué lo asocias?

    d) Imagínate una situación donde puedas aplicar lo estudiado hoy. Piensa primero y luego disponte a exponerlo que se te ocurrió.

    e) ¿A qué te compromete este nuevo aprendizaje?

    f) En el futuro, ¿qué quisieras aprender al respecto? Y, ¿cómo lo harías?

    g) ¿Qué fue lo útil y qué lo irrelevante de lo que se dijo, hizo, etcétera?

    h) A lo aprendido, ¿qué le puedes añadir, aportar, etcétera?

    i) De todo lo estudiado selecciona algo importante, algo que puedes aplicar y algo para profundizar (IAP).

2. Los alumnos se agrupan en parejas para entrevistarse mutuamente siguiendo el esquema de la ficha. El trabajo puede realizarse de forma oral o escrita (en este caso, el entrevistador escribiría las ideas del entrevistado)

Para hacer referencia al artículo:

Departamento de Innovación del Colegio Ártica. (2015). La sesión cooperativa. La interacción al servicio del aprendizaje significativo. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 195-215). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

TALLER: JUGANDO, MANIPULANDO Y HACIENDO PREGUNTAS TAMBIÉN APRENDEMOS MATEMÁTICAS

Rosa María Fernández Barcenilla, María Luisa Novo Martín

Facultad de Educación y Trabajo Social de Valladolid.

Resumen

Desde este taller, mediante una metodología activa y participativa, se pretende acercar al profesorado de Educación Infantil, propuestas didácticas motivadoras mediante actividades, materiales, juegos… para que su alumnado pueda disfrutar "haciendo matemáticas". Se expondrán contextos reales de aprendizaje y se comprobarán las numerosas oportunidades que se presentan para trabajar diferentes contenidos matemáticos, ya que la enseñanza de las matemáticas debe adaptarse a las nuevas situaciones socio-culturales. No se trata de transmitir unos conocimientos, tenemos que crear situaciones en las que los niños y las niñas puedan comenzar a razonar, a imaginar, a descubrir, a intuir, a probar, a generalizar, a utilizar técnicas, a aplicar destrezas, a estimar, a comprobar resultados, etc. Nuestra finalidad será conseguir que nuestros estudiantes sean competentes, no solamente en un contexto académico, sino en su vida cotidiana.

Palabras clave: *educación matemática infantil, metodología activa, juegos, aprendizaje en contexto.*

PRESENTACIÓN

Con nuestra propuesta se pretende acercar al profesorado de Educación Infantil ejemplos de situaciones de aprendizaje en las que los contenidos matemáticos adquieran sentido, es decir, que nos proporcionen información, nos sirvan para organizar y comprender el mundo que nos rodea. Se trata de desarrollar las competencias matemáticas en los más pequeños. Desde la Escuela se ayudará a los niños a vivir situaciones de actividad matemática, los niños no aprenden matemáticas recibiendo y acumulando pasivamente información del entorno, sino que lo hacen a través de un proceso activo de elaboración de significados.

En este nivel juegan un papel decisivo todo tipo de materiales tanto específicos como ambientales: calendario, reloj, calculadora, cintas métricas, básculas, catálogos de supermercados, recetas de cocina, objetos tridimensionales, juegos, etc.

Lo interesante de esta experiencia es la planificación de actividades en las que conjuntamente el alumnado y el profesorado reflexionen sobre la funcionalidad de los conceptos matemáticos, que, además de su abstracción son un instrumento que permite resolver problemas de la vida cotidiana.

PLANTEAMIENTO TEÓRICO

Los planteamientos teóricos que sustentan este taller se basan en las siguientes ideas de Canals (1992), la actividad matemática que se genera en el aula debe tener en cuenta los siguientes criterios:

Ayudar a los niños a desarrollar su pensamiento lógico, no sólo se trata de aprender los números, van a descubrir el mundo que les rodea, poco a poco irán construyendo el esquema mental del espacio…

No se trata de transmitir unos conocimientos, se crearán situaciones en las que los niños puedan comenzar a razonar, a imaginar, a descubrir, a intuir, a probar, a generalizar, a utilizar técnicas, a aplicar destrezas, a estimar, a comprobar resultados…Las matemáticas ponen en juego muchas facultades de los niños. Todas las acciones que realizan y las relaciones que descubren van a aprender a expresarlas verbalmente, gráficamente y darán sus primeros pasos en el lenguaje matemático.

Se han de poner en juego muchas capacidades como la memoria, la creatividad, la intuición…Las matemáticas desempeñan un importante papel en la educación de la persona. Se trata de disfrutar "haciendo matemáticas".

OBJETIVOS GENERALES DEL TALLER

Al diseñar e implementar este taller lo que se quiere conseguir trasladar a la Escuela es:

Potenciar el uso de materiales manipulativos y juegos para desarrollar la Lógica en Educación Infantil.

Manipular objetos y colecciones para formar las ideas iniciales de los números.

Presentar actividades para atender a la diversidad del alumnado.

Aprender a observar las reacciones de los niños y a fomentar el diálogo.

Aprovechar cada situación para ver el entorno con "ojos matemáticos"

Contagiar a los niños el entusiasmo por las matemáticas y fomentar la creatividad.

Jugar para aprender.

CONTENIDOS MATEMÁTICOS

Actividades para desarrollar la Lógica en Educación Infantil.

Actividades para construir las nociones de número y operación utilizando el material Herbinière-Lebert.

Actividades para construir el concepto masa-peso. Las balanzas.

Taller de cuentos con el tangram.

Reflexión sobre una situación de aprendizaje en contexto: nuestro pueblo o ciudad.

DESARROLLO DE ACTIVIDADES

Según Berdonneau (2008) es muy importante el desarrollo de los sentidos para iniciar el trabajo en las actividades. Además de utilizar los cinco sentidos habituales, se pueden desarrollar:

El sentido térmico; con él pueden apreciar las temperaturas.

El sentido cromático; con él discriminan los matices y la gama de colores.

El sentido estereognóstico; para discernir las formas en el plano o en el espacio manipulándolas.

El sentido bárico les sirve para la percepción de las masas.

El sentido kinestésico; que sirve para conocer los movimientos de las extremidades superiores, su coordinación y la motricidad fina.

ACTIVIDADES PARA DESARROLLAR LA LÓGICA EN EDUCACIÓN INFANTIL

La comprensión de los conceptos matemáticos se desarrolla, fundamentalmente, en cuatro fases:

Manipulativa: Se refiere a la experimentación directa con los objetos.

Oral.: Se trata de verbalizar la experiencia.

Gráfica: Se representan las situaciones experimentadas.

Abstracta.: Es la etapa de conceptualización.

Por ejemplo: Si se quiere enseñar al niño el concepto de círculo, se le da objetos con distintas formas geométricas para que pueda manipularlos, se puede trabajar con el propio cuerpo, etc.

.

En la siguiente etapa el niño comparte sus experiencias con los demás compañeros y con el profesor. Se habla de las distintas propiedades que observan en los mismos, fijándose en las analogías y diferencias para acercarse a lo que es un círculo.

Los propios niños representarán sus experiencias con plastilina, papel…

En la etapa abstracta llega la comprensión y definición del concepto de círculo. En este instante se generaliza el concepto.

Partiendo de la manipulación se llegará poco a poco a interiorizar los conceptos y comienzan a aparecer las representaciones mentales.

Según Alsina (2006) **las principales necesidades para ir adquiriendo el pensamiento lógico-matemático**, son:

Observar su entorno utilizando los sentidos para poder comprender el mundo que le rodea.

Explorar con su propio cuerpo y realizar movimientos, para que todas esas sensaciones puedan ser luego interiorizadas.

Manipular y experimentar sobre los objetos. Si se parte de habilidades sencillas y que tengan interés para el niño paulatinamente se irán construyendo los esquemas mentales de conocimiento.

Verbalizar, para favorecer la comprensión e interiorización de los conocimientos.

Trabajar de forma cooperativa: parejas, grupos pequeños, gran grupo. Llevando a cabo las actividades de forma sistemática, cíclica, no lineal.

Trabajar con lápiz y papel después de realizar muchas acciones con los objetos.

Valorar el juego ya que ayuda a desarrollar la personalidad, creatividad…

Partir de un enfoque global y de acuerdo con las características determinadas de cada clase.

Tipos de actividades:

Según Canals (1992):

Actividades para **identificar**:

Reconocimiento de cualidades sensoriales. Agrupación de objetos a partir de una cualidad. Juegos de identificación de un objeto a partir de la afirmación o negación de sus diversas cualidades. Agrupaciones a partir de una cualidad común o de un criterio preestablecido. Pueden hacerse con materiales variados, verbalmente o usando etiquetas. Se pueden formar grupos negando una cualidad. Inicio de los juegos del sí y del no a partir de dos cualidades.

Actividades para **relacionar**:

Relaciones por igualdad o parecido. Si se tienen dos objetos iguales se realizan emparejamientos, con varios objetos, se hacen clasificaciones según un criterio preestablecido y clasificaciones libres. Correspondencias entre objetos de un grupo y de otro. Seriaciones de objetos con alternancia de cualidades (ritmos repetitivos).Ordenaciones de objetos según una cualidad creciente o decreciente.

Actividades para **operar**:

Operadores lógicos directos, operadores lógicos inversos y operadores lógicos neutros.

Importancia de los lenguajes gráficos y del lenguaje matemático

El lenguaje gráfico, no se refiere al dibujo que se puede usar en cualquier enseñanza, sino a los signos propios de las actividades lógicas de estas edades. Son importantes, ya que son los primeros símbolos escritos que se refieren a acciones mentales entre objetos. Son pocos y sencillos:

Etiquetas que indican cualidades. Diagramas en forma de línea cerrada. Signo X para la negación. Flechas y signos para las máquinas de cambiar cualidades. Los signos siempre son un convenio.

Experiencias para el aula

Es muy frecuente utilizar en las aulas los bloques lógicos de Dienes. Son 48 piezas que resultan de combinar los siguientes atributos:

Color: amarillo, rojo y azul.

Forma: triángulo, rectángulo, círculo y cuadrado.

Tamaño: grande y pequeño.

Grosor: delgado y grueso.

Se utilizan para poner a los niños frente a una serie de situaciones que les permitan desarrollar las capacidades lógicas y, además, sirven para introducir algunos conceptos geométricos. El primer contacto con los bloques lógicos se realizará a través de juegos de libre manipulación de los mismos. Más adelante se practicarán: Juegos para reconocer los bloques. Juegos de clasificación atendiendo a un solo criterio como puede ser la forma o el tamaño, para pasar después a considerar varios criterios a la vez. Juegos de comparación estableciendo las semejanzas y las diferencias. Juegos de seriaciones siguiendo distintas reglas. Juegos que desarrollen el simbolismo…

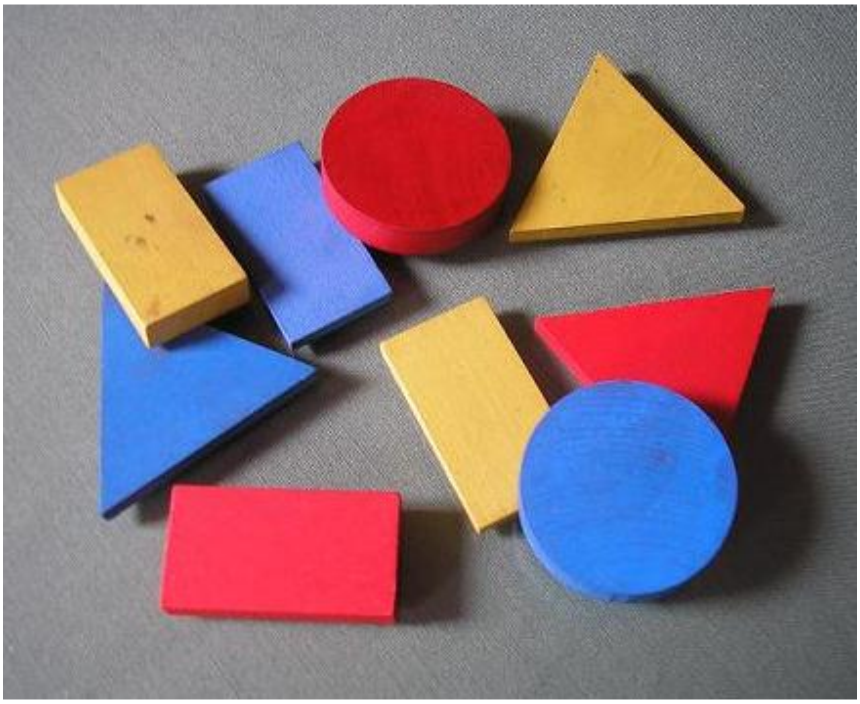


Fig. 1: Bloques lógicos de Dienes

Se pueden realizar otros materiales didácticos semejantes a los bloques lógicos y actividades análogas a las expuestas anteriormente como se muestra a continuación: juego de los emoticonos y “juego de los bichitos”.

Tabla 1: Juego de los emoticonos

JUEGO DE LOS EMOTICONOS				
Expresión	Color	Tamaño	Grosor	
Alegre Triste	Verde Naranja Azul	Grande Pequeño	Grueso Delgado	
2 atributos x	3 atributos x	2 atributos x	2 atributos =	24 piezas

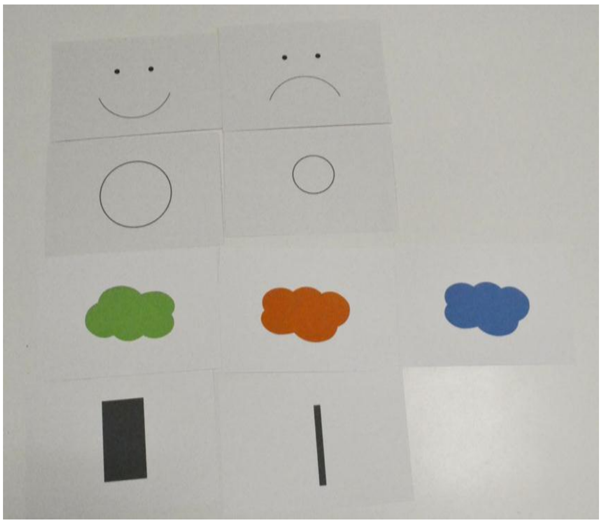


Fig.2: Tarjetas identificativas de los atributos

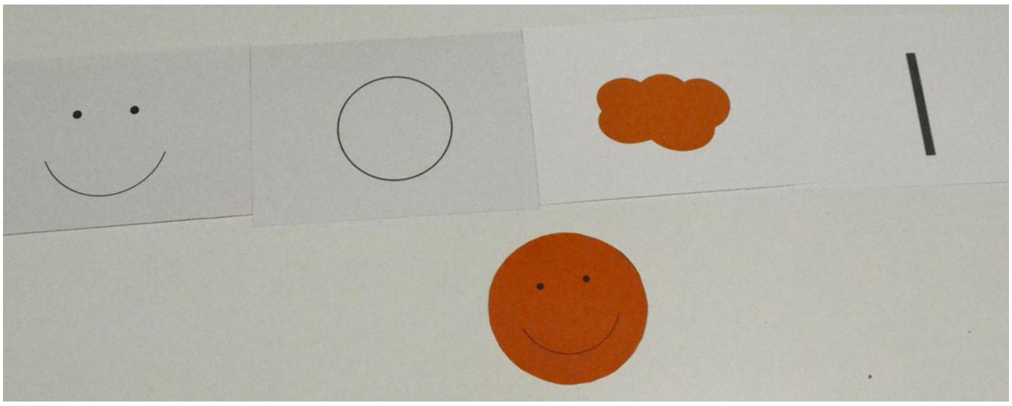


Fig. 3: Reconocimiento de atributos

Juego de los "bichitos"

Está compuesto por 24 bichos de madera en cuatro colores: rojo, verde, amarillo y azul, tres dibujos en los cuerpos: cuerpos con rayas, rombos, puntos y dos tamaños: grandes y pequeños.

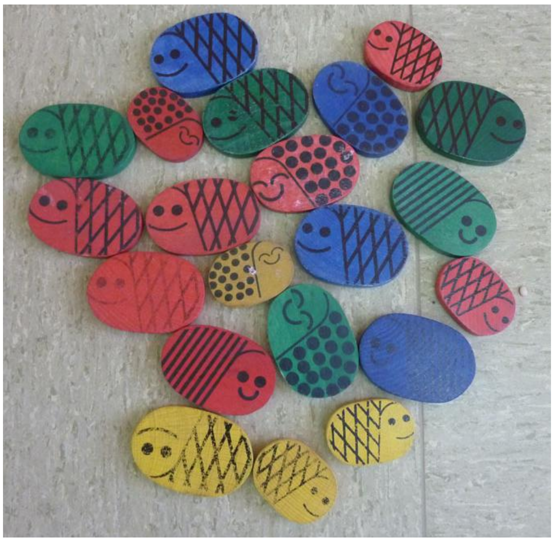


Fig. 4: Piezas de los "bichitos"

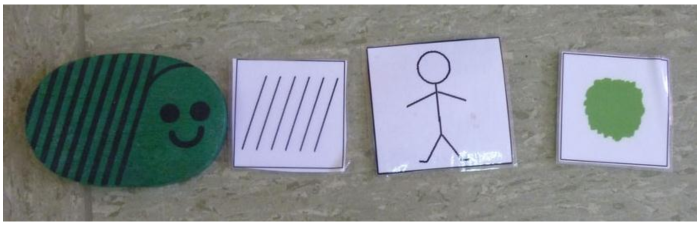


Fig.5: Reconocimiento por alguno de sus atributos

Este juego proporciona a los niños las primeras experiencias para la comprensión de los conceptos lógicos básicos. Por el tipo de material, resulta más sencillo y sugestivo que otros más abstractos que permiten los mismos objetivos.

A continuación se diseñan unos ejemplos de actividades que no constituyen una secuencia ordenada, se plantean una serie de ideas para escoger, adaptar y completar:

Reconocimiento de cualidades sensoriales mediante manipulación, acciones sobre objetos y trabajo con los propios niños para reconocer sus cualidades y verbalizarlas.

Se conseguirá identificar las características de los objetos, describir diferentes atributos, identificar distintos objetos que tienen una misma cualidad y reconocer, en imágenes, características de objetos conocidos.

Actividad 1: **Descubrimos cualidades**

Materiales: Objetos de la vida cotidiana como pinzas de la ropa, objetos diferentes al tacto, bolas de porexpan, bolígrafos de colores, juguetes de distintos tamaños…

.

Después de un juego libre con los materiales. Los niños manipulan, observan y experimentan libremente y pueden descubrir las cualidades de los objetos y las posibilidades de interacción entre ellos. El maestro observará las acciones de los pequeños y extraerá aquellas que estén más relacionadas con nociones matemáticas, como, por ejemplo, forma, tamaño, color. Es muy importante verbalizar las acciones y al final representar sobre papel la experiencia vivida.

Fig.6: Discriminación de texturas por el tacto

Actividad 2: **Agrupación de elementos por una cualidad común**

Materiales: Objetos de la vida cotidiana, piezas de lego, frutos de temporada, bloques lógicos…

Se pretende que a partir de la identificación del objeto, se hagan agrupaciones, se relacionen unos objetos con otros, según sus cualidades, y se exprese verbalmente todo lo experimentado.

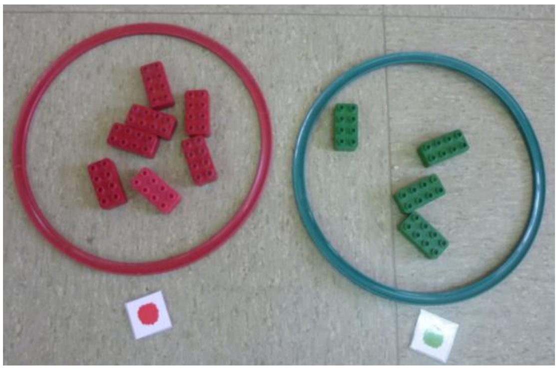


Fig.7: Agrupación por color

Fig.8: Frutos secos del otoño

Actividad 3: **Agrupación de elementos por dos o más cualidades comunes.**

Materiales: Materiales específicos y materiales del entorno.

La actividad es semejante a la anterior pero requiere una mayor concentración al aparecer algún atributo negativo.

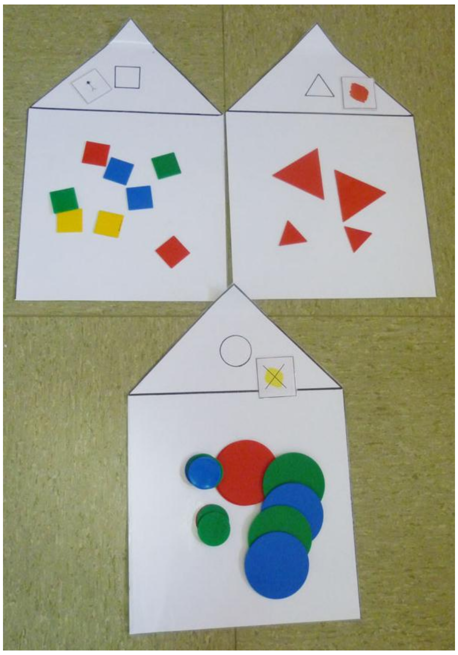


Fig.:9 Ejemplos de agrupaciones con dos cualidades

.

Fig.10: Pelotas de ping-pong, igual color, forma y tamaño

Actividades de relacionar

Cuando realmente se comienza a hacer matemáticas es en el momento en el que se relacionan unos objetos con otros o unas acciones con otras, por ejemplo: Un oso es grande si se le compara con una pulga y pequeño si se le compara con un elefante.

Estas actividades son especialmente importantes porque preparan el camino para trabajar la construcción del número.

Las clasificaciones son importantes para el aspecto cardinal, las seriaciones para el ordinal, los emparejamientos, los juegos de correspondencias, no hay que olvidar el trabajo previo con cuantificadores: muchos, pocos…

Actividad 1: **Clasificaciones y selecciones**

Se trata de comparar objetos en función de sus semejanzas y diferencias y clasificarlos por color, por tamaño, por forma…

Materiales: Nos sirven tanto materiales estructurados como ambientales.

Fig.11: Clasificación de frutas por color

Vamos a suponer que tenemos una caja con botones de distintas formas, colores tamaños…Necesitamos botones con forma de flor para una chaqueta, es decir, seleccionamos solo los que tienen esa forma. También necesitamos botones blancos, rojos y marrones para un traje, y los colocamos en tres cajas. Es la diferencia entre selección y clasificación.

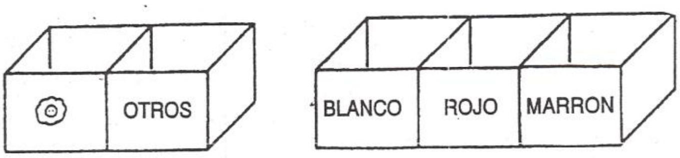


Fig.12: Diferencia entre selección y clasificación

Actividad 2: **Seriaciones y ordenaciones**

Seguimos trabajando con todo tipo de materiales.

Son actividades para realizar seriaciones siguiendo patrones y ordenaciones atendiendo a distintas cualidades.

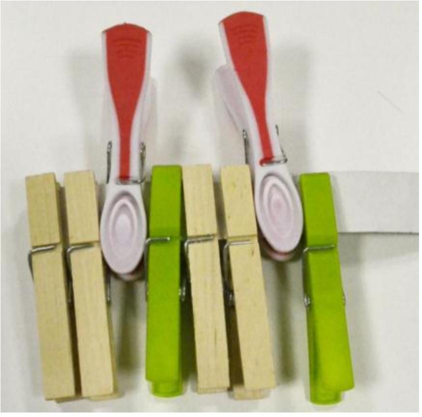


Fig.13: Seriación con pinzas de la ropa

Fig.14: Ordenación ascendente

Actividad 3: "Cada oveja con su pareja"

Es necesario emparejar objetos con alguna cualidad en común.

Fig.15: Igual color, forma y longitud.

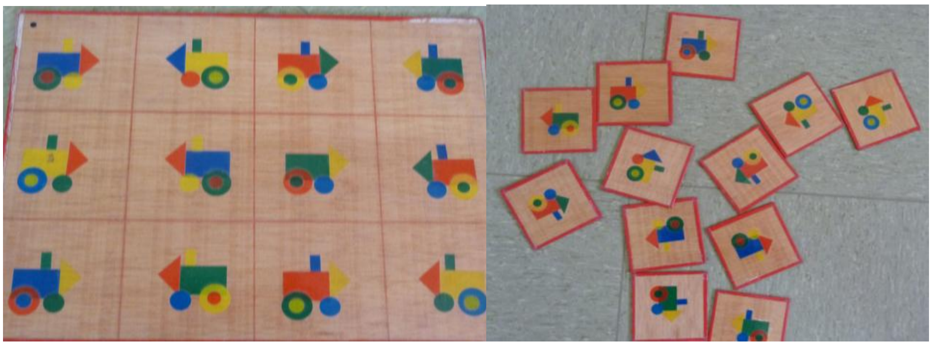


Fig.16: Juego de concentración para emparejar

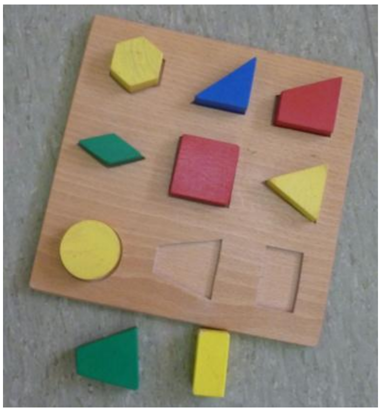


Fig.17: Correspondencias cualitativas

Actividades de operar

El trabajo de los operadores es especialmente importante porque prepara la mente del niño para comprender los aspectos lógicos o estructurales de las operaciones. Es un eje común a la lógica, al cálculo…Operamos cuando, partiendo de un estado inicial, se realiza un cambio, es decir, realizamos una operación cuando partimos de un elemento de un conjunto y obtenemos otro. Los operadores pueden ser neutros, directos e inversos.

Actividad 1: Operamos jugando con los "bichitos"

Fig.18: Operador que cambia el color

Los niños deben explicar cómo realizan los cambios.

ACTIVIDADES PARA CONSTRUIR LAS NOCIONES DE NÚMERO Y OPERACIÓN UTILIZANDO EL MATERIAL HERBINIÈRE-LEBERT

La manipulación de los objetos y colecciones es clave en la formación de las ideas numéricas iniciales de los niños. La experiencia propia y los intercambios a través del lenguaje natural van favoreciendo el aprendizaje de la serie de los números naturales. Son aprendizajes ambientales que tienen lugar, generalmente de modo lúdico, en la relación adulto-niño y entre iguales y, también, en la actividad del sujeto con material ambiental. Por otra parte, en las aulas de Educación Infantil será de vital importancia la utilización de material estructurado para facilitar la construcción del número y las operaciones.

Existen numerosos materiales pero hemos escogido el material de Herbinière-Lebert que consiste en placas sobre las que figuran unos círculos que representaban las cantidades de uno a diez y tarjetas de cartón con números, operaciones y símbolos.

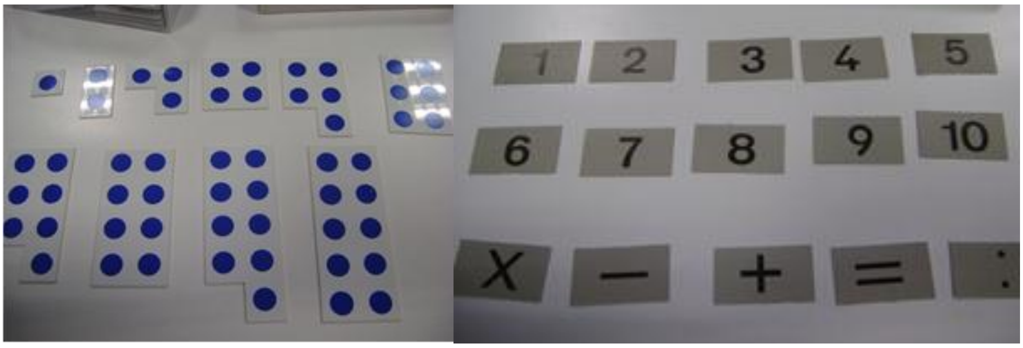


Fig.19: Placas y símbolos del material

Lo que se pretende es dar al alumnado una representación mental de los números del 1 al 10. Abordando una imagen concreta y visual de los números, las tarjetas de puntos acercan los aspectos abstractos de la numeración.

En el proceso de construcción del número, las tarjetas de puntos realizan varias funciones importantes:

Codificación y comunicación de las informaciones numéricas.

Procesamiento visual, manipulativo o gráfico (dibujos, símbolos convencionales)

Toma de conciencia progresiva de las propiedades de los números: paridad, distancia al 5, al 10… preparando al alumnado para el concepto de diferencia previo a la resta.

Ayuda a la memorización, recuperación rápida de los resultados almacenados en la memoria a largo plazo (dobles, suplementos)

En el aula se aconseja comenzar por juntar las dos piezas más pequeñas y animar al alumnado para que superponga la pieza que tiene dos círculos, y así comprobar que encajan. Sucesivamente, se podría acercar la pieza de un punto con la de tres puntos y comprobar que se tiene un cuadrado con cuatro puntos.

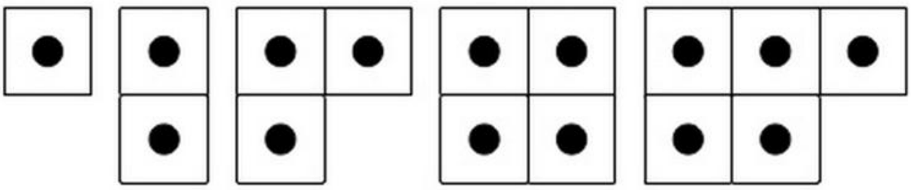


Fig.20: Placas del 1 al cinco

.

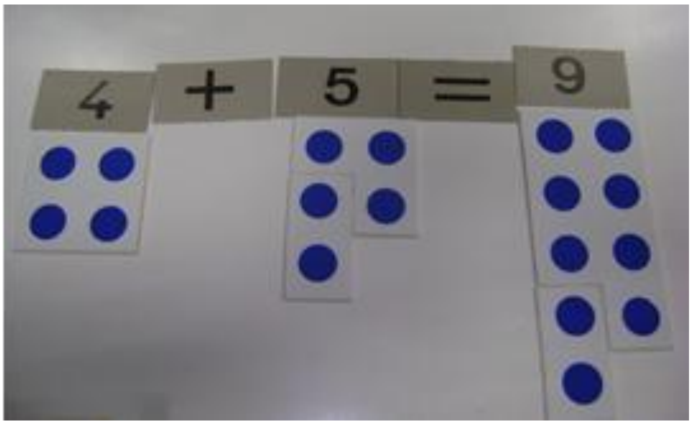


Fig.21: Mis primeras sumas con las cartas de puntos

Se podrían construir dominós para asignar la representación de los puntos con la grafía del número correspondiente:

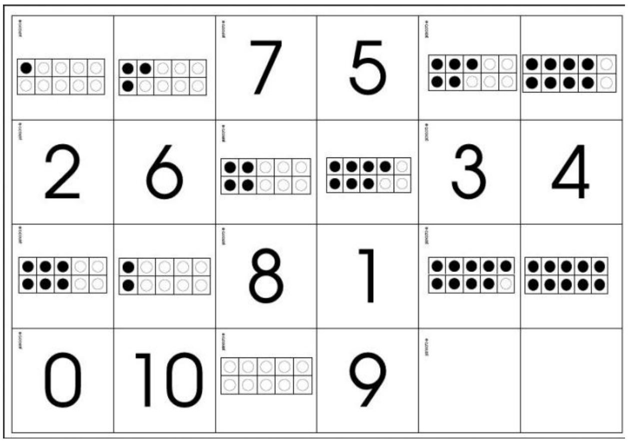


Fig. 22: Dominó recogido de La Académie de Grenoble consultado por última vez 28-10-2014 en http://www.ac-grenoble.fr/ien.grenoble5/IMG/jpg_Capture01020.jpg

Al ser nuestro sistema decimal, es muy interesante presentar al alumnado las diferentes descomposiciones del número 10.

Asociamos la cantidad al número y esto es fundamental para su comprensión. Los niños utilizan sus dedos para contar y agrupar diferentes “conjuntos de dedos”, estas representaciones son muy útiles, pero no son representaciones convencionales Los grupos de puntos, también llamadas constelaciones de Herbinière-Lebert facilitan la uniformidad.

La utilización de representaciones convencionales es indispensable cuando el número empieza a ser demasiado elevado.

En Educación Infantil es muy interesante la utilización de tarjetas de puntos. Son tarjetas formadas por diez celdillas cuadradas en las que se colorean los puntos como en el ejemplo siguiente que representa el número seis:

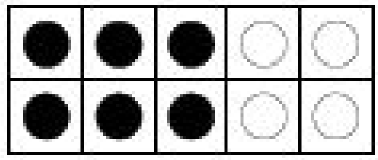


Fig.23: Ficha de seis puntos

La observación de la tarjeta de puntos del número 6, permite ver, entre otras, las siguientes propiedades:

El 6 es un doble (la tarjeta se puede dividir en dos partes iguales)
Le falta 4 para llegar a 10 (hay 4 casillas vacías)
El 6 es "uno más" que 5; que lo representaremos como 5+1= 6; también 6 se puede descomponer como 4 +2.

ACTIVIDADES PARA INICIAR EL CONCEPTO MASA-PESO. LAS BALANZAS

Para comenzar con el bloque de contenido relativo a la medida, concretamente el peso; los niños deben tener adquiridas las nociones básicas sobre las características de los objetos: forma, tamaño, color,… para facilitar los diálogos pedagógicos que mantengamos con ellos.

El niño debe previamente usar su cuerpo como instrumento de valoración subjetivo del peso de los objetos. Se podría plantear la siguiente actividad llamada "soy una balanza". Se realizaría por parejas. Un niño extenderá sus brazos, en forma de cruz, y otro niño le pondrá diferentes objetos en sus manos. Aquel brazo que sienta más peso deberá ser deslizado hacia el suelo. También les indicaremos que deben verbalizar dicha situación mediante cuantificadores básicos del tipo "más que", "menos que" o "igual que".

Fig. 24: Experimentamos con los brazos

.

Los niños podrán experimentar por si mismos el equilibrio entre los dos brazos utilizando una barra y cestas en sus extremos. Mostramos unas imágenes cedidas por Laura de la Cuesta Ruíz, maestra de Educación Infantil del CEIP Miguel Hernández de Laguna de Duero de Valladolid (fig. 24)

Posteriormente, se podrá comprobar mediante diferentes aparatos de medida si su percepción era cierta o no.

Existen diversos tipos de balanzas que nos pueden ayudar: de cruz, de Roverbal, de resorte y otros muchos tipos que los niños pueden utilizar; como por ejemplo, la balanza romana, el peso del baño, de la cocina, la balanza automática industrial... Sería muy enriquecedor disponer de alguna de ellas en el aula de infantil.

Es conveniente que las balanzas empleadas durante las primeras etapas de la escuela infantil no estén graduadas con números, para evitar confusiones innecesarias en los niños. Bastará iniciar la utilización de balanzas para comparar, clasificar, ordenar...objetos en función de masa-peso.

No existe un criterio único respecto a los tipos de balanzas a utilizar en la escuela infantil, según Cascallana (2002), una buena práctica educativa sería seguir la siguiente secuencia en función de la madurez de los alumnos: balanza de cruz, de Roverbal y de resorte.

Podemos construir una balanza de cruz artesanalmente, con una barra larga de madera, cuerda, dos vasos de plástico o recipientes y una botella de plástico.

Fig. 25: Niña con balanza de cruz

Se puede construir una balanza de Roverbal según Cascallana (2002) con una caja grande de cerillas, un lapicero, plastilina, una regla de 40 centímetros y dos tapaderas iguales.

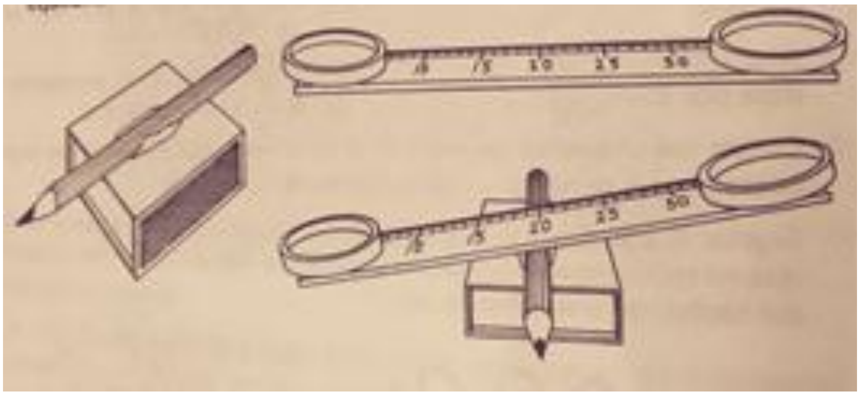


Fig. 26: Construcción de balanza de Roverbal (Cascallana, 2002, página 200)

Fig.27: Balanza de construcción casera consultado por última vez 28-10-2014 en

http://trabajos3detorrevelo.blogspot.com.es/2009/04/trabajo-hacer-una-balanza.html

Por último la balanza de resorte, cuyo fundamento es similar al dinamómetro. Se podría construir como aparece en la figura 28:

Fig.28: Dinamómetro casero consultado por última vez 28-10-2014 en

https://www.youtube.com/watch?v=hdDL2Wlyyh8

Otra posibilidad muy original es utilizar una percha de ropa como se muestra en la figura 29

Fig.29: Balanza-percha

Una posible seriación de actividades con balanzas podría ser:

Manipulación libre para aprender intuitivamente su mecanismo y aplicaciones.

Construcción de algún tipo de balanza, para comprender las bases de su funcionamiento y observar experiencias muy simples con este instrumento de medida.

Realizar actividades colectivas con fines didácticos, como comparar actividades de diferentes pesos para clasificar y ordenar objetos por su peso, buscar equilibrios en las balanzas…

Se dispone de balanzas numéricas comerciales como la que se presenta en la figura 30:

Fig. 30: Ejemplo de balanza numérica

Cuando la balanza está montada o equilibrada los brazos deben estar en posición horizontal. Un peso colocado en un lado del brazo hace que dicho brazo se incline.

Fig. 31: El peso desequilibra el brazo

Este hecho ayuda al alumno a comprender el concepto de desigualdad. La siguiente actividad podría ser colocar un peso en cada brazo pero en diferente posición.

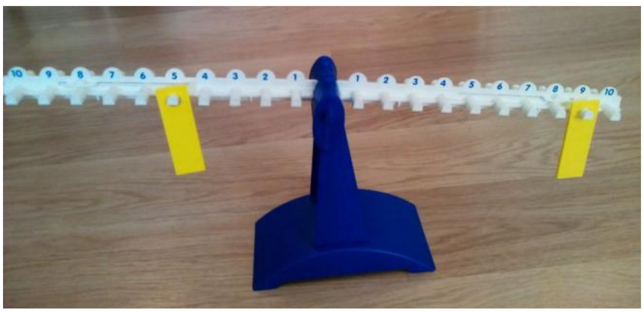


Fig. 32: Menor y mayor…

Si acompañamos a esta situación la verbalización incluyendo la utilización de expresiones comparativas (mayor que, menor que,…), se favorecerá la interiorización de dicho concepto pasando de la comparación a la ordenación; posteriormente se podrá simbolizar 5 < 9 para E. Primaria, en Infantil se plantearía la siguiente cuestión: ¿Cómo se puede conseguir volver a poner los brazos en posición horizontal?

Por ejemplo, un peso colocado en el lado derecho del brazo en la clavija número 6, puede ser equilibrado, no sólo mediante la colocación de un peso del número 6 en el lado izquierdo del brazo, sino también mediante la colocación de un peso en el 5 y un peso en el 1, o de muchas otras formas.

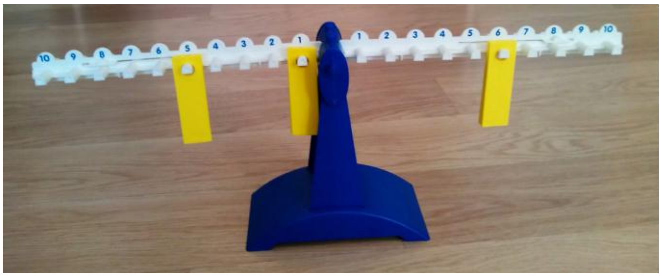


Fig. 33: Hacemos operaciones

La operación descrita se escribiría: 6+1=5, posteriormente, en Educación Primaria, se simbolizaría:

6 x 1=5 x 1 + 1 x 1

Si añadimos dos piezas en cada una de las tres clavijas tendríamos una representación de la propiedad distributiva:

6 x 2 = 5 x 2 + 1 x 2= (5 + 1) x 2

Análogamente si colocamos tres piezas

5 x 3 + 1 x 3 = 6 x 3 = (5 + 1) x 3

En edades más avanzadas podríamos generalizar la propiedad distributiva (a + b) x c = a x c + b x c

Colocando las fichas como indica la figura 34 vamos a introducir el concepto de resta.

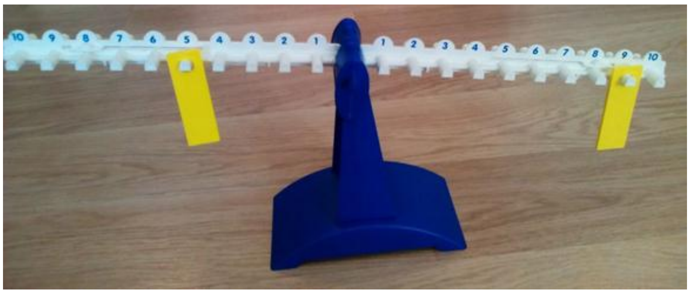


Fig. 34: Hacemos restas

Según la posición de la balanza, 9 es mayor que 5, ¿dónde se debe colocar una pieza en el brazo de la pieza del 5 para equilibrar la balanza? El niño debe ir colocando piezas en diferentes posiciones y finalmente verificará que la posición del 4 es la buscada. De forma simbólica 9 – 5 = 4 o bien 4 + 5 = 9.

Seguimos avanzando con las operaciones fundamentales y llegamos a la multiplicación. El enfoque didáctico que utilizaremos será considerar el producto como suma de sumandos iguales. En la foto se puede comparar que 4 piezas colocadas en la posición 2 equilibran a 2 piezas colocadas en la posición 4. Simbólicamente, 4 x 2 = 2 x 4, que como bien sabemos se trata de la propiedad conmutativa del producto, a x b = b x a.

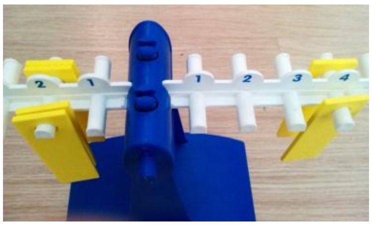


Fig. 35: Hacemos multiplicaciones

Para los niños, la balanza matemática también puede ser un medio para crear ecuaciones y comprobar su exactitud. Esto les permite descubrir cosas por sí mismos acerca de las relaciones de números, con la ayuda del profesor.

Por poner un ejemplo, si a un niño de Educación Infantil se le pide que averigüe de cuántas maneras puede ser equilibrado el 10 por otros dos números. Estamos trabajando la descomposición aditiva de los números naturales.

Al principio muchos profesores se contentarán con ver esta experiencia simplemente como la de la constatación del número de pares que equivalen a 10, pero si los descubrimientos de los niños se ponen en orden en forma de tabla, a continuación, otros modelos se van evidenciando, como la propiedad conmutativa de la suma que se expresa habitualmente:

$a + b = b + a$.

Dicho de otro modo estamos buscando el conjunto de pares ordenados que satisfacen la ecuación:

$x + y = 10$ (figura36)

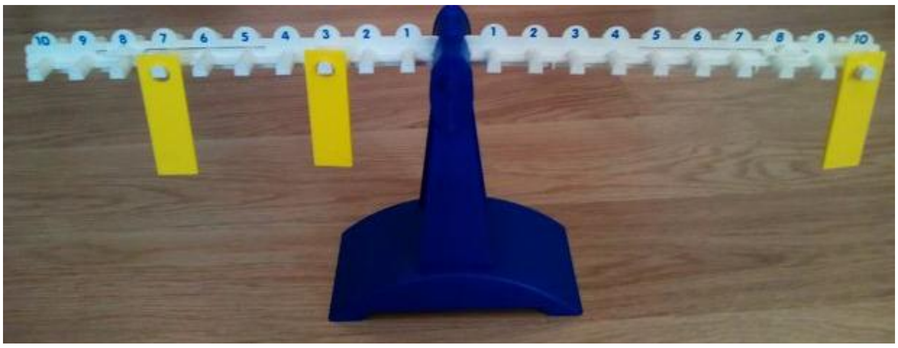


Fig. 36: Pares de números que suman 10

Estamos poniendo las bases para la comprensión del significado de las ecuaciones.

A modo de conclusión, los niños pueden resolver y los maestros pueden mostrar muchos ejemplos matemáticos de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y ecuaciones utilizando este interesante recurso educativo.

El reverso del brazo de la balanza no está marcado. En estadios más avanzados, se podrán poner etiquetas autoadhesivas de manera que se puede dar cualquier serie de valores a las clavijas, por ejemplo, valores fraccionarios, los valores del dinero, los valores de peso…para trabajar equivalencias entre otras magnitudes.

TALLER DE CUENTOS CON EL TANGRAM

El tangram es un juego de origen chino. La construcción es particularmente sencilla (aglomerado, cartón pluma o cartón piedra), el juego se compone de siete piezas entre las cuales hay un paralelogramo (P), un cuadrado (C), y cinco triángulos rectángulos e isósceles con tres tamaños distintos. Se puede recubrir el triángulo mediano con dos pequeños y uno grande con dos pequeños y el mediano.

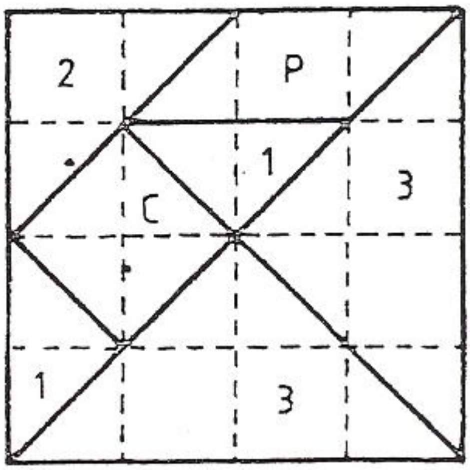


Fig. 37 Tangram chino

Se puede utilizar para: manipular libremente las piezas, formar figuras, todas las piezas, reconocimiento de formas geométricas en el plano, dibujar contornos…

Existen otros tipos de tangram como por ejemplo el tangram circular

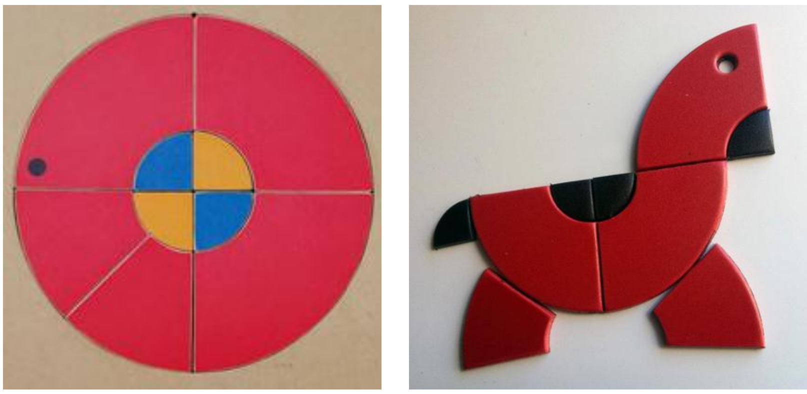


Fig.38: Tangram circular y ejemplo de figura

El taller consiste en inventar historias empleando las piezas del tangram, se ponen en juego, por un lado la creatividad en la narración y por otro la utilización de las formas geométricas para componer figuras que necesiten para cada cuento.

.

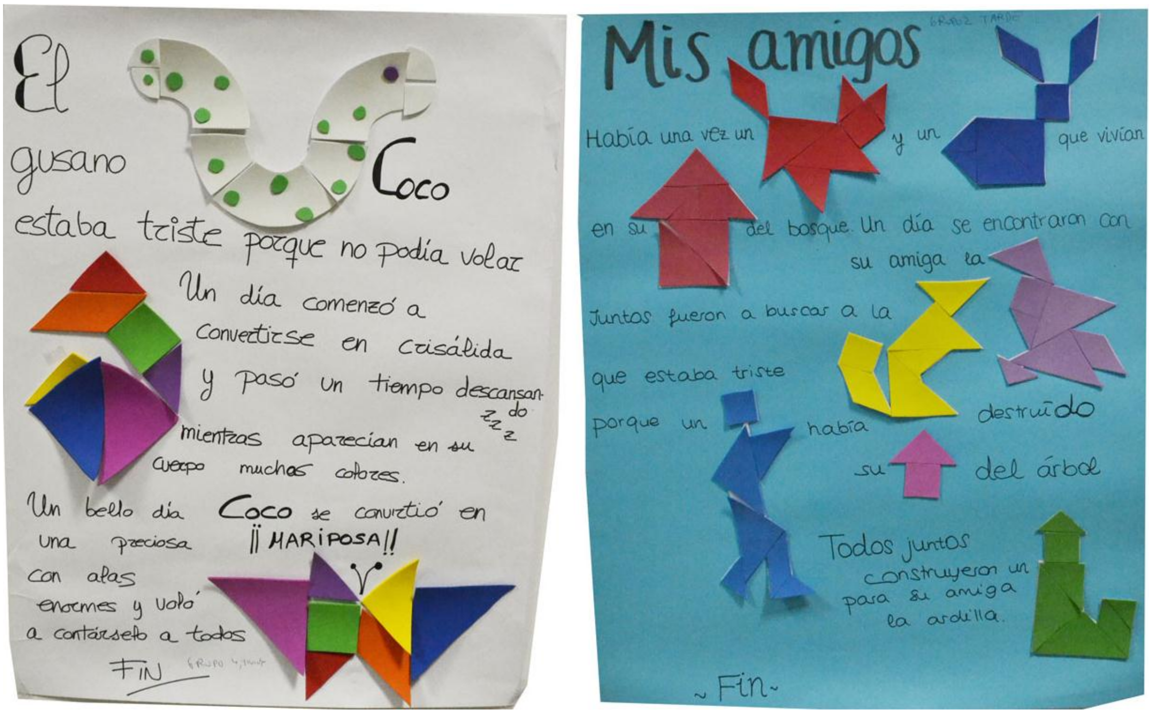


Fig.39: Ejemplo de cuentos

REFLEXIÓN SOBRE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE EN CONTEXTO: NUESTRO PUEBLO O CIUDAD

Según Edó i Revelles (2004) La actividad matemática desarrollada en el aula debería tener sentido más allá de los contenidos matemáticos implicados. ¿Qué hacemos? ¿Por qué lo hacemos? ¿Dónde queremos llegar? ¿Qué queremos saber? ¿Qué queremos responder? ¿Qué deseamos hallar? Son algunos de los interrogantes que la clase debería poder responder con sentido y significado.

Es necesario crear situaciones potencialmente significativas desde distintos puntos de vista: social, cultural y matemáticamente para involucrar a los niños en contextos relevantes. Partiendo de los conocimientos previos e intuitivos se va llegando a aspectos más formales. Mediante las actividades y a través de las conversaciones entre iguales y con el profesor se va avanzando en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático.

Un contexto desde el ámbito de la Educación Matemática es una situación de partida que puede ser objeto de trabajo y que genera cuestiones, preguntas, problemas. La importancia de las situaciones de aprendizaje en contexto se debe a que se pueden interpretar desde distintos puntos de vista, y son los propios niños los que construyen o reconstruyen su conocimiento matemático. (Alsina, 2011, p 13)

Por grupos se va a reflexionar sobre la forma de implementar una situación de aprendizaje en el que las actividades se desarrollen dentro de un contexto y seguirán el esquema de Alsina (2011).

Contexto: **“La ciudad o el pueblo en que vivimos”**

ACTIVIDAD

Título:

Lugar de implementación:

Nivel:

Contenidos matemáticos trabajados:

Descripción de la actividad:

Conclusiones:

Uno de los aspectos que convierten una actividad en una situación de aprendizaje eficaz es la labor del maestro o maestra, haciendo buenas preguntas al alumnado, es la forma de captar cómo van avanzando en el desarrollo de sus capacidades lógicas.

Agradecimientos

Agradecemos a María del Carmen Martínez Fernández por abrirnos las puertas de su aula así como a las demás profesoras de CEIP “Federico García Lorca” por lo que hemos aprendido de todas. También a las maestra de Educación Infantil del CEIP “Miguel Hernández” de Laguna de Duero de Valladolid, en especial a Laura de la Cuesta Ruíz.

Referencias

Alsina, A. (2004): *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico- manipulativos.* Madrid: Narcea.

Alsina, A. (2008). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona: Octaedro-Eumo.

Alsina, A. (2011): *Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años*. Universidad de Barcelona: Ice-Horsori.

Antón Rosera, M. y otros (2000). *Educación Infantil. Orientación y recursos (0-6 años)*. Barcelona: Praxis.

Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas activas (2-6 años)*. Barcelona: Graó.

Edó, M., Revelles, S. (2004). Mundo matemático. Situaciones potencialmente significativas. *Educación Infantil. Orientación y recursos (0-6 años)*. pp.410/103-410/179. Barcelona: Praxis.

Canals, M.A. (1992*). Per una didàctica de la matemàtica a l’escola*. Vic: Eumo Editorial.

Cascallana, Mª. T. (2002). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid: Santillana. Aula XXI.

.

Fuentes electrónicas

Dominó recogido de La Académie de Grenoble consultado por última vez 28-10-2014 en http://www.ac-grenoble.fr/ien.grenoble5/IMG/jpg_Capture01020.jpg

Balanza de construcción casera consulta por última vez 28-10-2014 en http://trabajos3detorrevelo.blogspot.com.es/2009/04/trabajo-hacer-una-balanza.html

Dinamómetro casero consulta por última vez 28-10-2014 en https://www.youtube.com/watch?v=hdDL2Wlyyh8

Para hacer referencia al artículo:

Fernández, R.M. y Novo M.L. (2015). Taller: Jugando, manipulando y haciendo preguntas también aprendemos matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”.* (pp. 217-239). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

TALLER: SCRATCH PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Carmen Hernández Díez

Universidad de Valladolid

Resumen

En este taller se iniciará a los participantes en el uso básico del lenguaje Scratch, incidiendo en su uso como herramienta facilitadora del aprendizaje de conceptos matemáticos. Además, se presentará un ejemplo práctico y concreto de cómo se pueden descubrir las matemáticas a través de la programación de ordenadores, a través de los resultados obtenidos con el proyecto MATCH, que ha sido financiado por la FECYT

Palabras clave: *Programación, Matemáticas, Scratch*

OBJETIVOS.

La enseñanza de la programación de ordenadores puede verse como un fin en sí mismo o como una herramienta que nos permite desarrollar diferentes facultades. En el proceso de aprender a programar se comprenden ideas matemáticas e informáticas, se aprenden estrategias de resolución de problemas, se diseñan proyectos y se comunican ideas.

El desarrollo del pensamiento abstracto e informático, denominado pensamiento computacional, es importante no sólo para la profundización en matemáticas, sino también para el desarrollo de la creatividad y para otras actividades de manera transversal.

El MIT desarrolló hace ya unos años el lenguaje de programación Scratch, con el objetivo de que la programación fuera accesible y atractiva para todos, sobre todo para niños y jóvenes entre los 8 y 14 años. Scratch resulta ser un lenguaje visual de aprendizaje muy sencillo e intuitivo.

En el taller se familiarizará a los participantes con este lenguaje de programación. El enfoque del curso será muy práctico, con ejemplos del uso de Scratch como una herramienta de creación y descubrimiento al servicio de escolares y docentes.

Se tratará de hacer evidente que Scratch tiene un aprendizaje suficientemente sencillo como para centrar la atención del alumno en la componente matemática de las actividades que se están realizando y no tanto en el lenguaje en sí.

De esta manera, el taller tiene dos objetivos:

Iniciar a los profesores en el uso básico del lenguaje Scratch, presentándolo como herramienta facilitadora del aprendizaje de conceptos matemáticos.

Presentar ejemplos prácticos y concretos de cómo se pueden descubrir las matemáticas a través de la programación de ordenadores.

Para curiosear.

- Scratch – Imagina, Programa, Comparte: *http://scratch.mit.edu/*
- Scratch en Youtube: *http://www.youtube.com/watch?v=7OYWgoWnCyA*
- Proyecto MATCH, “Programando matemáticas con Scratch”. *http://scratch.infor.uva.es/match/*

Para hacer referencia a este artículo:

Hernández, C. (2015). Taller: Scratch para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”.* (pp. 241-241). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

LA CALCULADORA PARA MEJORAR EL CÁLCULO EN PRIMARIA

Antonio Ramón Martín Adrián.

Colegio Público Aguere. La Laguna. (Tenerife)

Resumen

Los objetivos de este taller son los siguientes:

- *Dar a conocer algunas de las posibilidades de la calculadora para la Resolución de problemas y el cálculo mental.*
- *Reflexionar por qué la calculadora sigue estando ausente de la mayoría de las aulas de primaria y secundaria.*

.

Palabras clave: *cálculo mental, calculadora, matemáticas*.

En el pasado fue imprescindible sacrificar tiempo y energía en impartir destrezas de cálculo numérico. Hoy no tiene nada que ver con formación matemática el adiestrar seres humanos para hacer lo que las máquinas pueden hacer mucho mejor.

En todos lo años de enseñanza primaria y gran parte de la secundaria un 80% del tiempo y del esfuerzo de aprendizaje se dedica a ganar destreza en los diversos algoritmos de operación numérica. De todos los estímulos que el niño recibe durante el proceso de formación y que condicionan su actitud hacia las matemáticas, resaltan como positivos los logros obtenidos en la solución de problemas y como negativos las frustraciones ante operaciones numéricas en que se le han escapado errores de cálculo. Una parte importante del tiempo y la energía que el maestro emplea tanto en la elaboración de ejercicios y exámenes como en su posterior revisión, corrección y calificación se consume en ejecutar rutinariamente cálculos numéricos. (GUZMÁN ROJAS, 1979).

La calculadora es una herramienta que ofrece muchas posibilidades para trabajar en la clase de matemáticas desde los niveles iniciales, despierta un gran interés en la mayor parte del alumnado.

Su uso fuera del aula es prácticamente universal, aunque los profesores que la utilizan como un medio didáctico habitual son realmente escasos y anecdóticos. Las razones de por qué ocurre esto son de muy diversa índole, los argumentos en contra de su utilización en el aula carecen de sentido y de base científica. El problema se reduce a "¿cómo utilizarla?"

Son muchos docentes, administradores escolares y formadores profesionales; los que piensan que no se debería emplear en la escuela. Esta aptitud tiene su origen en la falta de reciclaje de los agentes educativos anteriores. Sólo ven en este instrumento una máquina de cálculo.

Sí el uso de la máquina para niños de 6 a 8 años, es la de calcular operaciones como:

2+4= 8-3= 15:3= 2x3= , por supuesto que no estamos de acuerdo en su utilización. Pero hay algo en estas máquinas, que la mayoría de los docentes ignora, que es el FACTOR CONSTANTE. Esta posibilidad permite un amplio espectro para el trabajo en la clase de matemáticas, en todos los ciclos de la educación infantil y básica.

Este curso quiere dar a conocer algunas de las posibilidades de la calculadora para este tramo educativo, y de manera especial, para el cálculo mental.

METODOLOGÍA.

El desarrollo de este curso será a través del análisis y reflexión de diferentes videos, donde veremos situaciones reales de enseñanza y aprendizaje, para que los profesores asistentes reflexionen sobre su práctica educativa.

Referencias.

Guzmán Rojas, I. (1979). ”La calculadora de bolsillo y la formación matemática del niño”. Khana Cruz. La Paz.

Hernán, F.y otra. (1988) “Recursos en el aula de matemáticas”. Sintesis. Madrid

Para hacer referencia al artículo:

Martín, A.R. (2015). La calculadora para mejorar el cálculo en primaria. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”.* (pp. 243-244). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

PAPIROFLEXIA PARA APRENDER MATEMÁTICAS

Isabel Negueruela Sánchez

Profesora de Matemáticas de Enseñanza Secundaria.

Resumen

En este taller veremos la utilidad del papel, en muchos casos reciclado, en el aula de matemáticas. Es un recurso del que podemos disponer fácilmente y con el que podemos rebajar la abstracción de la materia, sin por ello dejar de hacer matemáticas: contar, medir, comparar, clasificar…

La papiroflexia es una buena herramienta para aprender matemáticas. Permite a los alumnos asimilar y profundizar en conceptos que, en muchos casos, les resultan difíciles. Corregir errores de comprensión de longitudes, superficies, volúmenes o capacidad. Es una ayuda para desarrollar la visión espacial. Con ella es fácil dar el paso del plano al espacio, con un papel plano formamos figuras de tres dimensiones, mejor que con los dibujos de figuras espaciales.

Por esto es muy útil en geometría, pero también tiene muy buenas aplicaciones para trabajar con los números y con el álgebra. Permite cambiar la dinámica de las clases y al ser una actividad manipulativa refuerza el aprendizaje y resulta más atractiva para los alumnos. ¡Se aprende más con lo que nos gusta! En algunos casos es útil para repescar a alumnos con malos resultados que tienen habilidades manuales y potencia la creatividad y el aprendizaje colaborativo.

Pero el taller no es solo de papiroflexia, ya que incluye otras actividades con papel que he utilizado en las aulas durante muchos años.

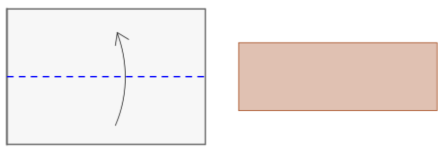
Palabras clave: *metodología, matemáticas, secundaria, papiroflexia…*

INTRODUCCIÓN

Hasta los años 60 del siglo pasado la papiroflexia era poco más que un juego. Entonces tuvo una gran difusión gracias a que los códigos de Akiro Yoshizaba (1911–2005) permiten la fácil reproducción de los modelos.

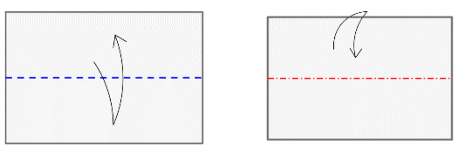
Códigos de Yoshizawa

Pliegue valle



Pliegue montaña

Plegar y desplegar



Pero el verdadero auge del origami ha sido cuando han intervenido las matemáticas en su realización. Se puede ver una buena explicación en el vídeo [*"The math and magic of origami"*]() de Robert Lang. Hoy en día tiene muchas aplicaciones en muchos campos: stens en medicina, paneles solares, airbags, arquitectura e incluso en la moda.

Siguiendo unas reglas, utilizando principios matemáticos, se puede hacer el diagrama de cualquier figura por ordenador con el programa TreeMaker. El programa se puede descargar en la página Web de Robert Lang y hay un Tutorial para aprender a manejarlo, de Diego Quevedo, en *"Creación en papiroflexia"* de la Asociación Española de Papiroflexia.

Pero no vamos a ver un tratado de Papiroflexia, si no que vamos a utilizarla para aprender matemáticas. Se pueden visualizar muchas propiedades:

La suma de los ángulos de un triángulo es de 180º

Un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales

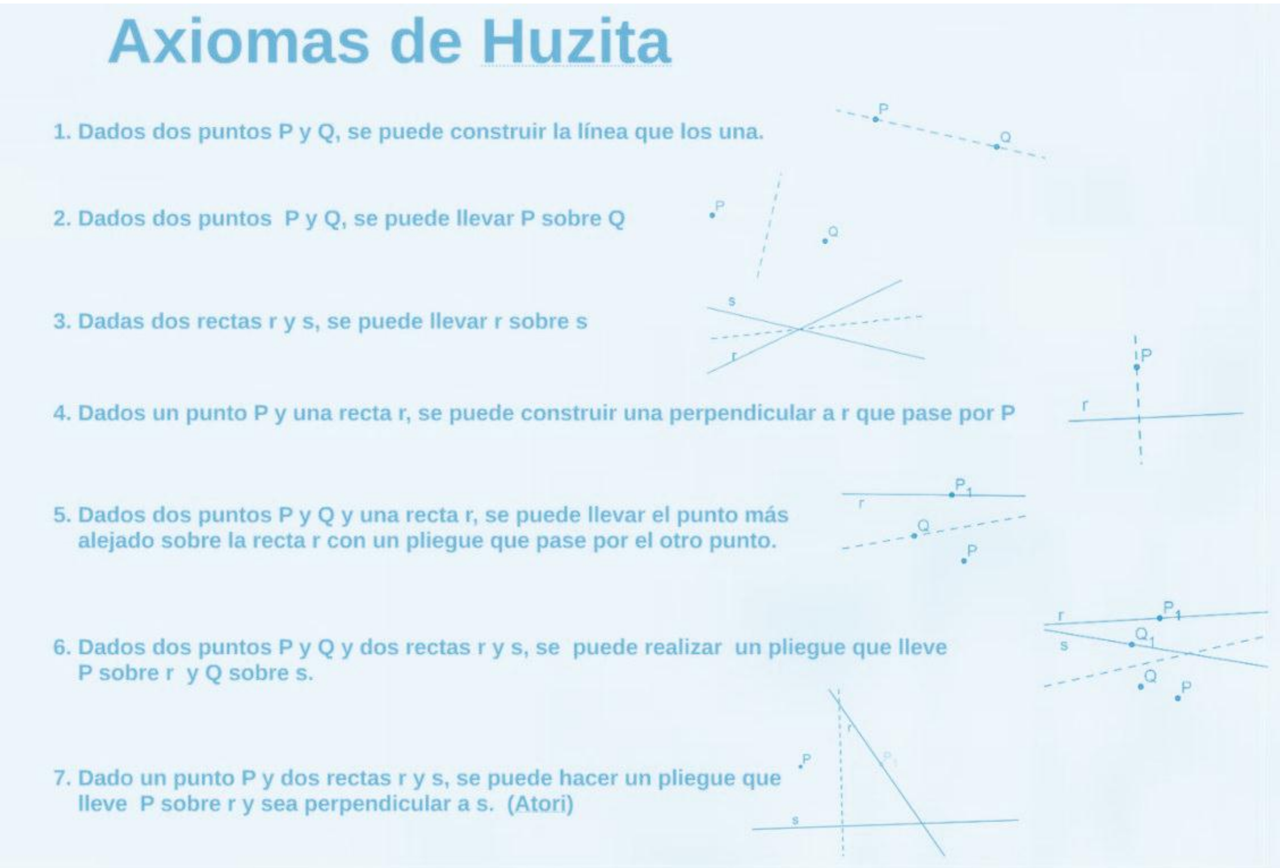
Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio

Un romboide no tiene ejes de simetría

Con el origami se pueden realizar todas las "*construcciones con regla y compás"* de Euclides y algunas otras que no se pueden hacer de esa forma

AXIOMAS DE HUZITA

Son un conjunto de normas, principios matemáticos del origami, que describen las operaciones que se pueden hacer al doblar una hoja de papel. Los seis primeros son de Humiaki Huzita y el último de Koshiro Hatori.



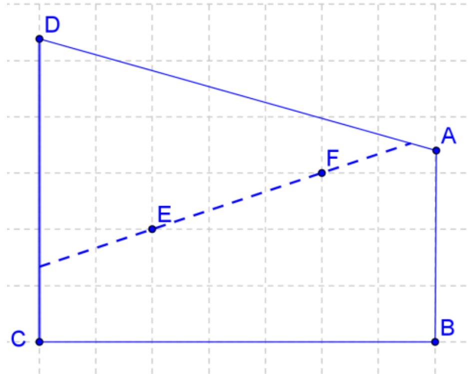
.

Axiomas de Huzita en un trapecio

Vamos a ver los primeros axiomas en medio folio cortado en forma de trapecio. Pon nombre a los vértices *ABCD*. Se puede aprovechar para preguntar ¿qué tipo de figura es?

Axioma 1

Basta con dibujar dos puntos y doblar por ellos.



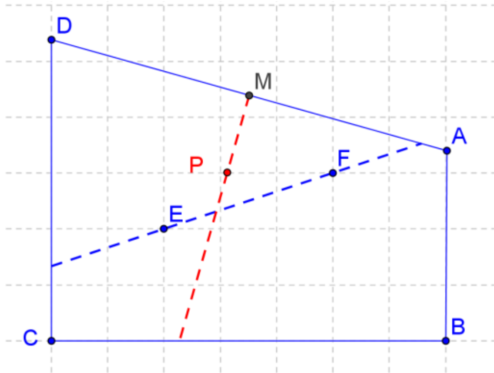
Axioma 2

Llevar *D* sobre *A*

Pon nombre al punto *M*, ¿qué relación tiene con A y *D*?

Pinta la línea que has hecho y toma un punto *P* sobre ella ¿qué cumple con respecto a *A* y *D*?

Lo mismo cumplen todos los puntos de la **mediatriz** de *AD*: es el *"lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A y D"*

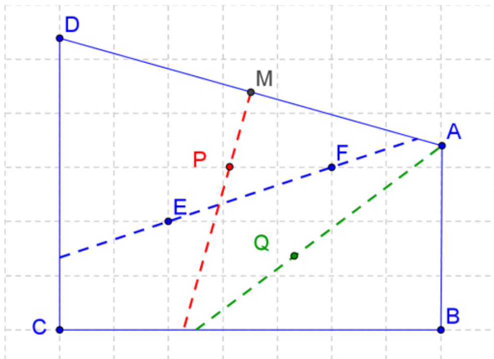


Axioma 3

Lleva *AD* sobre *AB*

Dibuja la línea que acabas de hacer y un punto *Q* sobre ella. Comprueba que las distancias de *Q* a *AD* y *AB* son iguales. La línea es la bisectriz del ángulo $\hat{A}$.

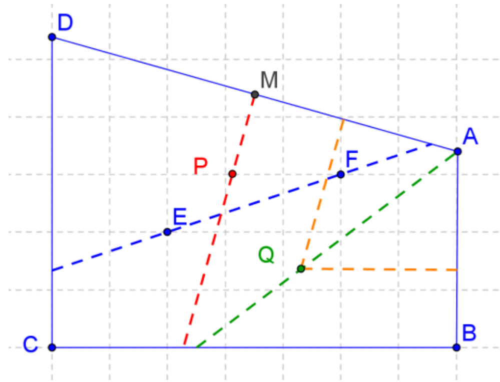
La **bisectriz** del ángulo $\hat{A}$ es el *"lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo"*



Axioma 4

¿Cómo medirías las distancias de *Q* a los lados del ángulo $\hat{A}$?

Para medirla tienes que trazar la perpendicular a los lados que pase por *Q*



RECTA DE EULER

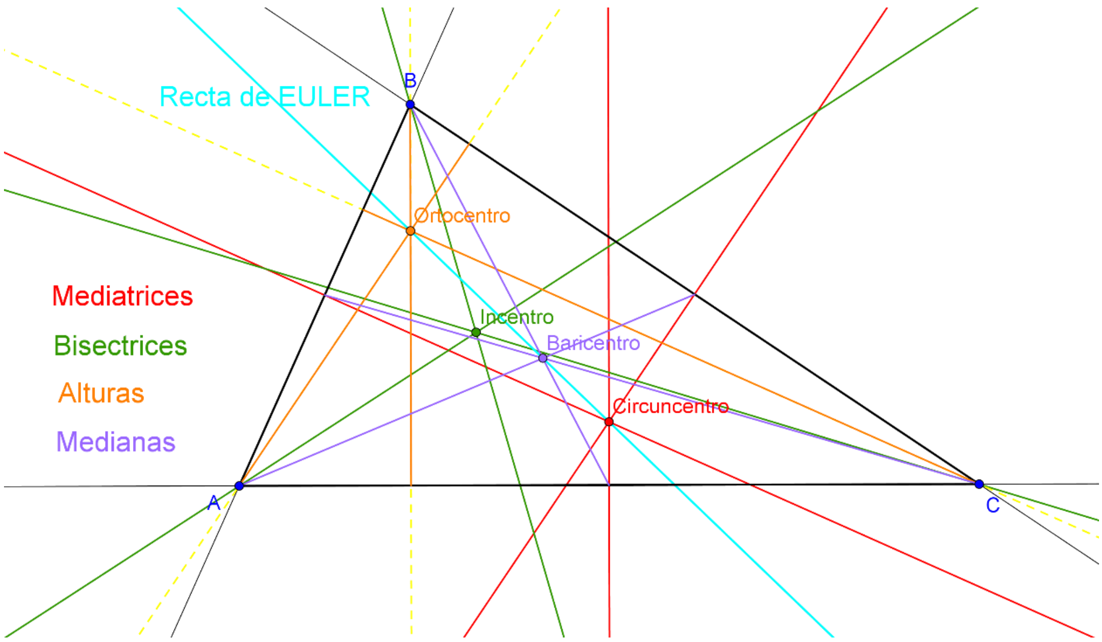
En un folio, recorta un triángulo acutángulo, que no sea isósceles, tan grande como puedas. Vamos a construir los puntos notables del triángulo doblando el papel.

Dobla para trazar las mediatrices de los lados del triángulo. Píntalas de color rojo. Verás que las tres mediatrices se cortan en un punto, se llama CIRCUNCENTRO porque es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, que pasa por los tres vértices del triángulo (¡Normal! ¡Equidista de los tres! Está en las tres mediatrices de los lados)

Haz las bisectrices de los tres ángulos. Se cortan en un punto, el INCENTRO, que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. Dobla las perpendiculares desde el incentro a los lados del triángulo, son radios de la circunferencia inscrita.

Ahora traza las medianas, que van desde un vértice a la mitad del lado opuesto. Se cortan en el BARICENTRO, que es el centro de gravedad del triángulo (el punto G), porque cada mediana divide al triángulo en dos triángulos con la misma área. Si lo has construido bien, puedes sujetar el triángulo en equilibrio sobre la punta del bolígrafo. Puedes doblar la parte de cada mediana que está entre el baricentro y el lado sobre la otra parte y comprobar que mide la mitad.

Nos falta el ORTOCENTRO, que es el punto donde se cortan las alturas del triángulo, las rectas que van desde un vértice perpendiculares al lado opuesto.



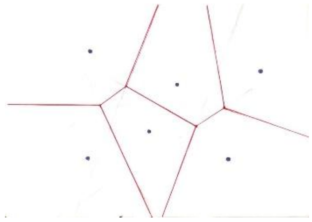
.

Hay tres de estos puntos notables que están alineados, ¿cuáles son? La recta que los contiene es la RECTA DE EULER

Puedes construir tu recta con Geogebra (o visitar La recta de Euler) y contestar a las preguntas: ¿Todos los puntos notables están en el interior del triángulo? ¿Cuáles pueden estar sobre el triángulo? ¿En qué tipo de triángulos ocurre eso?

También puedes hacer, doblando, diagramas de Voronoi, que sirven para repartir el territorio.

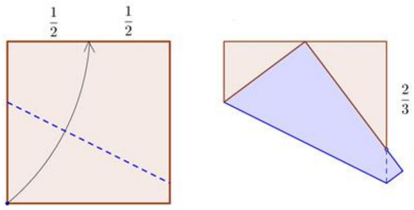
Visita Cada uno en su región y Voronoi en la de todos de Clara Grima



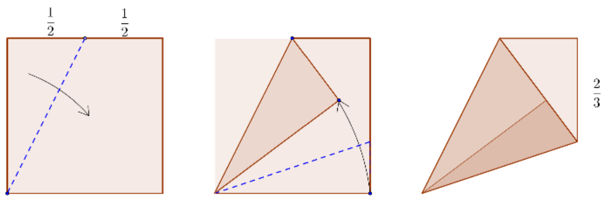
TEOREMAS DE HAGA

Los teoremas de Haga sirven para dividir un segmento en tres partes (uno de los problemas que no se podían resolver con la regla y el compás de Euclides)

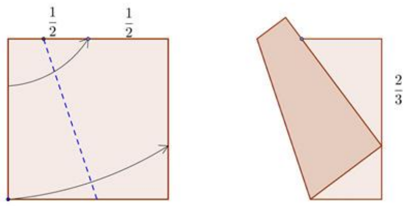
Primer teorema de Haga



Segundo teorema de Haga



Tercer teorema de Haga

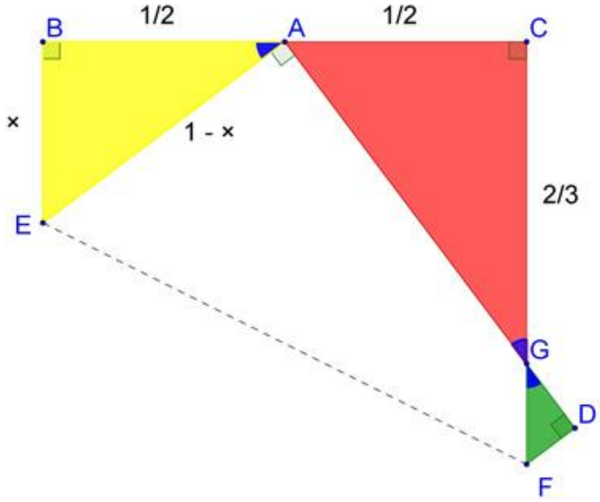


Demostración del primer teorema de Haga

"Sea un cuadrado de vértices A, B, C, D. Si se pliega el cuadrado sobre sí mismo, llevando el vértice A al punto medio del lado BC , entonces el lado AD cortará al lado CD en un punto G tal que la distancia entre C y G es igual a las dos terceras partes del lado del cuadrado".

Demostración:

Los tres triángulos que aparecen son semejantes, los ángulos *CGA* y *FGD* son opuestos por el vértice y *BAE* es igual a ellos por ser complementario de *GAC*.



Si consideramos que el lado del cuadrado es 1, $BA = \frac{1}{2}$

En el triángulo *BAE* llamamos *x* al cateto *BE* y la hipotenusa *EA* es $1-x$. Por Pitágoras:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (1-x)^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{8}$$

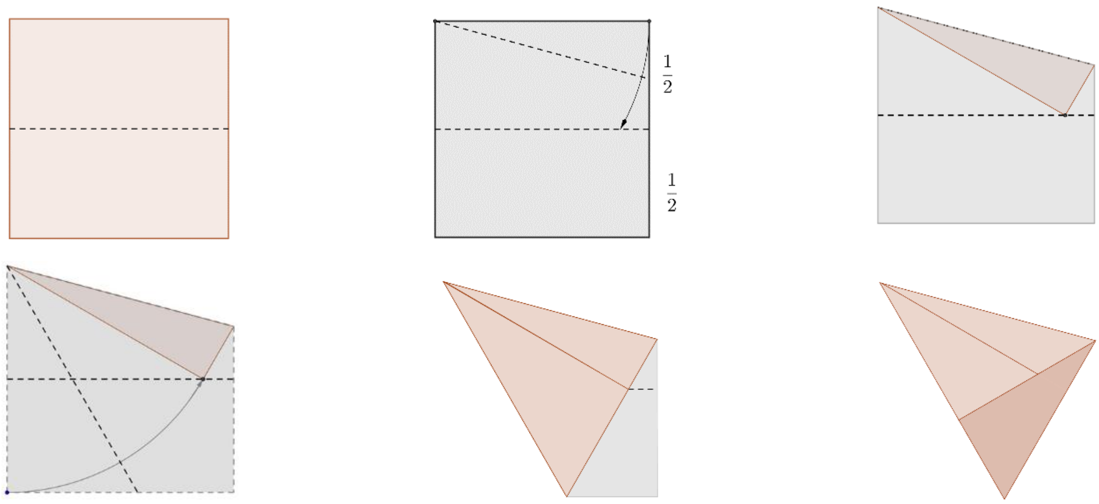
Como los triángulos *EBA* y *ACG* son semejantes

$$\frac{AC}{EB} = \frac{GC}{AB} \quad \Rightarrow \quad \frac{1/2}{3/8} = \frac{GC}{1/2} \quad \Rightarrow \quad GC = \frac{2}{3}$$

Además, **los lados de los tres triángulos son proporcionales a 3, 4 y 5**.

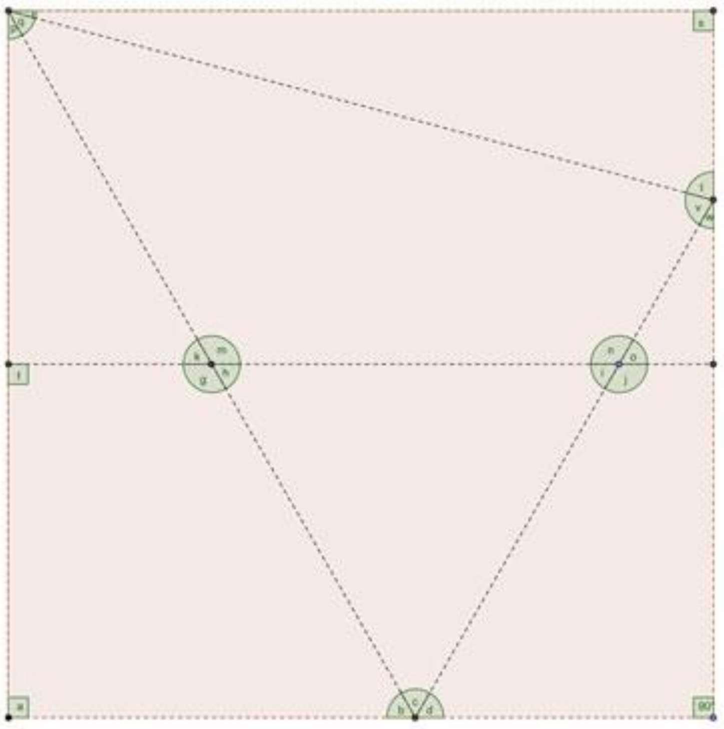
Medidor de ángulos

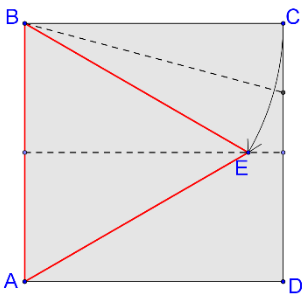
Kunihiko Kasahara, quien ha escrito muchos libros sobre origami, ha mostrado que con cuatro dobleces se puede hacer una herramienta muy útil para medir ocho ángulos de diferentes medidas.



Desdobla la herramienta y encuentra la medida de todos los ángulos formados por los dobleces.

Explica como lo has deducido.





¿Por qué el triángulo ABE es equilátero?

E está en la mediatriz de *AB*, luego *EA* = *EB*

EB = *CB* ya que llevamos *C* sobre *E*

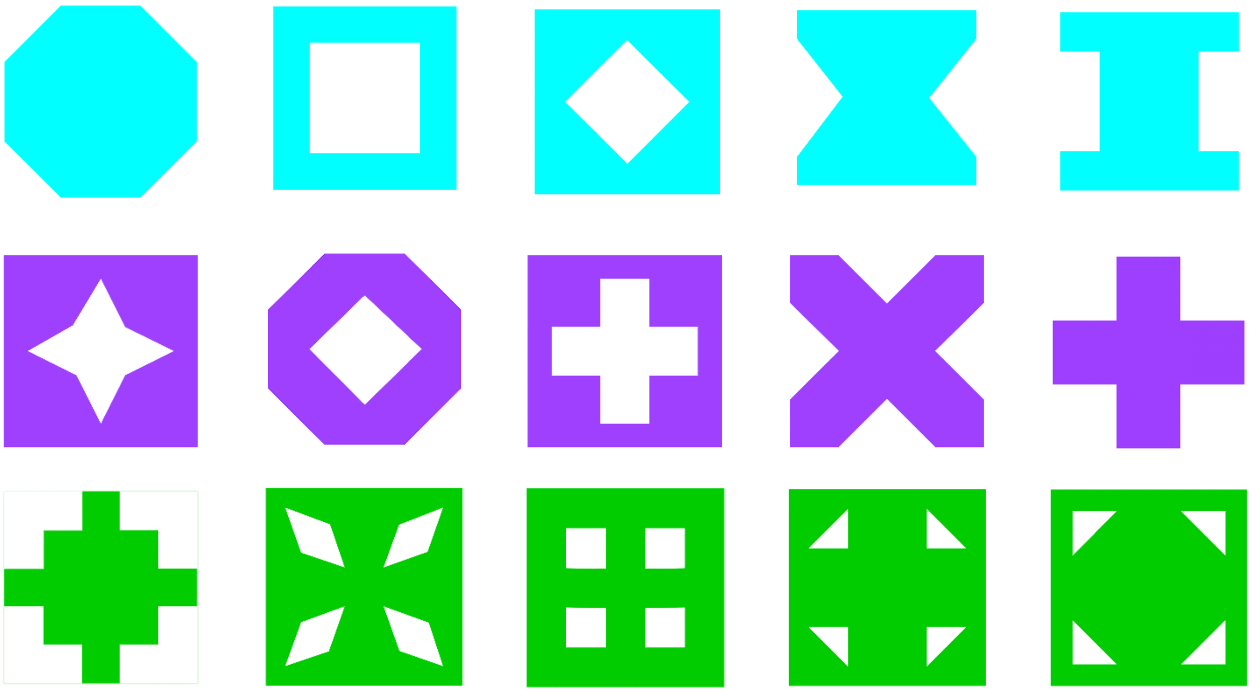
AB = *CB* lados del cuadrado

Por lo tanto *AB* = *BE* = *EA*, el triángulo es equilátero.

En la figura anterior, si doblamos por *B* llevando *A* sobre la mediatriz de *AB*, obtenemos un ángulo de 60º. Esta es la forma clásica de obtener un triángulo equilátero.

KIRIGAMI

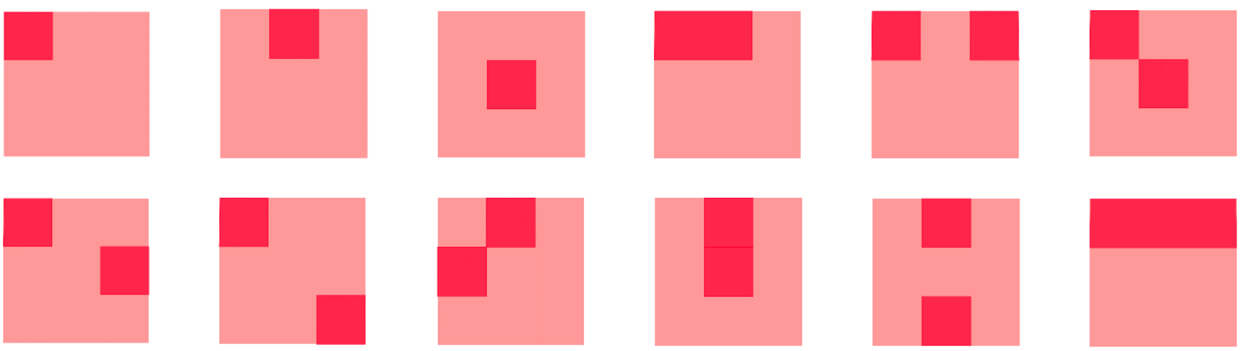
El kirigami es el arte del papel recortado, así como el origami lo es del papel plegado. Vamos a mezclar papiroflexia y kirigami. La idea es doblar un papel en las partes que necesitemos (no necesariamente iguales) y después dar un único corte recto para conseguir alguna de las siguientes figuras.

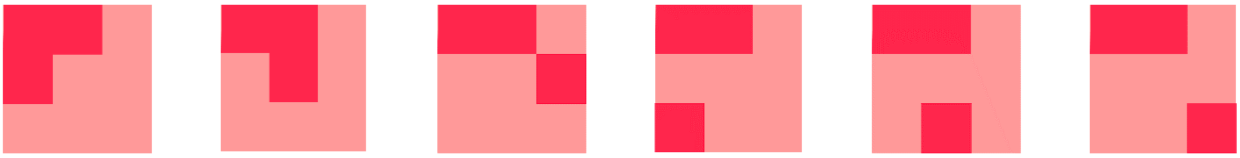


Puedes encontrar más información en “Doblar y cortar. Kirigami geométrico” Grupo Alquerque. Publicado en la revista Suma nº 59 y en DivulgaMAT

Sasaki´s puzzles

Utiliza cuadrados de papel con caras distintas. La idea es reproducir el patrón color rosa, con tan pocos pliegues como sea posible. No hay reglas, puedes usar diagonales, quintos, tercios, cuartos, lo que tú quieras. Son todas las combinaciones posibles de los nueve lugares disponibles, busca las 18 que faltan. Mas información en British Origami





TETRAEDROS

Construye tetraedros

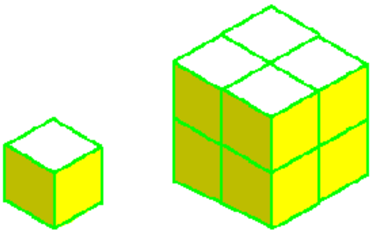
Con un rectángulo.

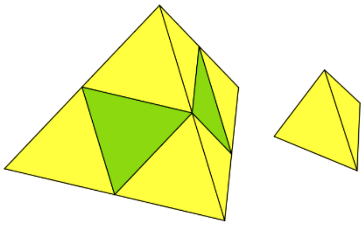
Pega los bordes estrechos para tener un cilindro. Pega el borde del cilindro doblándolo a la mitad. Luego pega el otro borde perpendicular al primero.

Con un triángulo

¿Puede doblarse a lo largo de tres rectas cualquier triángulo recortado en papel de manera que forme un tetraedro (no necesariamente regular)? ¿Qué condiciones debe cumplir el triángulo?

Piezas que llenan todo el espacio



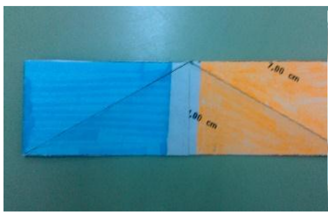


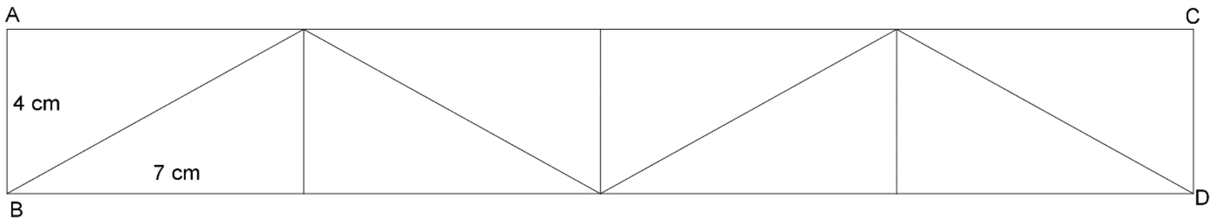
Con ocho cubos de arista 1 puedes formar otro cubo mayor de 2 unidades de arista. ¿Cuántos cubos necesitas para formar un cubo de 3 unidades de arista?

Con tetraedros regulares idénticos, ¿podrías construir un tetraedro más grande, de arista doble de los primeros? ¿Cuántos necesitarías?

Construye un tetraedro plegable

Recorta una tira de papel con las medidas de la de abajo y dobla en las separaciones de los rectángulos y en las diagonales que tienes en el dibujo. Con un trozo de celo pega A con C y B con D. Dobla para formar el tetraedro.





Cortando un tetraedro

Si se corta un tetraedro de un decímetro de arista en cada uno de los vértices de un tetraedro de dos decímetros de arista, ¿qué clase de sólido resulta?

Un tetraedro regular es cortado simultáneamente por seis planos. Cada uno divide al tetraedro por la mitad, pasando por una de las aristas y bisecando a la opuesta. ¿Cuántas piezas resultan?

LA TIRA DE PAPEL

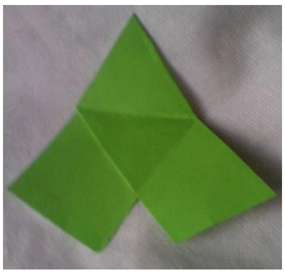
Tetraedro con una tira de papel de Jo Nakashima

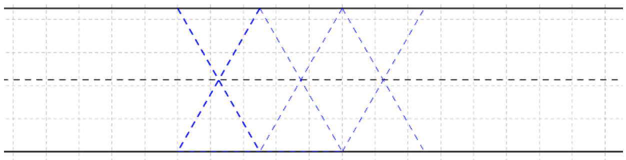
Haz una tira de papel con la cuarta parte de una hoja DINA4 cortada a la larga. Haz en ella triángulos equiláteros, quedan ocho y uno incompleto. Enrolla la tira dándole volumen con la forma de un tetraedro. Cuando has puesto cinco triángulos y te quedan tres cambia, enrollando en el sentido contrario e introduce el triángulo incompleto en el hueco en el que termina. Tienes un vídeo de Ángel Monteagudo en *"Tetraedro con tira de papel de Jo Nakashima"*

Hexágono

Con una tira de papel haz un triángulo equilátero y luego dobla la tira a la mitad, a la larga.

Ahora pliegas unas cuantas veces por los pliegues que han quedado señalados de antes y verás cómo al desplegar te resulta el hexágono con los radios y el centro





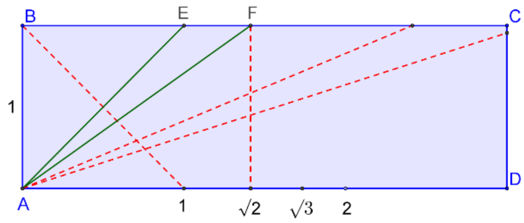
Nudo pentagonal y estrella

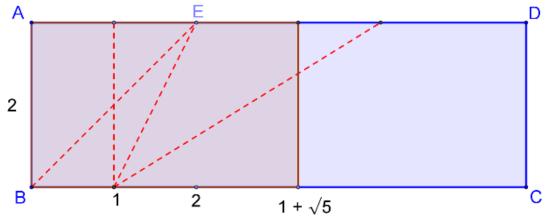
Necesitamos una larga cinta de papel. ¿Qué pasa si a esa cinta le hacemos un nudo simple? Si lo hacemos bien haciendo coincidir todos los lados obtenemos un pentágono regular y, mirándolo al trasluz, la estrella pentagonal que dibujan sus diagonales.

Aprovecha el nudo pentagonal para construir una estrella tridimensional.

Estrella de Arigato

Irracionales y rectángulo aureo





Toma medio folio cortado a la larga. Vamos a suponer que el lado menor mide 1, ¿cuánto mide AE? Lleva el punto E al lado AD y tendrás $\sqrt{2}$.

¿Cuánto mide AF? ¿Cómo obtienes $\sqrt{5}$?

En el otro medio folio, supón que AB mide 2. Dobla para formar el cuadrado y para dividir AE en dos partes. ¿Cuánto mide 1E? Lleva E sobre el lado BC y dobla por la perpendicular. El rectángulo que obtienes es aureo.

FLEXÁGONOS

Los flexágonos son polígonos, que mediante plegado, muestran más de las dos caras que tiene un polígono. Son unos caleidociclos planos.

Tri-hexaflexágono

Con una tira de diez triángulos puedes construir un Flexágono hexagonal de tres caras. Vídeo construcción Tri-Hexaflexágono

Si se toma una tira de 19 triángulos, se puede hacer un Flexágono hexagonal de seis caras, es como el anterior pero doble. Vídeo de construcción en Hexa-Hexaflexágono

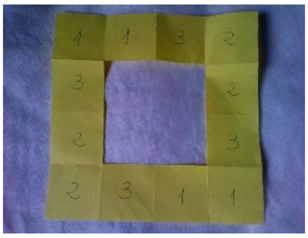
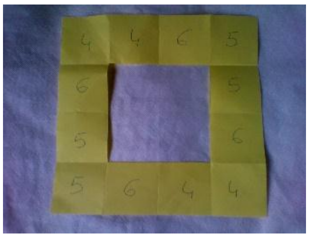
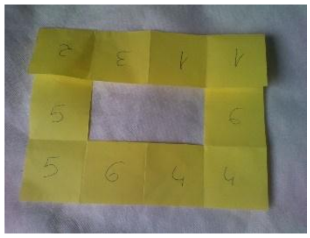
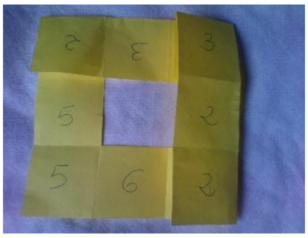
Foto-TriHexaFlexagon THF es una aplicación que te puedes descargar y te permite hacer flexágonos con tres imágenes elegidas por ti, por ejemplo este del congreso

Tetra-Hexaflexágono

Hay un Hexa-Flexágono en la Asociación Española de papiroflexia, que es con el primero que trabajé yo y en el que es muy interesante buscar la cuarta cara, girándolo parece que solo hay tres. Está en Flexágono 4

Hexa-Tetraflexágono

Es un Flexágono cuadrado de seis caras muy fácil de construir. Resulta curioso que siendo tan sencillo tenga tantas caras. Vídeo de construcción de Hexa-Tetraflexágono

Dobla un cuadrado en 16 partes, quita el cuadrado central y numera como en la figura. Dobla la parte de arriba, luego la derecha, la de abajo y por último la izquierda. Todos son 3 menos uno. Tienes que sacar el 3 que está debajo del 2, haciendo coincidir 2 con 2.

PAPIROFLEXIA MODULAR

La papiroflexia modular se diferencia de la papiroflexia normal en que para realizar las figuras utilizamos módulos.

Módulo Sonobè

El módulo Sonobè tiene como base un cuadrado.

Por su forma de plegado con sobres y pestañas que sirven para unirlos, se pueden formar muchas figuras.

Vídeos de la construcción del módulo sonobé y de un cubo

O un cubo que se convierte en rosa Magic Rose Cube

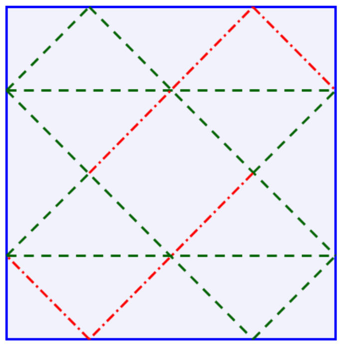
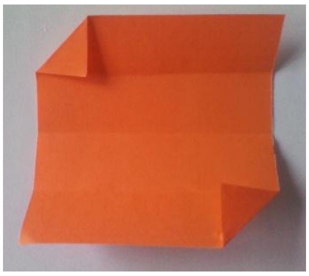
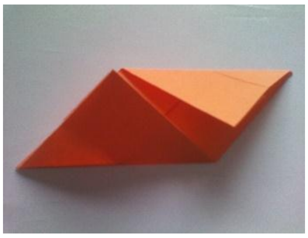
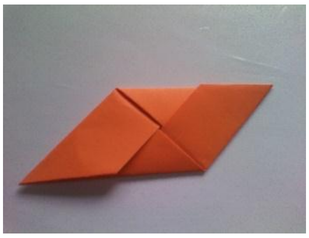


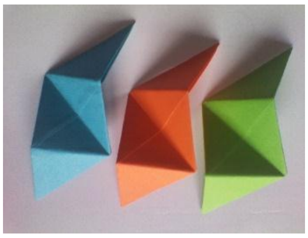
Diagrama del módulo Sonobè

Para hacer un módulo Sonobè tienes que dividir un cuadrado en cuatro partes y doblar dos esquinas opuestas, como en la figura. ¡**Atención con la paridad**! todos deben ser plegados con las mismas esquinas. Después dobla las otras esquinas sobre las anteriores e introdúcelas en la pestaña que hay. Te hacen falta tres módulos para hacer un tetraedro y seis para un cubo.

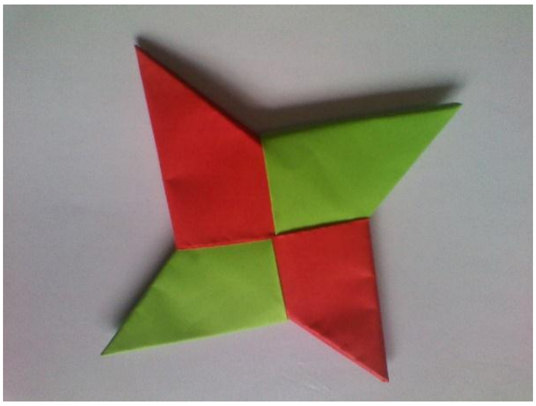








Módulo Shuriken



Con dos módulos Shuriken puedes hacer una estrella ninja que vuela.

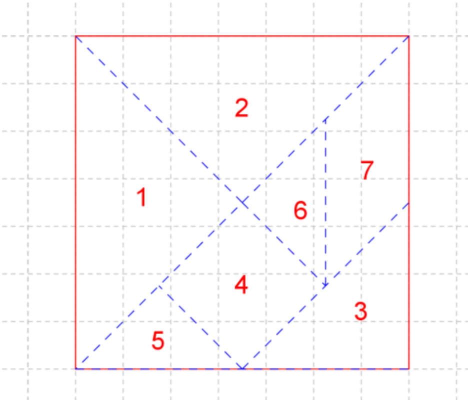
Tienes aquí las instrucciones [Estrella ninja] o en [vídeo]

ROMPECABEZAS DE PAPEL

Tangram

Es muy fácil hacer un tangram con un cuadrado de papel.

Divide el cuadrado a la mitad por la diagonal. Divide uno de los triángulos obtenidos a la mitad y tendremos las piezas 1 y 2. Para obtener la pieza 3 haz coincidir el vértice del ángulo recto del otro triángulo con el punto medio de la hipotenusa.



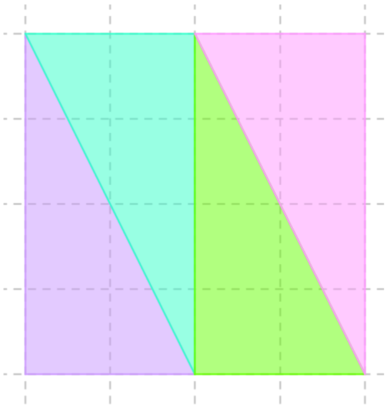
Dividir en dos partes iguales el trapecio que queda.

En una de ellas corta el triangulo 5 y el cuadrado 4. En la otra corta un triángulo igual al anterior 6, pero del ángulo recto del trapecio y ya está también el romboide 7.

Si tu tangram mide 1 unidad, ¿qué parte representan cada una de las piezas?

¿Cuál es el área y el perímetro de cada pieza?

¿Cuántos triángulos de distinta área puedes formar con las piezas del tangram?



Cuatro piezas

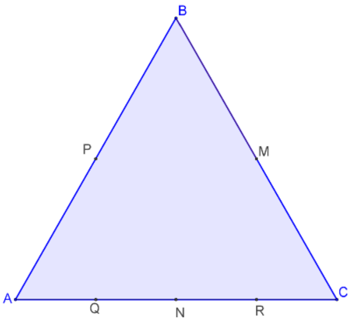
Divide un cuadrado en cuatro triángulos de la siguiente forma

¿Cuántos cuadriláteros distintos puedes formar?

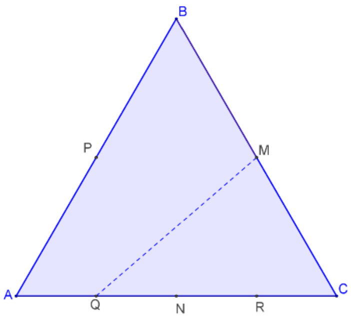
Ponles nombre.

Puzzle de Dudeney

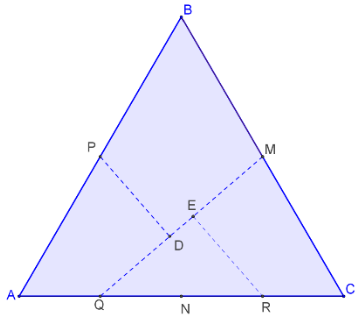
Con las siguientes piezas de un triángulo equilátero podrás hacer también un cuadrado.



Dobla para marcar los puntos medios de los lados y dividir AC en cuatro partes iguales



Dobla por la línea QM

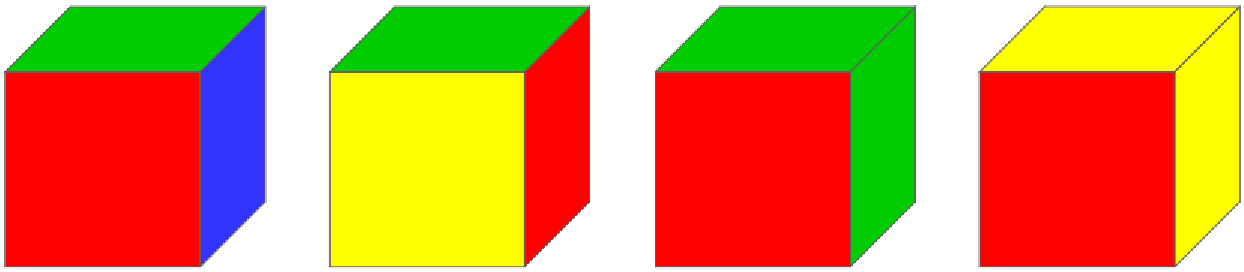


Haz las perpendiculares a QM desde P y desde R

Corta por las líneas de puntos

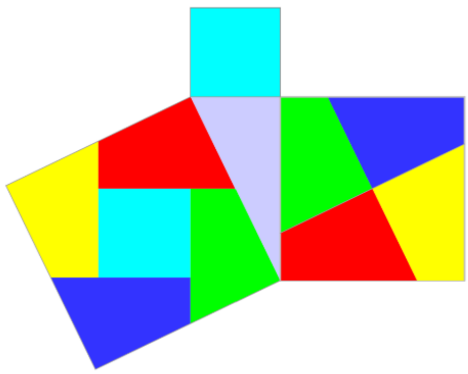
Puzzle locura instantánea

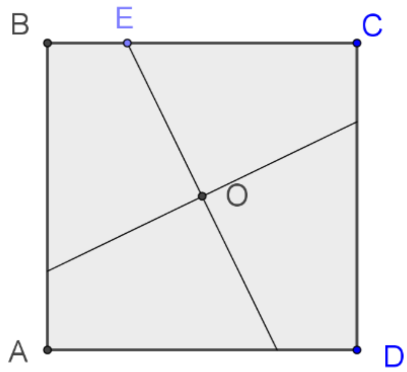
Con los cuatro cubos, tienes que construir una torre de manera que aparezcan los cuatro colores en los cuatro lados. Puedes encontrar como construir los cubos con papiroflexia [aquí]



Disección de Perigal

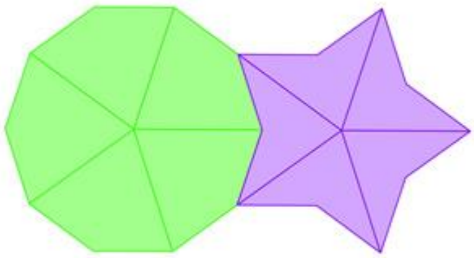
En un cuadrado, marca el centro y un punto en uno de los lados. Dobla por el punto y el centro y después por la perpendicular en el centro. Corta los cuatro cuadriláteros. Con ellos puedes construir otro cuadrado mayor, con un hueco en el centro. Es una demostración del teorema de Pitágoras. También puedes construir las piezas con papiroflexia. Perigal





Mosaicos de Penrose

Puedes hacer dardos y cometas para hacer una teselación no periódica.
Dennis Walker

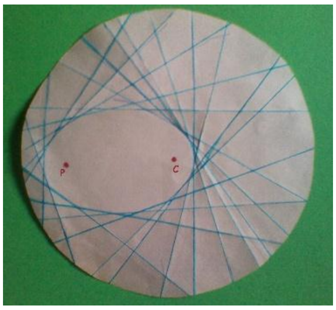


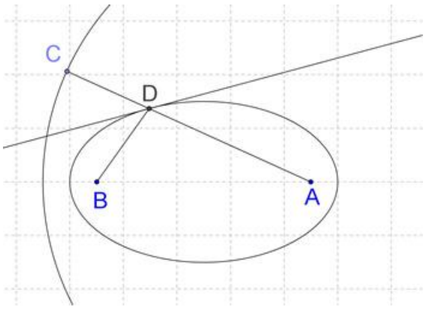
CÓNICAS ENVOLVENTES

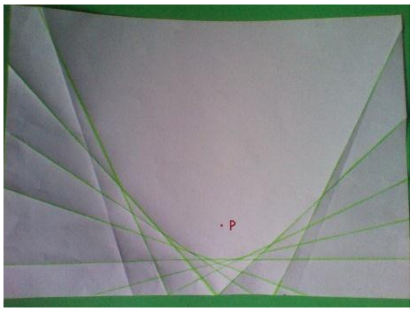
Para obtener una elipse doblando papel, dibuja una circunferencia de centro A y un punto interior a ella B. Dobla para hacer coincidir un punto de la circunferencia C con B. Si repites el procedimiento unas quince veces, con puntos alrededor de la circunferencia, obtienes la figura de una elipse rodeada de sus envolventes.

Para obtener una hipérbola hay que tomar el punto P fuera de la circunferencia.

Para la parábola se hace igual utilizando una recta en vez de una circunferencia.







Los puntos A y B son los focos de la elipse con eje mayor el radio de la circunferencia.

Las líneas que hemos trazado son la mediatriz de segmento CB (hacemos coincidir C con B) por lo que DC es igual a DB y la suma de DA con DB es constante, el radio de la circunferencia, para cualquier punto D. Luego los puntos D cumplen la definición de elipse.

Son además, tangentes a la elipse y bisectriz exterior de AD y BD. Para comprobarlo dobla por los puntos C y A, marca el punto D de la elipse y verás que hemos doblado DC sobre DB, la bisectriz.

Puedes verlo también con Geogebra para la parábola y elipse e hipérbola

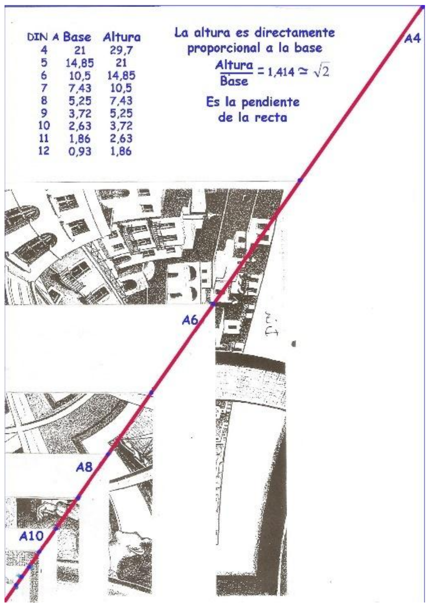
FUNCIONES

DIN A. La recta

Divide una hoja de papel DIN A 4 en dos partes, marca una de las partes como A 5 y consérvala. Divide la otra a la mitad, ahora tenemos dos A 6. Continua dividiendo a la mitad una de las partes y poniéndole nombre a la otra hasta que no puedas cortar más. Pega todas las partes ordenadas en la esquina inferior izquierda de otra hoja, marca con un punto el extremo superior derecho de cada hoja, comprueba que todos los puntos están alineados y únelos con una recta. La recta es la representación de las magnitudes directamente proporcionales

Haz una tabla para la base, la altura y la superficie de todos los DIN A desde el 0 al 12. Calcula el cociente entre la altura y la base. Las hojas DIN A tienen la propiedad de que son rectángulos semejantes (tienen la misma forma) por lo que el cociente entre el largo y el ancho es siempre el mismo. ¿Sabrías calcular cuál es?

Si la superficie de la hoja DIN A 0 es de 1 metro cuadrado, ¿cuáles son sus dimensiones?



Relación entre las dimensiones de rectángulos con la misma área

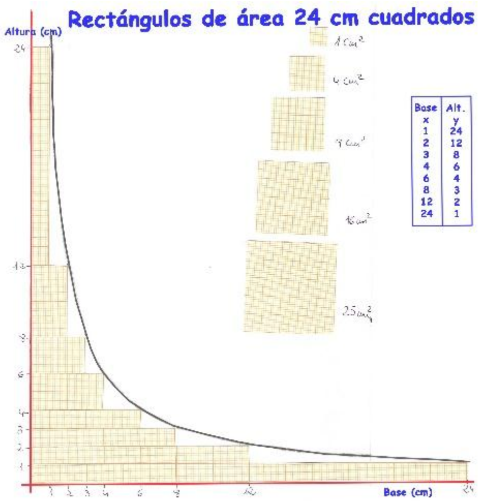
En una hoja de papel cuadriculado dibuja todos los rectángulos distintos que tengan de superficie 24 unidades cuadradas.

Recorta los rectángulos y pégalos en unos ejes de coordenadas cartesianas. Marca el vértice superior derecho con un punto y une con una curva todos los puntos.

Haz una tabla con todos los valores de la base, x, y la altura, y, que has obtenido. ¿Sabes el nombre de la curva?

¿Qué relación hay entre la base x y la altura y de todos los rectángulos que tienen un área común?

La hipérbola es la representación de las magnitudes inversamente proporcionales.



Tirarse al vacío

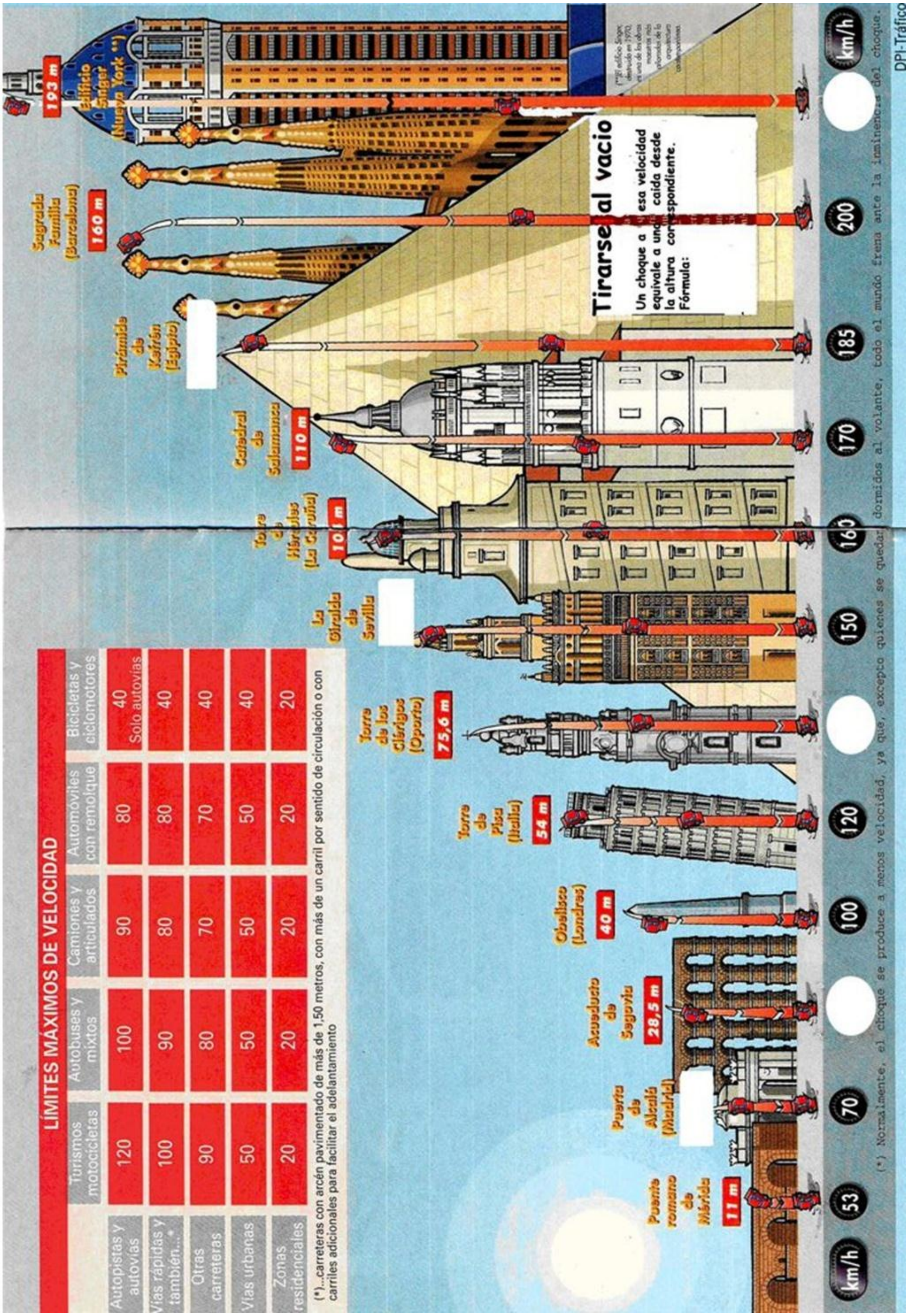
En un papel milimetrado pon unos ejes de coordenadas y representa los valores que tienes en el dibujo de las alturas desde las que caes, en función de la velocidad a la que circulas. Une los puntos que has obtenido con una curva, teniendo en cuenta que hay un punto que tiene un error.

Calcula los valores que faltan en el dibujo (alturas o velocidades) utilizando la gráfica que has obtenido.

Calcula cuales serían los valores que están fuera de la gráfica utilizando la fórmula que relaciona la energía potencial con la energía cinética.

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}\, m\, v^2 \quad g = 9{,}81\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

Tienes que hacer coincidir las unidades



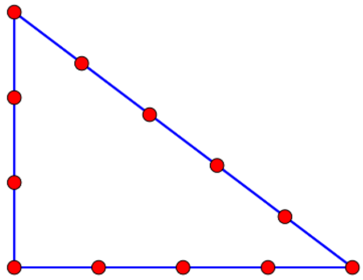
	Turismos motocicletas	Autobuses y mixtos	Camiones y articulados	Automóviles con remolque	Bicicletas y ciclomotores
Autopistas y autovías	120	100	90	80	40 Solo autovías
Vías rápidas y también...*	100	90	80	80	40
Otras carreteras	90	80	70	70	40
Vías urbanas	50	50	50	50	40
Zonas residenciales	20	20	20	20	20

Problemas isoperimétricos

Consisten en obtener la mayor superficie para un perímetro determinado.

¿Cómo quieres el campo?

Los antiguos egipcios eran muy buenos geómetras porque todos los años tenían que medir los campos, ya que habían quedado inundados por el Nilo. Utilizaban cuerdas, a cada uno le correspondía el campo rectangular que pudiera rodear con una cuerda. Para hacer el ángulo recto usaban el triángulo sagrado.

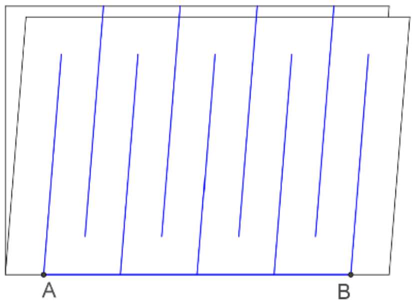


Si fueras un egipcio y te dieran una cuerda de 100 metros, ¿qué medidas elegirías para tu rectángulo? Haz una gráfica con la superficie del campo en función de la base del rectángulo.

Paso para elefantes

Recorta en una hoja de periódico un agujero lo bastante grande como para que a su través pudiera pasar andando un elefante.

1. Recorta la hoja de periódico como indica la figura.



Tienes que hacer un número impar de cortes. Cuantos más hagas más grande será el agujero.

Después corta a lo largo del doblez desde A hasta B.

Como pista se puede contar la historia de Dido, que resolvió el primer problema isoperimétrico. Cuando la reina Dido, fundadora de Cartago, llega a la costa de África huyendo de su hermano, el rey de los gétulos le concede “tanta tierra como pueda abarcar con una piel de buey”. Dido hace cortar tiras muy finas con la piel del buey y con ellas consigue acotar un extenso perímetro. Forma una circunferencia de entre 1 y 2 kilómetros y consigue circundar una superficie de entre 8 y 32 hectáreas.

¿Cuántas veces puedes doblar un folio?

Mira a ver si puedes más de seis veces. A lo mejor con un pañuelo muy fino puedes más veces. ¿Qué espesor tiene un folio? Mide un taco de 500 folios y divide. Si pudieras doblar una hoja 20 veces, ¿qué espesor resultaría? ¿Y si fueran 30 veces? ¿Cuántas veces tendrías que doblar para que la altura alcanzada fuera la misma que la distancia de la Tierra a la Luna? ¿Y de la Tierra al Sol?

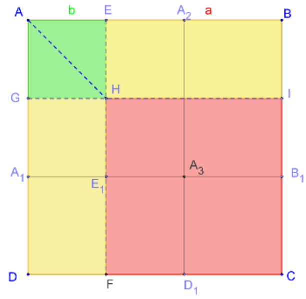
Identidades notables

Divide un lado de un cuadrado AB en dos partes distintas a y b. Dobla la perpendicular al lado AB por E. Lleva AE sobre AG. Dobla la perpendicular al lado AD por G.

¿Qué área tienen ABCD, HICF, AEHG, EBIH y GHDF? ¿Hay alguna relación entre ellas?

Dobla por GI, ¿qué área tiene A_1B_1CD? Relaciónala con las anteriores.

Dobla también por EF, ¿qué área tiene $A_3B_1CD_1$?

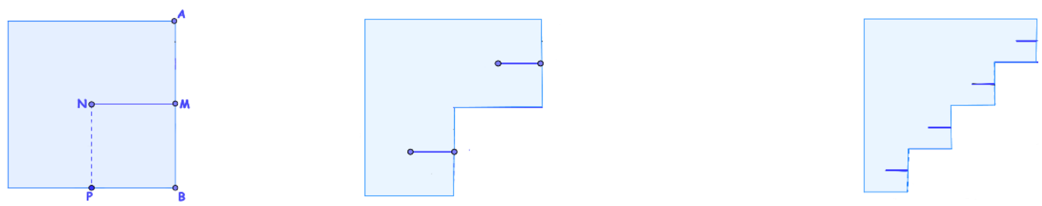


FRACTALES DE PAPEL

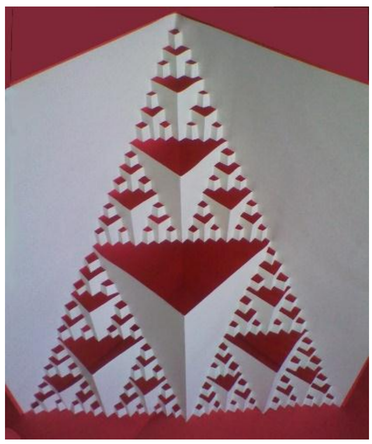
Iterando siempre el mismo proceso, de doblar y cortar, se pueden construir fractales

Triángulo de Sierpinski

Dobla un folio por la mitad. Corta por el lado del pliegue por MN, en la mitad hasta la mitad. Introduce la parte inferior. En los dos pliegues nuevos, repite el proceso.



Si lo repites varias veces obtendrás el **triángulo de Sierpinski**

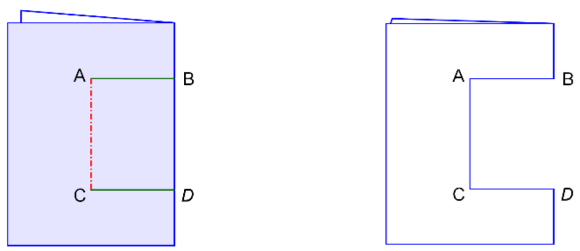


Escalera fractal

Dobla a la mitad un folio. Corta por AB y CD, a un cuarto del borde y hasta la mitad. Introduce la parte central que has cortado.

Si continúas haciéndolo varias veces obtendrás la escalera Fractal.

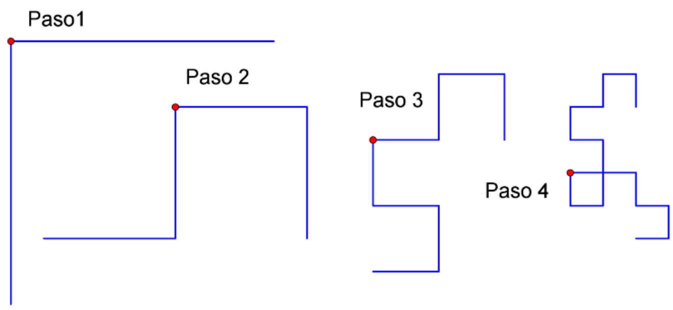
También puedes cortar en los tres pliegues



La curva del dragón

Puedes construir los distintos pasos de la curva del dragón con una tira larga de papel. Dobla la tira a la mitad y desdobla, tienes la 1ª iteración. Vuelve a doblar, ahora dos veces, y desdobla. Ya está el 2º paso.

Solo tienes que tener cuidado de doblar siempre en el mismo sentido.



Referencias.

Asociación Española de Papiroflexia. *Bases y símbolos*. http://www.pajarita.org/diagramas/diagramas.php

Robert Lang. Video "*The math and magic of origami*" http://www.ted.com/talks/robert_lang_folds_way_new_origami

Robert Lang. Programa TreeMaker. http://www.langorigami.com/science/computational/treemaker/treemaker.php

Diego Quevedo. Tutorial para aprender a manejar TreeMaker "*Proceso de diseño de una figura*" en creación en papiroflexia de la Asociación Española de Papiroflexia. http://www.pajarita.org/articulos/articulos

Axiomas de Huzita-Atori: http://en.wikipedia.org/wiki/Huzita%E2%80%93Hatori_axioms

Juan Pedro Rubio. *División del lado del cuadrado en partes iguales. Teoremas de Haga* http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=7972:5-divisiel-lado-del-cuadrado-en-partes-iguales-teoremas-de-haga&catid=65:papiroflexia-y-matemcas&directory=67

Fundación Cientec. *Herramienta triangular para medir ángulos*. http://www.cientec.or.cr/matematica/origami/transportador.html#notas

Grupo Alquerque. *"Doblar y cortar. Kirigami geométrico"*. Revista Suma nº 59. http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&id=13154:noviembre-2011-doblar-y-cortar-kirigami-geometrico-publicado-en-la-revista-suma-no-59-2008&directory=67

Sasaki´s puzzles. http://www.britishorigami.info/fun/sasaki.php

Grupo Alquerque. *Polígonos con una tira de papel*. Revista Suma, junio 2004 http://revistasuma.es/IMG/pdf/46/095-098.pdf

Ángel Monteagudo de *"Tetraedro con tira de papel de Jo Nakashima"*. Vídeo http://www.youtube.com/watch?v=Jx07Izt8dGg

Roberto Cardil. *Construcción de poliedros. Técnicas sencillas*. Matemáticas visuales

http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/construccionpoliedros/ttm.html

Peter Hilton y Jean Pedersen. *Construcciones recreativas*. http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/hil/pe1.htm

Victoria Torres Bello. Geometría en papel. http://www.rinconmaestro.es/matematicas/geometria/geometria23.pdf

Trini Mora. Como hacer estrellas de papel infladas http://manualidades.euroresidentes.com/2013/11/como-hacer-estrellitas-de-papel-infladas.html

Vi Hart. Hexaflexágonos 1 y 2. https://www.youtube.com/watch?v=zVGaiakMMS8

http://www.youtube.com/watch?v=paQ10POrZh8

Jürgen Köller. *Flexagons.* http://www.mathematische-basteleien.de/flexagons.htm

Kunihiko Kasahara y Toshie Takahama. (2013). *Papiroflexia para expertos.* Editorial Edaf.

Eduardo Gil Moré. *Papiroflexia y Geometría.* Editorial Salvatella.

Martin Gardner. (1980). *Nuevos pasatiempos matemáticos.* Alianza Editorial.

Martin Gardner. (1988). *Ruedas, Vida y otras diversiones matemáticas.* Editorial Labor

Gathering 4 Gardner. Aniversario del nacimiento de Martin Gardner. http://gathering4gardner.org/

Brian Bolt. (1990). *Más actividades matemáticas*. Editorial Labor

Ya. I. Perelman. (1983). *Problemas y experimentos recreativos*. Editorial Mir Moscú.

Para hacer referencia a este artículo:

Negueruela, I. (2015). Papiroflexia para aprender Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 245-266). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

MESA **REDONDA**

IMPLEMENTACIONES METODOLÓGICAS ENTRE ETAPAS EDCATIVAS

Sonsoles Blázquez[a] Elena Cojo Carrasco[b], Fernando Sanz Sánchez[c], Manuel E. Serrano Caballero[d]

[a]IES "Pío del Río Hortega" (Portillo, Valladolid),

[b]CEIP "Miguel Delibes" (Aldeamayor de San Martín, Valladolid),

[c]Universidad de Valladolid , [d]IES "Mariano Quintanilla" (Segovia).

Resumen

La mesa redonda pretendió contrastar las dificultades y oportunidades que se generan entre las distintas etapas educativas de acuerdo a las metodologías utilizadas. Para centrar el tema, cada docente intentó contestar a una pregunta relacionada con el tema.

Palabras clave: *metodología, matemáticas, etapa educativa*

DESDE LA PERSPECTIVA DEL PROFESORADO DE ESO. (SONSOLES BLÁZQUEZ).

Cuestiones de debate.

La innovación en la metodología debe estar refrendada por su eficacia para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. ¿La innovación metodológica conlleva siempre eficacia metodológica? ¿Cómo analizar la eficacia de una metodología? ¿Hay metodologías más eficaces para cada una de las etapas educativas? ¿Qué factores inciden en que la aplicación de una determinada metodología sea más eficaz?

Presentación.

Para comenzar debo clarificar el término innovación, tan utilizado últimamente en el ámbito empresarial, junto con la investigación y el desarrollo (también en el mundo educativo debería ir de la mano de la investigación y el desarrollo). Innovar requiere introducir cambios en el proceso educativo que sean novedosos, pero movilizando ideas que tengan valor para la educación. Ahora bien, ¿qué significa ser válido o tener valor en la educación? Una innovación será válida si es eficaz para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, que al fin y al cabo es el objetivo de nuestra "empresa". Formamos personas para desenvolverse en la sociedad actual, por lo que la enseñanza será eficaz en la medida en que dote a nuestros alumnos y alumnas de las herramientas, de las capacidades necesarias para enfrentarse a los retos actuales y para evolucionar a medida que evoluciona la sociedad.

Esta innovación, en consecuencia, debería ser constante, adaptándose a los cambios sociales, científicos y culturales. Sin embargo, la sociedad evoluciona mucho más rápidamente que la enseñanza. Baste como ejemplo la rápida evolución en tecnologías de la información (en 30 años hemos pasado de no tener ningún medio computacional a tener móviles inteligentes que podemos llevar a todas partes), que no ha venido acompañada por una revolución en las aulas de la misma magnitud. Por poner un ejemplo, los contenidos de los que se evalúa en selectividad son similares a los de hace 30 años, obviando que las máquinas hoy en día son capaces de realizar, en unos pocos segundos, algunas de las tareas requeridas, como la representación de funciones. La enseñanza debe evolucionar a la par que la sociedad, y la innovación es su motor.

Innovación y eficacia metodológica

No todas las innovaciones, aunque respondan a necesidades sociales, son siempre eficaces. El ejemplo más claro en matemáticas viene dado por la introducción de la Matemática Moderna, que supuso un gran cambio en la enseñanza (se ofrecía a los alumnos la matemática ya construída, abstracta, desvinculada de la vida cotidiana, la matemática que estudian los matemáticos) en un afán de allanar el camino en la mejora del conocimiento científico y tecnológico de los jóvenes (los norteamericanos estaban alarmados por la superioridad tecnológica de la URSS que había lanzado el primer satélite). El fracaso fue evidente porque no sólo no sirvió para mejorar el conocimiento matemático, sino que consiguió que muchas generaciones aborrecieran las matemáticas y dudasen de su utilidad.

Actualmente seguimos encadenando una reforma tras otra en educación, pero la base siguen siendo los contenidos y su evaluación, por mucho que se introduzca la terminología de las competencias. Muchos de nuestros alumnos saben muchos contenidos, pero no son capaces de utilizarlos para resolver cuestiones de la vida cotidiana (algunos de mis alumnos consiguen hacer operaciones combinadas con naturales y enteros, pero tienen dificultades para resolver un problema del tipo "si medio queso cuesta 3 euros, ¿cuánto cuesta el queso entero?"). Esto se pone de manifiesto en las pruebas de Pisa, y justamente los resultados de dichas pruebas deberían hacernos reflexionar sobre si estamos utilizando la metodología adecuada. Personalmente creo que los resultados de Pisa no se están utilizando adecuadamente, no se reflexiona sobre la práctica docente, sino que se plantea como una competición que hay que preparar como si de una carrera se tratase.

En este momento, teniendo en cuenta la potencialidad de la tecnología, no bastaría con una adaptación metodológica, sería necesario una revisión de los contenidos, muchos de los cuales se encuentran en la red a un "clic". Los gobiernos siguen elaborando currículos llenos de contenidos y vacíos de aquellos procesos matemáticos que llevan a la búsqueda y utilización de dichos contenidos. De nuestra mano está conseguir innovaciones metodológicas que se centren en dichos procesos más que en los contenidos en sí.

La eficacia, desde mi punto de vista, incluye el desarrollo real de la competencia matemática y de lo que ella conlleva (pensar matemáticamente; plantear y resolver problemas matemáticos; modelar matemáticamente; argumentar matemáticamente; representar entidades matemáticas (objetos y situaciones); utilizar los símbolos matemáticos; comunicarse con las matemáticas y comunicar sobre matemáticas; utilizar ayudas y herramientas (incluyendo las nuevas tecnologías). Esto se puede y se debe hacer en todos los niveles educativos.

Factores que influyen en la eficacia de una metodología

Nos planteamos entonces cómo diseñar metodologías innovadoras que sean realmente eficaces, en el sentido ya señalado de dotar al alumnado de las herramientas necesarias para desenvolverse en la sociedad actual y de adaptarse a los cambios. Voy a mencionar algunos aspectos que considero importantes en el diseño de una innovación metodológica, aunque seguro que en el transcurso de la mesa redonda se podrán aportar más.

1. Innovación requiere conocimiento, no sólo científico, sino didáctico y metodológico (en secundaria y universidad este último es muy importante porque no se adquiere en la formación inicial), por lo que la formación permanente del profesorado es un pilar fundamental para diseñar buenas prácticas educativas.

2. La investigación educativa sirve como fuente de innovaciones y también como medio de validar algunas de ellas. Esto supone una necesidad de colaboración entre profesores e investigadores

educativos, si bien esta colaboración en la actualidad no se fomenta suficientemente.

3. Es un hecho que el trabajo colaborativo y la coordinación entre profesores es menor cuanto mayor es el nivel educativo, pero es esencial a la hora de diseñar innovaciones, ya que es fuente de más y mejores ideas, de planteamiento de distintos puntos de vista, y de emisión de críticas constructivas para mejorar la experiencia.
4. En esta línea, la difusión de experiencias de calidad en la red, en las publicaciones y en los congresos, y subrayo sobre todo la idea de calidad, es una herramienta de gran utilidad para el profesorado que aprende del resto y puede experimentar e idear nuevas actividades. Se difunden multitud de experiencias, pero no todo tiene interés y el profesorado, en ocasiones, tiene la sensación de que está empleando su tiempo para nada.
5. Y, aunque quizás pudiera ser lo primero, quiero señalar que es precisamente la motivación del profesorado, un requisito imprescindible, no válido por sí mismo pero imprescindible, para diseñar prácticas educativas innovadoras. Y también el aspecto motivacional del profesor está un poco desatendido, no solamente la sociedad desprestigia su trabajo sino que se ve condicionado por cuestiones administrativas que deberían situarse sin duda en un segundo plano.
6. Por último, y no menos importante, la motivación del alumnado es un condicionante ya que es difícil aplicar nuevos métodos sin la colaboración de sus protagonistas. Así, las tareas deben ser accesibles, interesantes y lo suficientemente guiadas para que el alumno aprenda y perciba su éxito, que es sin duda su mayor motivación.

Metodologías y etapas educativas

En mi opinión, la forma de trabajar que se propone tiene que ser esencialmente la misma en todos los niveles educativos, adaptados eso sí a las capacidades de los alumnos, porque de lo contrario suponen una ruptura tal, que llega a ser inviable su puesta en práctica. Intentar, por ejemplo, que lleven a cabo trabajos en grupo en secundaria es una tarea harto difícil aunque se les dé pautas, ya que tienden a disgregar el trabajo en partes y no colaborar entre ellos. Esta forma de trabajo debe introducirse poco a poco desde educación infantil. Tampoco sirve de nada trabajar con metodologías activas en secundaria si posteriormente los alumnos van a la facultad a tomar apuntes y escuchar las clases magistrales de un profesor. Bolonia plantea un cambio metodológico que aún no ha llegado en profundidad a las universidades, donde las matemáticas se enseñan muchas veces como si todos los alumnos fueran a ser matemáticos.

Está claro que el desarrollo cognitivo del alumno condiciona su forma de aprender, y es por ello que la metodología no puede ser exactamente igual en las etapas educativas. En edades tempranas debe tener más protagonismo el aspecto manipulativo, que se abandona demasiado pronto en mi opinión (en secundaria apenas se utilizan materiales manipulables y tristemente tampoco en muchos cursos de primaria), para ir aumentando poco a poco el grado de abstracción. El cálculo también debe tener su papel en todas las etapas, de forma progresiva y no repetitiva, pero no tanto el cálculo de lápiz y papel, desplazado por las máquinas (que algunos aún se niegan a utilizar) sino el cálculo mental y la estimación, que siguen siendo los grandes olvidados de nuestras metodologías. Y, por supuesto, la tecnología tiene un papel esencial en la sociedad y debería tenerlo en la escuela (pese a las restricciones económicas). Debemos transmitir que los recursos tecnológicos sirven para adquirir conocimiento, y no sólo para jugar o visitar redes sociales (que es lo que hacen con la tecnología de la que disponen), son las herramientas que nos facilitan el trabajo y que convierten la tarea matemática en lo que realmente es, investigación, relegando las tareas rutinarias a un segundo plano y permitiendo profundizar en la comprensión de los conceptos y su génesis ligada a las necesidades humanas.

DESDE LA PERPECTIVA DEL PROFESORADO DE INFANTIL Y PRIMARIA. (ELENA COJO).

Cuestiones de debate

Las etapas educativas tienen características específicas, tanto por la complejidad de los contenidos que se enseñan/aprenden, como por el nivel de desarrollo de las competencias del alumnado. ¿Hay metodologías que se pueden poner en práctica en todas las etapas educativas? ¿Qué metodologías favorecen los pasos de una etapa educativa a otra?

Presentación

Actualmente ¿qué hacemos en clase de matemáticas? La enseñanza de las matemáticas ha cambiado, pero la mayoría de las personas implicadas en ello, no se han dado cuenta. Algunas características comunes y generales son las siguientes:

- Explicamos dogmas o desarrollamos una actividad mental
- La tendencia metodológica sigue siendo hacer ejercicios, hacer multiplicaciones, divisiones… o nos acercamos a su utilización como medio para desarrollar pensamiento
- Hay una tendencia general de los profesores, sobre todo en infantil y primaria, de huir de las clases de matemáticas.
- Existe una evidencia de que la enseñanza de las matemáticas en muchas aulas ha quedado separada de la realidad de las novedades en la didáctica de las matemáticas.

Las etapas educativas tienen características distintas en cuanto a la complejidad de contenidos, el desarrollo de competencias del alumnado y en cuanto al alumnado. Esto puede suponer que cada etapa debería tener una metodología más adecuada para la enseñanza de las matemáticas ¿podemos elegir la mejor para cada etapa? ¿o debemos buscar una que se ponga en práctica en todas las etapas educativas? ¿Es el trabajo por Proyectos? ¿quizá la enseñanza basada en problemas?

Desde mi limitada experiencia en el campo de enseñanza de las matemáticas, primero desde la educación infantil y ahora desde la educación primaria, creo que esta es una pregunta que no es funcional para el ámbito educativo, porque aún llegando a la conclusión lógica y científica de cual es el método que más se adecua a una etapa u otra y cual es el que favorece el paso entre etapas; no conseguiríamos que todos los maestros y docentes que inciden en el alumnado lo lleven a la práctica. Por lo que deberíamos buscar unas características generales que se pudieran aplicar a las distintas metodologías y que dieran esa coherencia en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas entre los distintos docentes y las etapas.

En el centro en el que trabajo, todos somos distintos y tenemos metodologías diversas para trabajar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas pero lo que estamos haciendo es reflexionar sobre la didáctica de las matemáticas para intentar buscar una postura común que facilite el paso de nuestros alumnos/as de infantil a primaria. Esto no es una tarea fácil y estoy hablando de un solo centro, no me puedo imaginar esto a nivel de un país. El curso pasado lo hemos dedicado a transmitir a nuestros compañeros la necesidad cambiar, de planificar nuevas estrategias que ayuden a nuestro alumnado y a establecer que estas nuevas metodologías funcionan. Todo este trabajo ha supuesto un cambio en el pensamiento del profesorado de infantil y primaria y una preocupación por conocer y mejorar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Desde nuestro punto de vista, hemos detectado algunas variables comunes en las diferentes propuestas de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, tanto en nuestras metodologías, como en nuestra planificación docente, que van a facilitar el paso de una etapa a otra y el aprendizaje de las matemáticas y que van a dar coherencia a las diferentes metodologías. Estas propuestas son:

- En cuanto a la planificación docente:
    - La importancia de la reflexión, planificación y evaluación de estrategias en la enseñanza de la matemática durante todo el curso escolar. Es mejor que la reflexión sea compartida con otros profesores. Ya que ayuda a mejorar la calidad de enseñanza y aprendizaje en el área de matemática porque permite detectar dificultades y desarrollar habilidades y programas de acción, para dar solución efectiva a los problemas que se presentan a la hora de adquirir un conocimiento.
    - Perder el miedo al cambio metodológico, reducir la importancia de técnicas tradicionales y del uso del libro de texto para el desarrollo de contenidos.
    - Intentar aprovechar las nuevas investigaciones sobre didáctica de las matemáticas, por lo que es necesario formarse sobre la implementación de nuevas propuestas.

- En cuanto a las actuaciones con el alumnado:
    - Basar la enseñanza aprendizaje en la experiencia y en el descubrimiento. Planificando actividades que promuevan un alumno artífice de su aprendizaje y un maestro guía y orientador.
    - Ser paciente en la espera de respuestas y no anticiparse para que los alumnos lleguen a sus propios razonamientos.
    - Utilizar la manipulación de materiales para desarrollar la capacidad investigadora, la experimentación, el interés y la motivación. Los primeros conocimientos lógico-matemáticos se adquieren mediante la manipulación de diferentes materiales; a través de la experimentación los alumnos trabajan la agilidad mental, estimulan la concentración e incrementan su capacidad de abstracción
    - Planteamiento de actividades de razonamiento lógico para identificar, seriar, comparar, clasificar diferentes objetos de acuerdo con sus características. Uso de diferentes juegos que contribuyan al desarrollo de este pensamiento.
    - Potenciar el ensayo, la capacidad de buscar soluciones diferentes y alternativas y tratando el error como una oportunidad de aprendizaje.
    - Habituar al alumno a verbalizar, explicar y fundamentar sus conclusiones en las actividades que realizan y buscar su relación con las situaciones próximas y cercanas.
    - Comprobar por distintas vías que se han adquirido los conocimientos básicos que se están intentando transmitir, hacer propuestas en el que tengan que hacer usos diferentes de esos conocimientos. Provocar dudas y desafíos utilizando preguntas que ayuden al pensamiento.

- Apoyar la participación del alumno, buscar la espontaneidad y la aportación natural de todos. Buscar actividades en grupo en las que se desarrolle y respete la participación de todos.
- Motivar a los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas.

La aplicación en las clases de Matemáticas de metodología activa que respete el desarrollo psicológico de nuestros alumnos permite crear un ambiente motivador en el aula. Por eso siempre que cumpla con estos estándares la metodología será adecuada para el nivel en el que estemos trabajando y todas las propuestas que estamos viendo en este congreso se adecuan en estas características comunes. Dependiendo del nivel educativo en el que nos encontremos, resultarán más importantes unas u otras variables, pero todas estarán inmersas en nuestra actividad diaria.

Previo a la búsqueda del método mejor para conseguir mejorar la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas debemos conseguir que todos los agentes implicados directamente en ello, entiendan que la enseñanza de las matemáticas ha cambiado y que esto debe suponer un cambio metodológico en su práctica diaria. Si todos nos implicamos en este cambio supondrá que a nuestras propuestas metodológicas subyacen unas variables comunes, ya ejerzamos nuestra docencia en infantil, en primaria, secundaria o niveles superiores, variables que facilitarán el paso de una etapa a otra.

DESDE LA PERSPECTIVA DEL PROFESORADO UNIVERSITARIO. (FERNANDO SANZ).

Cuestiones de debate

¿Qué tipos de problemas, relacionados con la metodología, se encuentran en el paso de Bachillerato a la Universidad en relación con el aprendizaje de las matemáticas? ¿Está preparado un alumno/a para su paso a la Universidad donde, según los planes de estudio de *Bolonia,* debe realizar y exponer trabajos principalmente realizados de manera autónoma?

Presentación

Es evidente que a lo largo de los últimos años han aparecido muchos más medios, mucho más material y mucha mayor disponibilidad de metodología para docentes y alumnos para ayudar a la enseñanza y al aprendizaje; en todas las materias, pero particularmente en matemáticas. Podría pensarse en un primer momento que el acceso rápido y universalizado a la información contenida en Internet debería paliar en muy alto grado algunas carencias de aprendizaje que los de generaciones como la mía han tenido por circunstancias que podrían resultar muy prosaicas ahora como el "no tomé bien los apuntes ese día", "estaba despistado por pensar en el examen del día después" o "mis padres no me han podido ayudar porque no se acuerdan de estos temas".

Pero evidentemente esto no es así. La gran cantidad de *información* no entraña por sí sola un avance en la *formación*, prácticamente en ninguna materia, pero muy destacadamente en las matemáticas. Esta parte del conocimiento intelectual de la humanidad, útil y necesaria como ninguna por su ubicuidad en todos los ámbitos científicos, (y me estoy refiriendo sobre todo a las matemáticas de nivel de bachillerato o primeros años de universidad) difícilmente puede aprenderse por uno mismo por mucho material o tiempo del que se disponga, o por muy innovadoras o espectaculares metodologías utilizadas, si no hay intermediación de docentes acostumbrados a tratar estas materias.

Por eso la labor y la formación de los profesores es esencial y siempre lo ha sido, tanto en la época que yo he conocido, como en la época actual. Creo que los profesores están por encima de innovaciones metodológicas de la enseñanza o por encima de la capacidad de acceso a la ilimitada información que se tiene sobre cualquier materia. Digo esto y a la vez creo en la validez de nuevos métodos pedagógicos que estén bien diseñados. Sin embargo, desde mi experiencia y las de mis colegas como profesor universitario, se siguen detectando ciertos problemas de adecuación del aprendizaje de las matemáticas en las etapas pre-universitarias para afrontar los estudios universitarios de ciencias.

En estos minutos, más que intentar presentar metodología pedagógica concreta para paliar estos problemas, voy a intentar sintetizar algunos aspectos en los que, en mi modesta opinión, deberían centrarse de manera general los métodos, estrategias y programaciones de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el bachillerato

Conceptos, definiciones e ideas

- Las matemáticas no pueden consistir sólo en la adquisición de unas destrezas o ciertas habilidades aprendidas y "repetidas" una y otra vez.
- Se parte de conceptos y definiciones precisas que deben conocerse y manejarse con exactitud (no podemos quedarnos por ejemplo con que una función continua es "la que" se dibuja sin levantar el lápiz del papel) y no confundirse (como cuando se dice que una recta "pertenece" a un plano, se confunden puntos y vectores, se confunde una función por su valor en un argumento concreto o se tiene poco cuidado en la diferencia entre hallar primitivas y calcular integrales)
- En cada concepto, definición o desarrollo de un problema hay múltiples ideas matemáticas que hay que hacer que el estudiante observe una y otra vez, que se repita la idea es preferible a que se repita la "receta" para adquirir una habilidad concreta de resolución: nunca está de más en insistir en la idea del "infinito", en la idea de "congruencia", "similitud", "simetría", "proporcionalidad", etc.

Razonamiento y lógica

- La gran asignatura pendiente: las demostraciones, la teoría, los razonamientos lógicos son parte consustancial de las matemáticas. Si todo lo que aprenden de matemáticas parece estar dado porque lo ha establecido el profesor, el libro de texto, o porque se ha leído en internet, no se le está enseñando a que adquiera capacidades matemáticas.

  (No me parece descabellado por ejemplo que, al igual que se considera de cultura general tener conocimientos sobre acontecimientos históricos como el descubrimiento de América, la Revolución Francesa o la crisis del petróleo, se conozca la demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo son dos rectos, de que existe una infinidad de números primos o de que sólo existen 5 sólidos regulares en el espacio)
- Las ideas "intuitivas" de los argumentos o demostraciones matemáticas están bien, pero no debemos quedarnos sólo con eso. No debería bastarnos con sólo una interpretación geométrica del Teorema de Bolzano, o del Teorema de Rolle. Si no nos "pegamos" un poco con las demostraciones y los

razonamientos abstractos antes de la universidad nos estrellaremos en la universidad cuando nos lo exijan.

- No debe evitarse experimentar la lógica y sus reglas, aprovechando cada pequeño problema para ello. A fin de cuentas, estas reglas las tenemos todos de manera natural en nuestra mente humana, la dificultad consiste en encadenar varias de estas reglas unas detrás de otras, no conviene desalentarse o abandonar los razonamientos lógicos sólo porque lleven un poco más de tiempo detenerse en ellos.

Lenguaje matemático

- Quizá es en este apartado en el que se incide menos, siendo uno de los más responsables de que los alumnos que acceden a la universidad no estén preparados para realizar y exponer los trabajos que los planes de estudio de Bolonia exigen.
- Seguramente una buena parte de las dificultades que se le plantean al alumno al estudiar las matemáticas está en el "lenguaje de las matemáticas". A fin de cuentas, las matemáticas son también un lenguaje nuevo (a veces incluso sólo son lenguaje, riguroso y preciso). Conviene entonces detenerse en este tema y darle mayor importancia.
- No deberían considerarse como menores algunos errores que atañen sólo a la presentación de las fórmulas, uso de símbolos lógicos, uso de notaciones, etc.
- Resolver problemas en matemáticas y expresar las soluciones no puede ser sólo una lista de fórmulas y símbolos uno detrás de otro sin que parezca que haya un hilo conductor. Hay que usar la palabra y el lenguaje común para explicarse, decir lo que se está haciendo y lo que se va a hacer en la resolución, dejar claros todos los pasos que se están dando.
- Pero el uso del lenguaje para explicar argumentos en matemáticas no debe tener las ambigüedades propias del lenguaje corriente: hay que esforzarse en realizar frases precisas y correctas, expresando en cada frase, aunque sea repetitivo, siempre el sujeto con todos sus complementos, verbo y predicado.
- Hay que dar ocasión por tanto a que el alumno exprese o trate de explicar en palabras lo que ha entendido. ¿Por qué no incentivar un poco más los exámenes orales, o las exposiciones orales de algunos temas por parte de los alumnos?

(Un buen experimento para intentar saber si uno ha expresado correctamente sus ideas es que los apuntes o notas tomados por un alumno las lea otro compañero. En cualquier caso las discusiones entre compañeros sobre temas matemáticos suelen ser muy fructíferas).

Trabajo, esfuerzo y voluntad

- Es común que en todas las materias cursadas por un alumno le pidamos trabajo, dedicación, esfuerzo, energía, voluntad,… Pero en matemáticas, que debe concebirse, además de herramienta científica, como una actividad del pensamiento humano, hay que pedirlo especialmente.
- Y precisamente, hay que incentivar el que el alumno recapacite y medite sobre los conceptos introducidos o sobre los argumentos mostrados en clase; que los ejemplos que los alumnos deben trabajar no se limiten sólo a repetir la aplicación de una fórmula a una y otra situación numérica, sino

que vayan a buscar los límites de la aplicabilidad de los conceptos. Desde luego que es importante que se resuelvan correctamente los problemas desde el punto de vista del cálculo, pero esto no es todo en matemáticas (sobre todo al nivel de bachillerato).

- La voluntad de internarse en experimentar matemáticas se premia, porque en poco tiempo se pueden conseguir grandes resultados. No me parece tan cierto aquello de que algunos no están para nada capacitados para entender tal o cual concepto de matemáticas (a nivel de bachillerato), o para resolver ciertos problemas: como dije antes, forma parte intrínseca de nuestra naturaleza de seres con capacidades intelectuales.
- Es bueno (y conveniente) presentar algunos de los temas o aspectos más lúdicos, más llamativos, más interesantes, más atractivos, más divulgativos de las matemáticas (y aquí la geometría tiene mucho que decir). Esto puede ayudar a ver que las matemáticas, aparte de ser útiles, pueden llegar a agradar y despertar interés. Pero debe quedar claro que para aprender matemáticas de verdad se requiere esfuerzo no gratuito.

Reflexiones finales

Soy consciente de que me dejo en el tintero muchas pequeñas propuestas de lo que podría o debería programarse en la metodología de la enseñanza de las matemáticas en la etapa del bachillerato, como puede ser la de estimular la creatividad del alumno, indagar sus propias demostraciones (aunque sean fallidas), inducirles a la autocrítica de lo realizado o aprendido para ser capaz de autoevaluarse, buscar información sobre la historia de las matemáticas o el devenir histórico de algunos de los conceptos fundamentales que se estudian en matemáticas como el límite o la derivada... Pero quizá muchas de estas propuestas sólo pueden llevarse mínimamente a cabo dependiendo de cómo sea el alumnado en un momento concreto u otros factores que no son tan fáciles de controlar. En mi opinión quizá no debamos ponernos objetivos muy altos para la totalidad de los alumnos, pero sí iniciar el ejercicio de algunas de las propuestas expuestas en los apartados anteriores para que no lleguen a la universidad "sin ninguna experiencia verdaderamente matemática". Cuanto antes se inicien, antes serán ellos mismos quienes adquirirán cierta creatividad, cierta inquietud por las razones de los conceptos y demostraciones de los resultados y cierta autocrítica.

Quiero terminar recordando a dos grandes matemáticos que dedicaron mucho tiempo a la didáctica de las matemáticas, Pedro Puig Adam y George Pólya. Cada uno nos dejó un decálogo de buenas prácticas en la enseñanza de las matemáticas que expresan mucho mejor de lo que haya podido hacerlo, algunas de las actitudes que deben guiar nuestra labor diaria como docentes de las matemáticas.

Decálogo para la didáctica matemática. (P. Puig adam)

1. No adoptar una didáctica rígida, sino adaptada en cada caso al alumno, observándolo constantemente.

2. No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.

3. Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.

4. Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.

5. Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.

6. Estimular esta actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.

7. Promover en todo lo posible la autocorrección.

8. Conseguir una cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.

9. Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.

10. Procurar a cualquier alumno éxitos que eviten su desmoralización.

Decálogo para el profesor. (G. Pólya)

1. Interésate por tu materia.

2. Conoce tu materia.

3. Conoce las formas de aprender, la mejor es por uno mismo.

4. Lee las caras de los estudiantes y ponte en su lugar.

5. No sólo información: hábitos, actitudes…

6. Déjales aprender a conjeturar.

7. Déjales aprender a demostrar. Primero conjeturar, después demostrar. Conjeturas prudentes.

8. Busca patrones en cada problema concreto.

9. No lances tu secreto de una vez. Para Voltaire era la forma de aburrir.

10. Sugiere, no empujes para que se lo traguen. Deja que hagan preguntas. Deja que den respuesta.

DESDE LA PERSPECTIVA DEL PROFESORADO DE BACHILLERATO.
(MANUEL E. SERRANO).

Cuestiones de debate

Hay muchos problemas, relacionados con las metodologías, en el paso de la Ed. Primaria a ESO y en el paso de ESO a Bachillerato. ¿Cómo se pueden tratar estos problemas? ¿Qué tipo de sinergias se pueden establecer entre etapas educativas con el fin de lograr un mayor éxito del alumnado?

Presentación

Las dos transiciones académicas más importantes en la adolescencia son el paso de Ed. Primaria a ESO y de ESO a bachillerato. Se podría también hablar de la transición de 2º de ESO a 3º de ESO. Desde mi experiencia como profesor de secundaria en institutos, voy a señalar los problemas, en relación a las metodologías, que nos encontramos en esos dos cambios.

En el aula

En general, el alumnado que se incorpora a la ESO no está acostumbrado a las metodologías activas. Me refiero, por englobar en un único término la diversidad metodológica, a todas aquellas que desde hace años hay un gran consenso teórico sobre su necesidad y su eficacia. La resolución de problemas, el trabajo por proyectos, proyectos de investigación,...etc.

Estos alumnos presentan carencias sobre la capacidad de verbalización o de argumentación entre otras, pero quiero señalar cuatro fundamentales a tener en cuenta en el momento de trabajar con ellos:

- la autonomía
- la conciencia de poder ser el protagonista y constructor de su aprendizaje
- la visión del profesor en el rol de guía y ayuda
- la percepción de la esencia de las matemáticas y sus procesos

Así, a la hora de plantearse la aplicación de metodologías activas deberá tenerse como objetivo es ir solventando estas carencias. Sin duda, se requerirá tiempo y experiencias diversas.

Un factor para aprovechar es la mayor facilidad en estas edades de motivación y de generar entusiasmo. Ello unido a que presentan cierto hábito de trabajo en grupo, susceptible de ser reconducido de la mera exposición o presentación de trabajos (basados en la búsqueda de información) a la generación de ideas y su tratamiento. Inicialmente se deberá potenciar mucho el conocimiento intuitivo, para ir preparando el camino hacia el conocimiento informal con un aumento del pensamiento reflexivo y de abstracción. Todo ello, por supuesto, buscando el equilibrio entre los procesos de pensamiento y los contenidos específicos de las matemáticas.

En cuanto a los alumnos que inician el bachillerato, las carencias son prácticamente las mismas. Pero a ello hay que unir una actitud más crítica y unas expectativas académicas que se basan fundamentalmente en sus calificaciones y en la preparación para la PAEU.

La actitud crítica se traduce en que hay una mayor reflexión sobre la actuación del profesor y sobre la utilidad de metodologías, como los proyectos de investigación. La percepción sobre estas metodologías es que son actividades complementarias.

La primera labor deberá ser puramente informativa, justificando los fines perseguidos para su preparación a dar el paso a la Universidad.

Quizás, además de iniciarse en pequeños proyectos de investigación, es conveniente la utilización de metodologías que fomenten la autonomía de los alumnos, dando el profesor la ayuda necesaria para la formalización de todo el proceso matemático.

Fuera del aula

Volviendo al cambio de etapa de E. Primaria a la ESO, habrá que ver qué efectos sobre el alumnado tiene la implantación de la LOMCE con los principios metodológicos para la etapa, y las orientaciones metodológicas de matemáticas. En todo caso se ha de buscar soluciones para evitar la fragmentación en el cambio de etapa, para ello es requisito imprescindible una coordinación efectiva entre equipos docentes de las dos etapas. Esta coordinación teórica ya existe, pero en general no se realiza y de realizarse es puntual y sin un tratamiento de aspectos metodológicos. No es fácil la manera de llevarlo a cabo, debido a muchos condicionantes, y es un reto importante que tiene la administración. Quizás podrían crearse los denominados equipos de zona.

En los IES para poder establecer una coordinación ya sea entre el profesorado de matemáticas o de todas las áreas, se cuenta con sus órganos colegiados como los departamentos y la comisión de coordinación pedagógica, aunque no estaría de más crear un equipo en cada centro que analice, estudie, coordine y potencie propuestas metodológicas para la adquisición de las competencias básicas en ESO y las capacidades señaladas en los objetivos de bachillerato. Estos equipos deberán contar con una formación previa.

La necesidad de cambiar, renovar o innovar metodologías, modificar estrategias, surge de manera natural desde el momento que hay planteamientos para que el alumno adquiera las competencias básicas. La realidad en los centros es que estas competencias, así como muchos de los objetivos se obvian, lo que conlleva a seguir con unas metodologías que no cubren la formación íntegra del alumno. Cierto es que en los últimos años se han ido realizando pequeñas renovaciones metodológicas y el profesorado las suelen valorar positivamente, pero se hace necesario un cambio más profundo.

Para ello, no veo una necesidad imperante de modificar las normativas de educación. Con sus deficiencias, cubren en buena medida y de una manera más o menos clara todos los elementos a tener en cuenta para la formación del alumnado. La necesidad primordial sigue siendo la implicación del profesorado y su formación.

Desde la administración se promueven muchas iniciativas, como los cursos de formación del profesorado que no suele llegar al aula, los planes de mejora, los premios de investigación e innovación, el bachillerato de investigación/excelencia, que afectan a una minoría del alumnado. También, cada vez hay más recursos a los que se puede acceder. Pero todo ello, al ser voluntario, no es efectivo. Hay que concienciar a los profesores de sus propias necesidades y obligaciones. Se les debe dar apoyo, y aunque suene muy duro controlarles dentro de ciertos límites. El cómo hacerlo es francamente difícil, pero al menos se debería aprovechar en los centros todas las experiencias de aquellos que han dado los primeros pasos y de los que llevan tiempo haciéndolo, en muchos casos a nivel individual.

COLOQUIO POSTERIOR

1. Pregunta (dirigida al Prof. D. Fernando Sanz, por una de las profesoras asistentes):

Ha dicho usted que es necesario y se deben hacer demostraciones matemáticas para entender los conceptos. Yo estoy totalmente de acuerdo. ¿Por qué en las PAEU se han eliminado todo tipo de demostraciones? Todos sabemos que el temario que se da, sigue las pautas de la PAEU.

Contestación (del Prof. Sanz):

Aún estando de acuerdo con la primera parte de su intervención, no es menos cierto que la PAEU es una prueba común para todo el colectivo de estudiantes y no se puede pretender pedir a todos las demostraciones. En cualquier caso, los cambios no se pueden plantear de manera unilateral, deben consensuarse tras el oportuno diálogo entre el profesorado responsable de las dos partes, Secundaria y Universidad.

Por otra parte, fomentar el gusto por las demostraciones no consiste exclusivamente en llevar a cabo demostraciones exhaustivas. Se trata también de analizar los enunciados, ver lo que dicen y lo que no dicen, plantearse ejemplos y contraejemplos para cuando falle alguna de las hipótesis, etc.

2. Pregunta (dirigida a la Prof. Dña. Elena Cojo, por una de las profesoras asistentes):

¿Qué tipo de coordinación hay en su Centro, entre el profesorado de Ed. Infantil y el de Ed. Primaria?

Contestación (de la Prof. Cojo):

En primer lugar, hay unas relaciones interpersonales buenas. Por mi parte, me preocupo de *empujar* para mejorar la coordinación, a través del establecimiento de reuniones conjuntas. Ahora estamos desarrollando un curso de formación que posibilita la reflexión compartida. También se han diseñado talleres y otras actividades conjuntas. Esto ha sido muy positivo, porque se han establecidos muchos puentes entre las dos etapas.

Uno de los acuerdos del Centro es que la metodología de Ed. Infantil no se puede perder (aplausos entre los asistentes de Ed. Infantil y Primaria)

Por otra parte, se debería trasladar a la Universidad que, en la formación inicial del profesorado, el Grado de Infantil y el de Primaria deberían ir más unidos.

(En este momento toma la palabra la Prof. Blázquez)

Eso mismo debería ocurrir entre la formación inicial del profesorado de Ed. Primaria y Secundaria.

Además, en la formación de los maestros, deberían plantearse cambios metodológicos profundos.

Sin más intervenciones se da por terminada la mesa redonda.

Para hacer referencia al artículo:

Blazquez, S, Cojo, E., Sanz, F, y Serrano, M.E. (2015). Implementaciones metodológicas entre etapas educativas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León.(Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 269-281). Lugar: Academia de Artillería de Segovia

COMUNICACIONES

DÍMELO CON NÚMEROS

Mª Teresa Alvarado Turiel

C.R.A. ALTO TIÉTAR

Resumen

Es nuestro trabajo, como docentes, facilitar a los niños los recursos, medios y estrategias necesarias para que la resolución de los problemas sean afrontados sin temores, y con éxito. Por ello, un grupo de profesores nos planteamos el estudio, elaboración y aplicación de nuevos medios, estrategias y materiales que puedan motivar y ayudar a nuestros alumnos a hacer frente a los problemas que se les pueda plantear, siendo conscientes de la importancia de generar material motivante, en distintos soportes, prestando especial atención al soporte digital, para dar respuesta a la actual demanda social. Por ello, nos planteamos realizar un Proyecto de Innovación Educativa relacionado con los distintos aspectos y enfoques de aprendizaje de las matemáticas en el aula y fuera de ella, centrándonos sobre todo en la comprensión de los problemas que se les presenta a los niños de Educación Infantil y Primaria, tratando de activar el pensamiento lógico desde la motivación de las actividades presentadas.

Palabras clave: *metodología, matemáticas, primaria, innovación, motivación.*

LAS MATEMÁTICAS EN LAS AULAS

Cuantas veces no habremos oído en nuestras aulas “No lo entiendo”, “No sé hacerlo”, “Es muy difícil”, “Faltan/sobran datos”,… cuando nuestros alumnos se disponen a resolver un problema, hay ocasiones en que no les falta razón, puesto que el enunciado da lugar a varias interpretaciones, pero son las menos; la realidad con la que nos encontramos es que los niños no comprenden lo que leen, bien porque no conecta con sus intereses, bien porque no les motiva, o simplemente porque han asumido que las matemáticas son difíciles.

Resolver problemas, es el eje principal del área de matemáticas, aunque no debemos olvidar que en el resto de áreas los niños también se enfrentan a resolución de problemas. Así, estos problemas representan retos en los que el alumno tiene que ser capaz de entender las situaciones que se le presenta, y que, a primera vista, no sabe cómo resolver.

Como maestros debemos facilitar a los niños los recursos, medios y estrategias apropiados para que accedan a la resolución de estos problemas sin temores, y con éxito, enseñándoles también a asumir el fracaso. Por ello, un grupo de profesores nos planteamos el estudio, elaboración y aplicación de nuevos medios, estrategias y materiales que puedan motivar y ayudar a nuestros alumnos a hacer frente a los problemas que se les pueda plantear, siendo conscientes de la importancia de generar material motivante, en distintos soportes, prestando especial atención al soporte digital. Es decir, utilizando las tecnologías de la información y la comunicación, como aliadas, para elaborar actividades, ejercicios,… con los que los niños puedan interactuar y aprender con las matemáticas, estando implícita la resolución de problemas.

Se decidió trabajar estos planteamientos, en Educación Infantil y Educación Primaria, desde el desarrollo y puesta en práctica de un Proyecto de Innovación Educativa, que diese respuesta a las dificultades que aparecen en la resolución de problemas en el área de Matemáticas, logrando alcanzar el interés de los niños, siendo conscientes que esto es extrapolable y favorecedor de otras áreas del currículo, que incluiremos en las propuestas.

En los siguientes epígrafes se tratará de dar forma al proyecto que se desarrolló: primero describiendo los pasos seguidos y el trabajo elaborado para conseguir esos materiales motivadores y facilitadores de los aprendizajes, antes de la puesta en marcha en las aulas; y más tarde se detallaran los datos más significativos de su aplicación en el ámbito escolar y los resultados obtenidos con la experiencia.

DESARROLLO DEL PROYECTO.

¿De dónde partimos? (Autoevaluación)

Para comenzar a trabajar en la respuesta a la problemática observada, realizamos una autoevaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje en el área de matemáticas en los distintos niveles, teniendo en cuenta: Pruebas de Diagnóstico; Gráficos de realización de deberes, trabajos, participación en clase,…; Trabajo diario en el aula, en cuanto a la resolución de problemas, motivación ante ellos,…; Reuniones de nivel; Uso de las T.I.C.; Demanda de las familias; Sesiones de Evaluación de cada una de las áreas, de las que se extrae que los resultados pueden ser mejorables en cuanto a la Competencia Lingüística y Matemática y se percibe la necesidad de enfatizar más en la Competencia Digital.

Basándonos en las conclusiones extraídas del análisis de los documentos y observaciones mencionados, los factores que desde nuestro punto de vista incidían en la dificultad con la que los niños afrontan la resolución de problemas eran:

- Forma de presentar los problemas (descontextualización).
- La motivación.
- La falta de interés por resolver algo que no conecta con sus intereses y tampoco tiene un fin en sí mismo.
- Miedo al fracaso.
- No comprender el enunciado.
- No estructurar la información.
- No se analiza si el resultado obtenido es congruente con la pregunta realizada y los datos con los que trabajamos inicialmente.
- Falta de dominio de conceptos matemáticos básicos.

Esta autoevaluación la consideramos como la guía en la elaboración del Proyecto de Innovación, puesto que a partir de ella nos pusimos a trabajar para elaborar un material práctico, accesible, y que nos permitiese obtener resultados a medio plazo y, sobre todo, metas alcanzables.

En cuanto a la priorización de las áreas del currículo (las matemáticas sobre el resto), no entendemos que una de ellas vaya sobre la otra, sino que van en la misma dirección y se complementan; aunque trataremos la comprensión y resolución desde el ámbito matemático, partiendo de unos personajes de un cuento elaborado por nosotros, que son los que van a guiar la práctica del presente Proyecto, teniendo en cuenta los niveles de los niños y el currículo en cada nivel educativo, dentro del ámbito de todas las Competencias Básicas.

Tras conocer el punto de partida… ¿qué pretendemos?

El siguiente paso en nuestra experiencia fue la delimitación de los objetivos que se pretendían lograr a través de la puesta en práctica del mismo, sin perder de vista que se debían plantear contemplando las características de los niños a los que dirigido, y la legislación vigente para estas etapas educativas.

La FINALIDAD que perseguimos con la puesta en marcha del Proyecto de Innovación Educativa es facilitar a los alumnos la resolución de problemas, reforzando la competencia matemática y lingüística necesarias para que sean capaces de extrapolar sus aplicaciones a situaciones cotidianas, con el fin último de garantizar una formación integral que contribuya al pleno desarrollo de la personalidad de los alumnos y prepararlos para el uso correcto y fluido del lenguaje matemático en contextos habituales, todo ello, mediante un programa de actividades que conecten con sus intereses, y les motiven en su proceso.

A partir de la misma, nos planteamos los demás *objetivos* más específicos que encuadran el Proyecto y sirven de guía en nuestro trabajo:

- Desarrollar la competencia comunicativa y lingüística de los alumnos, utilizando los distintos lenguajes matemáticos para interpretar y valorar informaciones sobre fenómenos conocidos, así como para comunicar los propios pensamientos con mayor precisión, desarrollando estrategias de comprensión lectora en los mensajestransmitidos por los textos escritos utilizados en el área.
- Elaborar y utilizar estrategias personales de estimación, aproximación y cálculo mental para resolución de problemas sencillos, modificándolos si fuera necesario, dependiendo de la madurez del alumno.
- Interpretar y valorar datos sobre fenómenos y situaciones de su entorno, formándose un juicio sobre los mismos, y utilizando elementos de recogida y representación de los mismos de forma gráfica y numérica.
- Perfilar unnuevo enfoque del trabajo en el aula.
- Ayudar a los niños/as en el proceso de ensayo-error, restándole importancia al error, y apoyándoles en la rectificación.
- Desarrollar la autoestima del alumno/a, capacitándole y acompañándole en la compleja tarea reconocer la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutando con su uso y valorando las propias capacidades frente a ellas.
- Crear un fondo de recursos entre el profesorado, elaborando materiales propios y, sobre todo, acercando al aula elementos y recursos de la vida cotidiana; creando situaciones de contexto, en las que el alumno/a toque, vea, perciba, sienta... el lenguaje matemático en el aula.
- Elaborar material de soporte informático y en papel (programas para PDI, fichas de lectura) para facilitar la resolución de problemas, a partir de un centro de interés, en nuestro caso un cuento con unos personajes conocidos por nuestros alumnos/as
- Despertar la conciencia de la utilidad resolver problemas, dándoles a conocer la importancia de actuar en situaciones cotidianas y de resolución de problemas de acuerdo con actitudes matemáticas como son la exploración de distintas alternativas, la creatividad, la conveniencia de la precisión o la perseverancia en la búsqueda de soluciones,reconociendo su carácter instrumental para otroscampos de conocimiento.
- Incorporar el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en el aula para el aprendizaje de las matemáticas.

En cuanto a los *contenidos,* se trabajarán en cada uno de los niveles educativos en función del currículo que les corresponda, serán abordados de manera relacionada en torno al centro de interés (cuento matemático) y se darán situaciones de aprendizaje que los interrelacionará desde diferentes perspectivas en múltiples ocasiones. Muchos de estos contenidos sufren una gradación dependiendo del nivel en el que nos encontremos, este hecho se ha tenido en cuenta cuando en el aula trabajamos con dos o más niveles juntos.

Adecuaremos la selección y secuenciación de los contenidos, de manera que exista armonía entre los objetivos y los medios que se utilizan para conseguirlos.

Comenzamos a trabajar: Paso a paso hacía la Innovación Matemática.

- Autoevaluación y análisis de los resultados en la autoevaluación.
- Planteamiento del trabajo en el grupo de profesores: Elaboración de un CUENTO MATEMÁTICO, en el cual a partir de unos personajes (los números y los signos de operaciones básicas), los niños se adentrarán en una aventura, en la cual, atendiendo al nivel en el que se encuentren, irán adquiriendo y trabajando unos contenidos a partir de la superación de pruebas matemáticas que les surgen a los protagonistas del cuento. A esta aventura se irán sumando nuevos personajes, en función del avance en los contenidos.
- Brainstorming y reparto de tareas, en función del nivel que se imparte.
- Creación en el Aula Virtual de un espacio para comunicarnos: COORDINACIÓN.
- Perfilar los personajes de nuestro cuento matemático, y la historia a contar en cada uno de los niveles. Elaboración de personajes, dándoles unas características determinadas. En cuanto, a su personalidad variará dependiendo del nivel en el que nos encontremos.
- Criterios comunes para el seguimiento del cuento de un nivel a otro: SECUENCIACIÓN.
- Perfil de los personajes en cada nivel (crecerán al igual que los niños).
- Fichas de resolución de problemas generadas a partir de pruebas a los personajes. Realización de fichas con pruebas que tienen que realizar los personajes y de explicación: Fichas de PASO a PASO. Pautas a seguir en la resolución de problemas. Fichas imprimibles. Pasatiempos. Juegos matemáticos. Acertijos matemáticos. Fabricación de material manipulable: Bingos. Dominós. Memorys. Juegos con dados. Ocas…
- Trabajo de lecturas comprensivas: leer matemáticas.
- Preparación de los programas informáticos a utilizar. Elaboración de material para las Tecnologías de la Información y Comunicación: Para la PDI (Actividades, juegos, ejercicios,…). Material multimedia (Audio cuento, juego interactivo, creación de un Blog: “Dímelo con números”),…
- Elaboración a partir de las fichas elaboradas en el cuento de ejercicios para la PDI.
- Elaboración de una aplicación didáctica y material complementario, a partir de las actividades elaboradas. Establecimiento de cauces para el seguimiento y evaluación del Proyecto de Innovación elaborado.
- La evaluación servirá como punto de referencia para la actuación pedagógica con el fin de adecuar el proceso de enseñanza-aprendizaje al progreso real de los alumnos.

Estrategias metodológicas: Organización.

La metodología es activa, participativa, globalizada… y fundamentalmente será motivadora consiguiéndolo a través de:

- Metas alcanzables.
- Atribuyendo el éxito al esfuerzo.
- Reforzando todos los logros.
- Estableciendo modelos de conducta útiles para su vida diaria.
- Enseñarles a tolerar el fracaso, creando y planificando posibles soluciones que le puedan ayudar en el futuro a no cometer el mismo fallo.

- Se enseñará a descomponer una tarea en pequeños pasos que sean fáciles de realizar y a que se enorgullezcan de ser capaces de realizar cada uno de dichos pasos: Refuerzo de la AUTOESTIMA.
- La verificación lógica y matemática de los resultados, frente a la visión del profesor como única fuente de respuestas correctas.

Se facilitan *aprendizajes significativos*, captando el interés de los niños, mediante la motivación de los alumnos en el proceso enseñanza-aprendizaje, que se hará partiendo de situaciones que provoquen su interés y mantengan su atención, bien porque respondan a sus experiencias y necesidades o por su significado lúdico e imaginario.

Trabajaremos de manera que las actividades realizadas por los alumnos supongan una interrelación entre las distintas áreas, no como áreas aisladas. Es decir, aplicando el *enfoque globalizador* que ponemos en práctica con el resto de las áreas. Resultando la COORDINACIÓN la base del proyecto.

El proceso de enseñanza-aprendizaje se enfocará desde una metodología dirigida, principalmente, al desarrollo de comprensión y expresión, tanto oral, como escrita.

Las *Tecnologías de la Información y de la Comunicación* proporcionan un ambiente de aprendizaje rico y multisensorial, utilizando diferentes medios de información y contribuyendo al desarrollo de la lecto-escritura.

Se favorecerá el aprendizaje en grupo para impulsar las relaciones entre iguales, proporcionando pautas que permitan la confrontación y modificación de los puntos de vista, coordinación de intereses, tornas de decisiones colectivas, ayuda mutua y superación de conflictos mediante el diálogo y la cooperación, superando con ello toda forma de discriminación.

Se tendrá en cuenta la diversidad del alumnado, atendiendo a las peculiaridades de cada grupo, a las características de niños o niñas de variada procedencia y capacidad, de distinto ritmo de aprendizaje, etc., es decir, atenderemos al *principio de individualización*.

Utilizaremos, crearemos y seleccionaremos diferentes recursos (materiales, manipulables, textos, inéditos audiovisuales e informáticos), en función de los objetivos que se persiguen.

Por lo tanto, se elaborán nuevas estrategias metodológicas, buscando y preparando recursos y materiales didácticos que motiven al alumnado en cada uno de los niveles educativos que vamos a trabajar; y para ello se debe de conocer y utilizar las nuevas tecnologías, esto no se puede conseguir sin los recursos adecuados: materiales, espaciales, temporales; por ello planificamos cada uno de ellos, sin olvidarnos de la flexibilidad.

- Recursos materiales: Material bibliográfico, con referencia a las Matemáticas en estas etapas educativas, tanto para los alumnos/as como para la formación y documentación del equipo de maestros. Material informático. Juegos y material facilitador de los aprendizajes matemáticos. Material fungible. Se hará uso de materiales manipulativos y herramientas informáticas para que los alumnos vean y extraigan sus conclusiones y se sientas participes de su aprendizaje.
- Recursos humanos: Se dinamiza e impulsa a parte del profesorado para que nadie se quede “descolgado” de este proyecto, por falta de conocimientos. Se pone en práctica el trabajo colaborativo y cooperativo, de forma que todos aportemos algo a nuestros compañeros, y estos nos aporten a nosotros.

  Debido al diferente grado de formación del profesorado en informática, y con la intención de optimizar los recursos personales, nos organizamos de manera que todos nos encontramos más cómodos en la actividad a desarrollar, sin que ello reste la formación en el ámbito que estemos menos preparados o desenvueltos.

Momentos de trabajo y coordinación sobre el proyecto

Se reparte el trabajo en función del nivel educativo que este impartiendo el docente, por el conocimiento de las características de los niños y del currículo en el mismo.

Además se tiene en cuenta los conocimientos y habilidades (creativas, informáticas, plásticas,…) de cada uno de los profesores para la adjudicación de tareas de elaboración, redacción, invención,… de materiales informáticos, imprimibles, juegos,…

No obstante, contamos con una COORDINACIÓN EXAHUSTIVA en la preparación del material, no sólo a través del Aula Virtual, sino también, en reuniones convocadas a tal efecto.

Se elabora un esquema de responsabilidades, y trabajo para fijar los contenidos de cada uno, y no superponernos a la hora de realizar las actividades y materiales, esto se evita con la COORDINACIÓN.

Material elaborado: Cuentos matemáticos.

En la Figura 1 se representa un esquema con el material elaborado con los cuentos matemáticos.

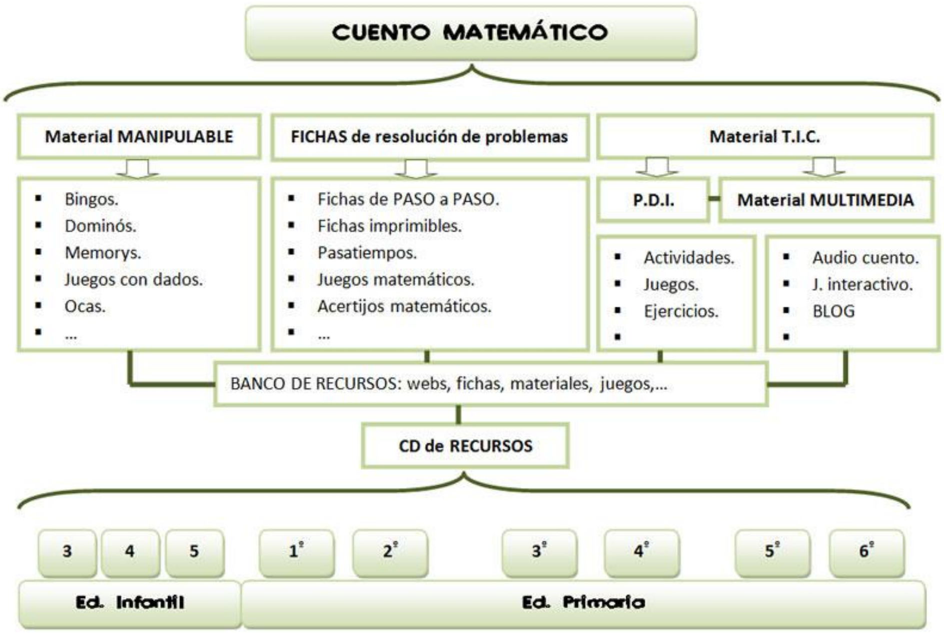


Figura 20. Actividades a desarrollar con cada cuento matemático.

En la Figura 2 se pueden ver las portadas de cada uno de los cuentos elaborados.

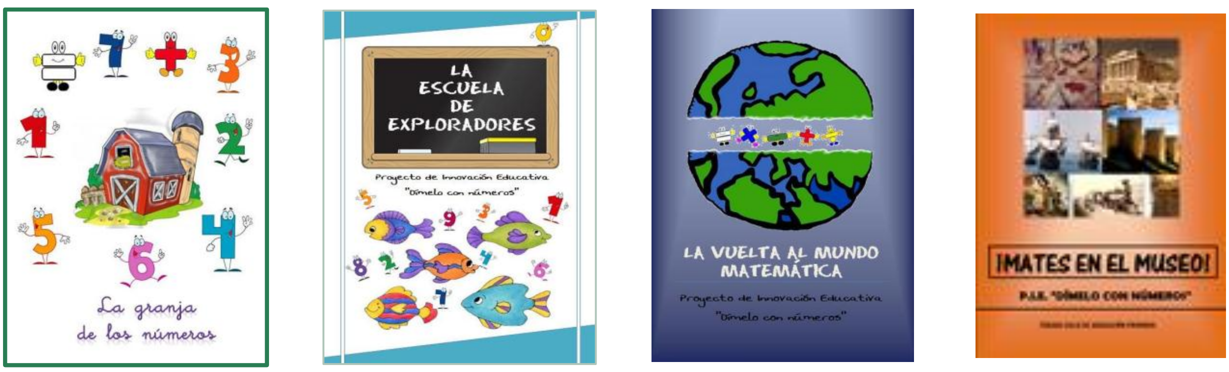


Figura 2. Portadas de cuentos elaborados.

PUESTA EN PRÁCTICA: LO LLEVAMOS A LAS AULAS.

Los cuentos elaborados con los materiales que los completan se llevan a las distintas clases para ponerlos en práctica. Antes se decora el centro, y se colocan personajes para que vayan familiarizándose con ellos, es decir, vamos creando expectativas, lo mismo que se anuncia una película en un tráiler antes de su estreno en los cines.

Figura 3. Decoración del centro con los personajes de los cuentos.

Los personajes en cada una de las historias / cuentos, van creciendo con ellos, compartiendo inquietudes, miedos, gustos,… de modo que les va a ayudar a ponerse en el lugar de estos compañeros de ficción ante la resolución de problemas que les surjan, es decir, trabajaremos la empatía.

La situaciones y contenidos trabajados son únicos en cada cuento y adaptados a los contenidos e intereses de los niños y niñas de cada una de las edades o niveles.

En el aula de 2º Ciclo de Educación Infantil: "La granja de los números"

PERSONAJES: Los números del 0 al 9.

RESUMEN DEL CUENTO: Una bruja hechiza la granja de un granjero: "¡No puede abrir ninguno de sus establos para dar de comer a sus animales!" El granjero descubrirá un cofre del que aparecerán nuevos amigos, que le ayudaran a deshacer el hechizo pasando aventuras y pruebas en las que los niños participaran.

CÓMO LO TRABAJAMOS: En asamblea se lee el episodio del cuento que tienen programado, y más tarde trabajan de forma autónoma en los rincones de forma manipulativa el

Figura 4. Cofres de donde surgen los nuevos amigos del granjero.

Figura 5. Niños de Educación Infantil descubriendo lo que hay en el cofre.

Figura 6. Ejemplo de material: El granjero con las formas y colores de su nariz.

En el aula de 1º y 2º de Educación Primaria: "La escuela de exploradores"

PERSONAJES: Don Cero (maestro), los números del 1 al 9, Lola Caracola, y otros personajes que van surgiendo en el cuento.

RESUMEN DEL CUENTO: La historia tiene lugar en el fondo del mar. Todo empieza con el primer día de colegio, donde los alumnos que son los números del 1 al 9 conocen a l profesor Don Cero, y a su acompañante Lola la Caracola, que a lo largo del curso les llevará a vivir muchas aventuras matemáticas para que los alumnos aprendan.

CÓMO LO TRABAJAMOS: Complemento del área de matemáticas (refuerzo positivo). Al menos una hora semanal reflejada en el horario, además de tiempos programados, en función de los contenidos que trabajemos.

Figura 7. Actividades a desarrollar con cada cuento matemático.

Figura 8. Actividades a desarrollar con cada cuento matemático.

Figura 9. Actividades grupales: Operaciones y carreras para trabajar ordinales.

Figura 10. “Mayor que”, “Menor que” e “Igual”.

En el aula de 3º y 4º de Educación Primaria: “La vuelta al mundo matemática”

PERSONAJES: Mas, Menos, Igual, Por, Entre, los números del 0 al 9, Dividendo, Divisor, Cociente.

RESUMEN DEL CUENTO: Unos amigos (Mas, Menos e Igual), sin saber cómo, aparecen en una habitación que desconocían que existía en su colegio, aunque sí que había una leyenda que circulaba por los pasillos acerca de la “La sala de los elegidos”. A partir de ese momento, y tras encontrar un cofre con una tabla, los personajes comienzan a vivir una apasionante aventura: Recorriendo países, conociendo peculiaridades de los mismos, y teniendo que pasar pruebas matemáticas para poder volver a casa. La finalidad será pasar todas las pruebas que se les presenten a los personajes para poder volver a sus casas, para ello, en cada continente obtendrán una pieza, que deben colocar en la tabla que encontraron dentro del cofre.

CÓMO LO TRABAJAMOS: Complemento del área de matemáticas (refuerzo positivo). Al menos una hora semanal reflejada en el horario, además de tiempos programados, en función de los contenidos que trabajemos.

Figura 11. Niños de 4º de EP con el cofre y la tabla que guía el cuento.

Figura 12. Mapa con los países que visitarán y de los que conocerán costumbres, leyendas,...

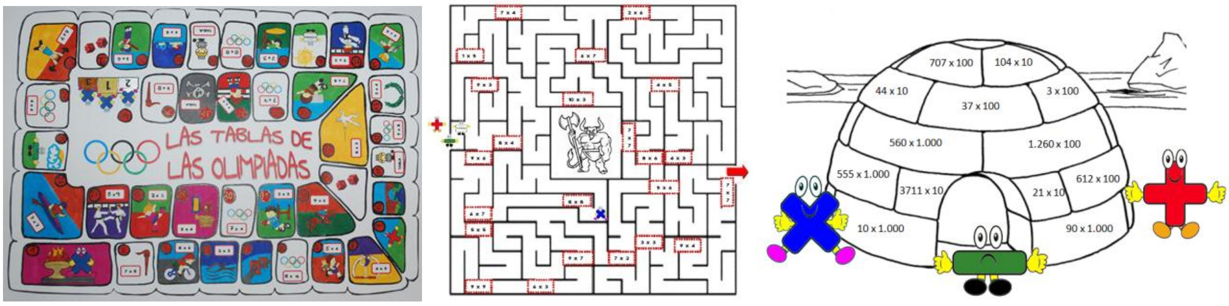


Figura 13. Ejemplo de material: Oca y Laberinto del Minotauro (Grecia), Iglú (Antártida).

En el aula de 5º y 6º de Educación Primaria: "¡Mates en el museo!"

PERSONAJES: Lia, Chelsea, María, Melissa, Ismael,… niños de una clase 5º o 6º de EP.

RESUMEN DEL CUENTO: Es el día que tanto tiempo llevaban esperando, los alumnos de 5º y 6º de Educación Primaria se van de excursión al Museo de Historia Natural. Lo que no se esperan es lo que les va a ocurrir: ¡Viajarán a través del tiempo, visitando las distintas épocas de la historia que han estudiado en clase! En cada una de estas épocas deberán resolver problemas matemáticos y jeroglíficos que les irán proponiendo los personajes de los distintos tiempos que recorrerán. Van a conocer acontecimientos y formas de vida de los diferentes momentos de la historia, y trabajaran las matemáticas antes de volver a casa del gran día en el museo.

CÓMO LO TRABAJAMOS: Al igual que en los niveles anteriores, se trabajara como complemento del área de matemáticas (refuerzo positivo). Al menos una hora semanal reflejada en el horario, además de tiempos programados, en función de los contenidos que trabajemos.

Empieza por el capítulo 1 en la página siguiente y realiza las actividades que se te piden, después sigue las instrucciones que se te indican ayudándote de la tabla siguiente.

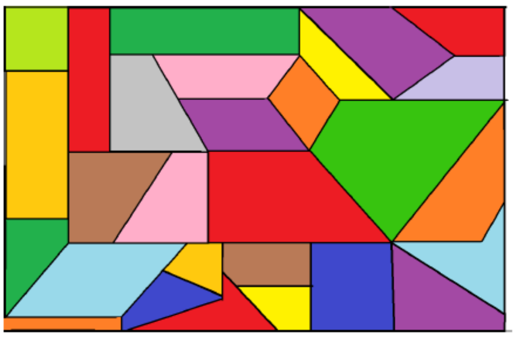
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	228	219	283	234	261	194	272	218	252	236	207	220	255	170
2	245	284	190	196	239	192	274	238	248	195	220	237	195	48
3	277	208	199	222	192	240	216	197	180	221	264	282	245	80
4	273	247	226	160	200	245	241	282	223	268	287	247	217	177
5	245	230	223	227	129	280	224	245	201	285	277	192	249	90
6	284	219	276	58	218	25	229	224	242	216	248	248	262	107
7	189	275	191	248	64	277	174	212	154	111	92	284	76	185
8	204	214	241	217	120	231	32	16	266	74	280	104	179	123
9	219	217	275	206	126	83	267	42	82	268	27	66	225	56
10	248	284	233	35	242	164	248	101	194	140	119	263	51	20
11	284	220	279	276	99	216	14	227	40	193	88	152	109	71
12	272	245	231	265	271	44	89	280	63	86	280	95	12	138
13	208	273	285	278	84	172	256	62	124	94	117	271	163	30
14	271	284	272	209	142	233	58	72	158	39	150	254	157	156

Comprueba la tabla y ve a la página que te indica. ¡Cuidado no te equivoques!

Figura 14. Actividades a desarrollar con cada cuento matemático.

El tapiz que tengo a mis espaldas está formado por diferentes cuadriláteros. Quiero que hagáis una lista con el nombre y el número que hay de cada tipo.

Mientras el Rey seguía desayunando, las 3 parejas nos pusimos a contar y a anotar, era una prueba tranquilita.



Si has conseguido resolver el ejercicio ve a la página 3 y en la casilla B11 encontraras la página a la que te tienes que dirigir para comprobar los resultados.

Si no sabes cómo hacerlo ve a la página 3 y en la casilla G2 te dirá la página a la que tienes que ir para ayudarte a resolverlo.

Figura 15. Actividades a desarrollar con cada cuento matemático.

UNA EXPERIENCIA POSITIVA.

Como cualquier otra actividad realizada en las aulas, el proyecto ha sido sometido a una evaluación continua, antes, durante y al final de su aplicación y desarrollo con los niños.

Se han realizado y se continúan realizando cambios, para adaptarnos a las nuevas situaciones que surgen el centro, y más concretamente en las aulas.

La evaluación del proyecto realizado es muy positiva, observando una gran motivación por parte de los niños y del profesorado en la realización de las actividades propuestas en los cuentos. Está contribuyendo a la mejora de la comprensión escrita de los problemas matemáticos, y del resto de áreas que integran el currículo, así como a la mejora de la autoestima de los niños al enfrentarse a situaciones desconocidas y de cierta dificultad.

Somos conscientes de que hay que seguir trabajando en esta línea, que no deja de ser la que nos marcan nuestros alumnos y alumnas, para seguir contribuyendo a su desarrollo integral.

Tienen que entender, y es tarea nuestra, hacerles ver, que las matemáticas no son nuestras enemigas, sino todo los contrario, son nuestras aliadas para hacernos más fácil el entender y participar de la vida real (fuera del libro de texto y del colegio).

Referencias.

VVAA (2011-2013). Proyecto de Innovación Educativa “Dímelo con números”. *Estrategias para la resolución de problemas*.

Para hacer referencia al artículo:

Alvarado, M.T.. (2015). Dímelo con números. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”.* (pp. 285-296). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

INTEGRACIÓN DE “LIBROS GEOGEBRA” EN EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS EN EL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Matías Arce, Laura Conejo, Tomás Ortega y Cristina Pecharromán.

Universidad de Valladolid

Resumen

En esta comunicación se describe una metodología innovadora llevada a cabo con alumnos del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Valladolid, para desarrollar la docencia relacionada con los conocimientos sobre geometría plana, con especial hincapié en los conceptos y las relaciones entre elementos. La propuesta está basada en el reconocimiento y la construcción de conceptos geométricos y en la detección de relaciones entre conceptos a través de la manipulación de “Libros GeoGebra” (agrupaciones de applets GeoGebra sobre un mismo tópico) por parte de los estudiantes. Sus respuestas a estas tareas son seleccionadas y puestas en común en debates dirigidos por el profesor y conducentes hacia la institucionalización de los conceptos y las relaciones tratadas de forma precisa, poniendo especial atención en la adecuada utilización del lenguaje geométrico en todo este proceso.

Palabras clave: *metodología, matemáticas, GeoGebra, Grado de Educación Primaria, geometría plan.*

PLANTEAMIENTO GENERAL Y JUSTIFICACIÓN

Esta comunicación pretende describir una metodología innovadora para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría que estamos desarrollando con varios grupos de alumnos[i] del Grado de Educación Primaria, en la Universidad de Valladolid (en concreto, en los campus de Valladolid y Soria). Dicha metodología es el resultado de varios Proyectos de Innovación Docente desarrollados por los autores de la comunicación, y relacionados con el uso del programa GeoGebra para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría plana en dicho grado universitario. GeoGebra es un software multi-plataforma gratuito que nos permite construir y descubrir elementos y relaciones matemáticas y que, en sus sucesivas versiones, ha ampliado progresivamente sus opciones y posibilidades, lo que lo ha convertido en una herramienta accesible, de fácil manejo pero con una enorme potencialidad para las matemáticas escolares.

Con este programa pueden construirse *applets*, componentes de software creados con el programa que se ejecutan en un navegador web y con los que un usuario puede interactuar, decidiendo el creador del applet qué acciones puede o no realizar el usuario con él; por ejemplo, mover la figura dada de forma dinámica, reproducir los pasos de la construcción, construir otros elementos, realizar mediciones... La popularización del programa y su carácter gratuito ha cristalizado en la creación de una página web, “GeoGebraTube” (http://www.geogebratube.org/), en la que los profesores pueden compartir sus applets, así como ver applets creados por la “red” de usuarios de la página, la cual acoge una gran cantidad de materiales libres que pueden usarse en el aula de matemáticas. Los applets relacionados con un mismo tópico pueden agruparse, creando lo que la página denomina “Libro GeoGebra”.

El nivel de formación en matemáticas de los estudiantes que inician el Grado de Educación Primaria es muy variado y dispar, dependiendo de si han cursado o no asignaturas de Matemáticas en Bachillerato y de su interés por esta disciplina. Es usual que existan diferencias importantes en los conocimientos previos de los estudiantes, incluso en aquellos conocimientos propios de la educación primaria y secundaria obligatoria, como pueden ser los asociados a los conceptos geométricos básicos. Así, se hace necesaria una metodología que tenga en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes y que respete los distintos ritmos de aprendizaje.

Siguiendo a Rico (2012), llamaremos representaciones a las expresiones, símbolos, signos o gráficos a través de los cuales se hace presente un concepto matemático, y que nos permiten relacionarlo con otros. Goldin (2007) afirma que la interacción entre las representaciones internas (imágenes mentales formadas de los objetos matemáticos) y las externas (aquellas con un soporte físico tangible) favorecen el aprendizaje de la geometría, infiriéndose y siendo subyacentes las representaciones internas a la creación y manejo de representaciones externas (Presmeg, 2006). De acuerdo con Duval (1999), la comprensión de un concepto está fundamentada en el dominio de al menos dos sistemas de representación del mismo y en la capacidad para realizar coordinaciones espontáneas (cambios) de uno a otro. En el caso de los objetos geométricos, las representaciones fundamentales son la gráfica (figuras geométricas) y la verbal (nombre, definición...), jugando un papel fundamental en la comprensión de estos objetos la *visualización* o el *procesamiento visual*, que Fernández Blanco (2013) concibe como el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales, así como el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras. Presmeg (2006) incluye en la visualización los procesos de construcción y transformación de imágenes mentales y representaciones planas o espaciales y la interpretación de información figurativa.

En nuestro caso, consideramos que la representación gráfica es una representación más intuitiva y que los alumnos suelen recordar mejor. De hecho, Duval (1999) plantea que el discurso verbal vaya unido a una gráfica que sirva como soporte de los razonamientos realizados. Esto nos lleva a plantear una metodología que parta mayoritariamente de las representaciones gráficas de los conceptos geométricos básicos. A partir de ellas, y mediante la aplicación de procesos de visualización del alumnado (reconocimiento e interpretación de representaciones gráficas), buscamos que los alumnos generen representaciones verbales (definiciones) y las relacionen con las representaciones gráficas. Estos procesos son apoyados y ayudados a través del dinamismo que nos proporciona el uso del programa GeoGebra en la manipulación de las figuras geométricas creadas (Sinclair, 2003). Además, la geometría dinámica también es de gran ayuda para detectar y poder conjeturar relaciones existentes entre diferentes conceptos u objetos (por ejemplo, relaciones angulares en la circunferencia), puesto que la animación de las figuras proporciona un rasgo de generalización de la relación (de Villiers, 1996), que aumenta el convencimiento de los estudiantes sobre la veracidad de las conjeturas realizadas y motiva su demostración matemática.

En esta metodología también juega un papel muy importante la verbalización de los procesos mentales, pensamientos, nomenclatura de objetos... Por ello, en varias de las fases se establecen momentos que fomenten esa verbalización: trabajo por parejas con el programa GeoGebra, debate en el aula (guiado por el profesor) de las respuestas proporcionadas, en cuyo desarrollo se llegue a concretar definiciones precisas o relaciones entre objetos. A través de este proceso, los alumnos se conciencian de la especial importancia del uso de un lenguaje preciso y adecuado en geometría, que les lleve a mejorar su competencia profesional como futuros docentes de Educación Primaria.

PLANIFICACIÓN DE LA DOCENCIA: PROPUESTA METODOLÓGICA

Nuestra metodología está inspirada en la metodología propuesta por Mariotti y colaboradores (Falcade, Laborde y Mariotti, 2007; Mariotti, 2009; Mariotti, 2013) en la que se utilizan tanto entornos de Geometría Dinámica (en el caso de estas autoras, el programa Cabri) como discusiones matemáticas colectivas como mediadores para el desarrollo y la evolución de lo que las autoras llaman *signos matemáticos,* a partir de los signos asociados al entorno virtual. En concreto, para realizar esa mediación las autoras proponen la realización de *ciclos didácticos*, compuestos por tres tipos de actividades diferentes, pero complementarias entre sí: actividades de laboratorio con el programa de Geometría Dinámica que versan sobre en un cierto tópico o concepto, producciones individuales de los alumnos tras esas actividades y discusiones colectivas introducidas y dirigidas por el profesor, pudiéndose utilizar aquí las producciones individuales anteriores para promover su evolución.

En nuestro caso, hemos realizado una adaptación de la metodología anteriormente descrita, añadiendo algunos elementos en nuestra propuesta de ciclo didáctico, como un control de los conocimientos previos con los que los estudiantes acceden a la asignatura, y modificando ligeramente otros. Se detallan a continuación las diferentes fases del mismo:

<u>1ª fase: Determinación de los conocimientos previos de los alumnos y diseño y elaboración de los applets GeoGebra que compondrán los “Libros GeoGebra”.</u> Una vez seleccionado un tópico, se diseña un cuestionario de respuesta múltiple que es cumplimentado individualmente por los alumnos. Los resultados sirven de base para diseñar y elaborar los diferentes applets GeoGebra que conforman la siguiente fase.

<u>2ª fase: Actividades prácticas con GeoGebra.</u> Los alumnos, por parejas, interactuaban con los applets GeoGebra proporcionados, buscando la emergencia de los conceptos y relaciones geométricas a partir, generalmente, de las representaciones gráficas proporcionadas en dichos applets y su manipulación dinámica, y de las indicaciones proporcionadas en cada tarea. Las tareas se pueden clasificar en tres grupos: actividades de producción de una representación verbal (buscando que los alumnos leyeran las representaciones gráficas proporcionadas, 2º nivel de Van Hiele), actividades de construcción de elementos o actividades de detección de relaciones y establecimiento verbal de conjeturas.

Mientras interactuaban con los applets, cada pareja debía crear un documento de Word en el que quedara reflejada su respuesta a las diferentes tareas (por ejemplo, la escritura de la definición o la conjetura propuesta en cada caso). El análisis de las respuestas de los alumnos por parte del profesor proporciona información fundamental para el desarrollo de la siguiente fase.

<u>3ª fase: Debate colectivo en el aula basado en las producciones de los alumnos.</u> El profesor selecciona varias de las respuestas proporcionadas por los alumnos a una cierta tarea (por ejemplo, la escritura de una definición verbal de un concepto), que bien por su incompletitud, poca precisión o la presencia de elementos irrelevantes o erróneos merecen ser objeto de discusión en el aula. Dicha discusión es guiada por el profesor. Los alumnos intervienen libremente para comentar dichas respuestas, reconociendo elementos erróneos, imprecisos o incompletos y promoviendo textos alternativos que mejoren progresivamente las respuestas. El uso de contraejemplos juega un papel importante para discriminar la corrección de una respuesta de otra que no lo es.

<u>4ª fase: Institucionalización de conceptos y relaciones.</u> La fase anterior culmina con el establecimiento riguroso de los conceptos tratados, así como con la demostración matemática (en su caso) de aquellas relaciones que han sido conjeturadas y verbalizadas por los alumnos a partir del programa GeoGebra y el debate.

<u>5ª fase: Control de los aprendizajes.</u> En la última fase se plantea una pequeña prueba escrita individual basada en los conceptos y relaciones tratados, que nos sirva para controlar cuáles han sido los aprendizajes que se han producido como resultado de la aplicación de la metodología.

Puesta en práctica

La planificación anterior se ha puesto en práctica en la asignatura de 2º curso, Grado de Educación Primaria, “Fundamentos de la forma y del volumen y estrategias didácticas para su enseñanza” de la Universidad de Valladolid. Concretamente se ha desarrollado en dos grupos del campus de Valladolid y en otro más en el campus de Soria. En total, han participado más de 200 alumnos.

Los grupos eran muy numerosos (alrededor de 80 alumnos). Esto ha ocasionado que, para realizar el trabajo práctico con las actividades GeoGebra, cada grupo se haya dividido en dos, trabajando por parejas en el Aula de Informática de cada Facultad de Educación, en sesiones de una hora de duración. Los alumnos disponían, en el campus virtual Moodle, de los applets y de un guión de trabajo con las actividades a realizar con cada uno, en el que se indicaba qué elementos debían ir recogiendo en el documento de Word (descripción de pasos de una construcción, definición de un concepto, conjeturas sobre relaciones entre elementos). Los debates se realizaron en la sesión siguiente de clase, a partir de las producciones obtenidas, en gran grupo y en el aula de clase, siendo guiados por el profesor, que culminaba los mismos con el establecimiento de las definiciones rigurosas de los conceptos o las demostraciones matemáticas de las relaciones que se probaban. En general, el tiempo invertido en los debates e institucionalización posterior relativos a los applets trabajados con GeoGebra ha sido de dos a tres horas, por lo que la implementación de cada ciclo didáctico (excluida la primera fase) ha supuesto alrededor de una semana de clase de la asignatura.

PRIMERA FASE: DETECCIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS. DISEÑO Y ELABORACIÓN DE APPLETS GEOGEBRA

El punto de partida de nuestra metodología está basado en conocer y detectar cuáles son los conocimientos previos sobre los tópicos que van a ser objeto de la propuesta que tienen los alumnos que comienzan a cursar esta asignatura. Para ello, hemos diseñado un test inicial que los alumnos cumplimentaron de forma individual en la primera semana del curso, con anterioridad al comienzo de la docencia propia de la asignatura. El test consta de 30 preguntas relacionadas con diversos conceptos de los que se estudian en la asignatura, como pueden ser elementos básicos de la geometría plana, relaciones angulares, semejanza y Teorema de Tales o triángulos. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas, de las cuales, únicamente una de ellas es verdadera. Un ejemplo de pregunta del test es la siguiente:

<u>Ejemplo de pregunta:</u> Un ángulo es:

- La amplitud entre dos rectas o semirrectas.
- La parte común a dos rectas que se cortan en un vértice.
- La parte que determinan dos segmentos que tienen un origen común llamado vértice.
- La porción de plano limitado por dos semirrectas con un origen común.

Cada pregunta y sus posibles respuestas fueron planificadas teniendo en cuenta la experiencia de los profesores en esta asignatura, haciendo hincapié en los errores y deficiencias más frecuentes que, como profesionales, hemos ido detectando en la docencia impartida durante varios años.

Dado que la mayoría de los alumnos (salvo alumnos repetidores) no han cursado la asignatura con anterioridad y, además, algunos conceptos es posible que no los recordaran o sólo lo hicieran vagamente (pues los estudiaron bastantes años atrás, en Primaria y en los primeros cursos de la ESO), se esperaba que en muchos casos no supieran qué respuesta dar o no estuvieran seguros de la veracidad de la respuesta. Para detectar este comportamiento, se les pidió que contestaran a todas las preguntas (incluso en aquellos casos en que estuvieran totalmente inseguros de su respuesta o respondieran al azar), añadiendo en cada ítem una pregunta (que también debían contestar) sobre el grado de seguridad que tenían en la respuesta que habían seleccionado. La medición de este grado de seguridad se hizo a través de una escala Likert, de 1 a 5, donde “1” significa estar totalmente inseguro de la respuesta marcada, “2” significa tener poca seguridad en la respuesta; “3”, tener cierta seguridad en la respuesta, pero no demasiada; “4”, estar bastante seguro de la respuesta y “5” significa estar completamente seguro de la respuesta marcada. Así, el cuestionario nos permite no sólo obtener datos sobre cuáles son las preguntas con menor índice de acierto, así como las respuestas incorrectas más frecuentes, sino también establecer correlaciones entre las respuestas dadas y el grado de seguridad en éstas.

El análisis de las respuestas de los tests confirmó nuestra hipótesis de partida: los conocimientos geométricos de los alumnos del Grado de Educación Primaria son muy deficientes, existiendo una gran variedad de conceptos básicos que no recuerdan. Por ejemplo, ningún alumno contestó correctamente más 24 preguntas de las 30 planteadas, mientras que el 50% de ellos tienen 11 o menos preguntas contestadas correctamente. En relación a las preguntas, tan sólo una de ellas, la relacionada con el concepto de escala, tuvo un porcentaje de aciertos superior al 70%, mientras que casi la mitad tienen un porcentaje de aciertos inferior al 30%, siendo especialmente llamativo el caso de tres preguntas por debajo del 20%, una de ellas relativa al concepto de ángulo exterior con respecto a una circunferencia. Fijándonos en la pregunta destacada a modo de ejemplo (sobre el concepto de ángulo), el porcentaje de respuestas correctas se situó en un 40,8%, siendo la respuesta 3 la más elegida entre las incorrectas (31,1%), seguida de la respuesta 1 (18%) y en último lugar de la respuesta 2 (9,2%). En esta ocasión la respuesta más elegida es la respuesta correcta, cosa que no ocurre en varias de las preguntas que se plantearon, existiendo algunos atractores de error bastante marcados.

A partir de una planificación inicial de los conceptos y relaciones que se van a tratar utilizando este ciclo didáctico y de las posibles tareas prácticas con GeoGebra que se podrían proponer, el análisis de las respuestas proporcionadas y los resultados obtenidos en el test nos sirvieron para concretar dichas actividades, que plantearíamos a los estudiantes en la siguiente fase para trabajar los conceptos y relaciones geométricas seleccionadas.

SEGUNDA FASE: ACTIVIDADES PRÁCTICAS CON GEOGEBRA

Una vez diseñadas y creadas las tareas con applets GeoGebra que iban a ser propuestas a los alumnos, éstas han sido organizadas generalmente en bloques de cuatro tareas, constituyendo cada bloque una práctica de laboratorio en el Aula de Informática con el ordenador y el software GeoGebra. En ellas, se buscaba que el alumno reconociera el concepto a partir, generalmente, de su representación gráfica (en ocasiones, también a partir de la representación verbal, como una definición), buscando que el alumno manipulara gráficamente la representación del concepto (construcción, reproducción de su construcción, modificación) para llegar a describirlo verbalmente y plantear su definición desde este reconocimiento gráfico. Es decir, se pretende el reconocimiento del concepto y sus características en sus diversas representaciones, propiciar el cambio entre diferentes representaciones y promover una expresión verbal del concepto y sus características. En otras tareas lo que se pretendía era el establecimiento de relaciones, que son conjeturadas a partir del dinamismo que proporciona el programa GeoGebra. La filosofía subyacente con estas tareas es la realización de un aprendizaje por descubrimiento de los diferentes conceptos (en este caso, conceptos básicos geométricos) tomando como base la representación proporcionada en el applet GeoGebra, seguida en la fase siguiente de una puesta en común de las producciones realizadas por los alumnos junto con una institucionalización del concepto. No obstante, es esperable que ese aprendizaje por descubrimiento esté influenciado por los conocimientos y concepciones previas que poseen estos alumnos sobre los conceptos geométricos básicos.

En general, las tareas a realizar con los applets son de tres tipos distintos. Por una parte, hay tareas que buscan la producción de una representación verbal; por ejemplo, para describir los pasos seguidos en la construcción de un determinado concepto o elemento (como la mediatriz de un segmento) o para escribir la definición de un concepto una vez manipulada su representación gráfica (como en el applet presentado en la Figura 1, sobre el concepto de ángulo). Por otra parte, hay algunos applets (pocos) basados en la construcción de elementos que son definidos verbalmente en la tarea (por ejemplo, la construcción de la configuración con dos rectas paralelas cortadas por una secante y los diferentes tipos de ángulos que en ella aparecen). También hay applets con tareas enfocadas a la detección de relaciones entre elementos y al establecimiento verbal de conjeturas por parte de los alumnos (como el applet presentado en la Figura 2, sobre la relación entre un ángulo interior en una circunferencia y los ángulos centrales correspondientes).

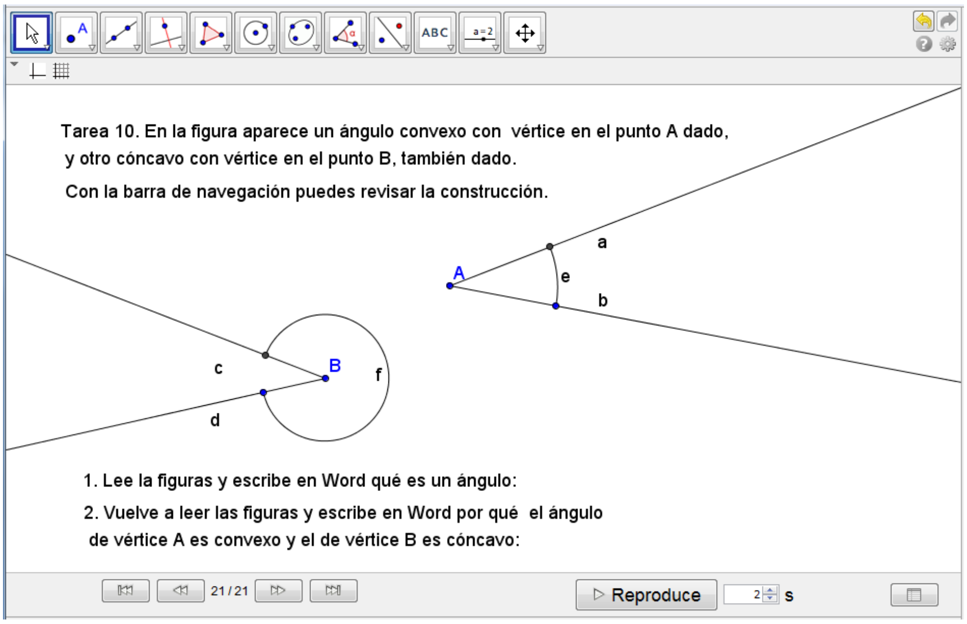


Figura 1. Applet GeoGebra en el que se plantea una actividad con el concepto de ángulo para su reconocimiento gráfico y verbal, y clasificación en cóncavo y convexo.

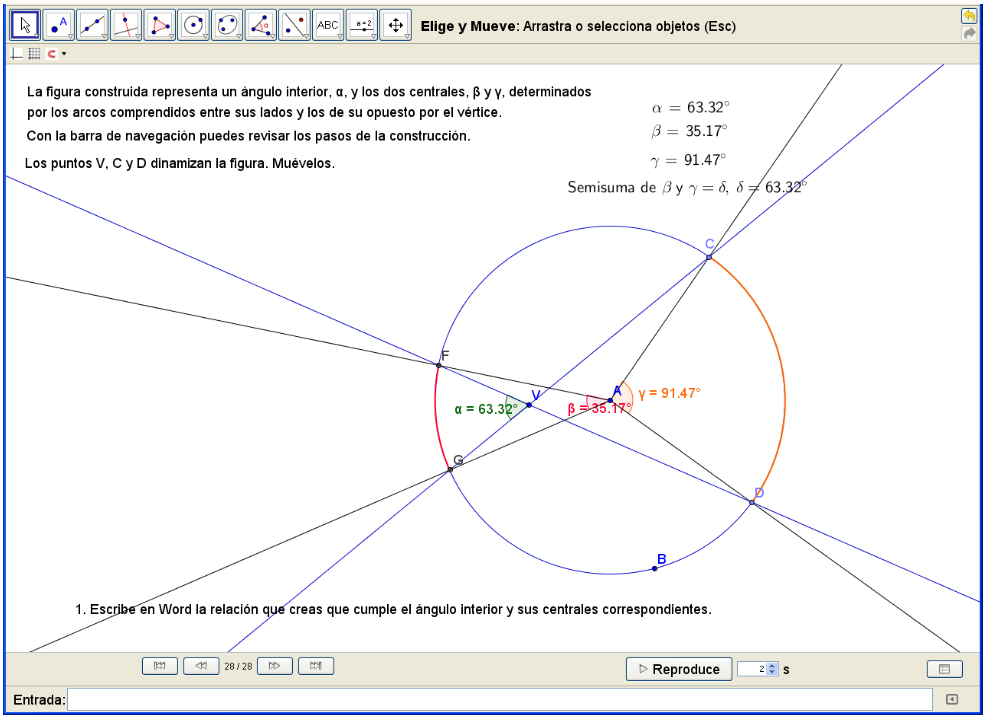


Figura 2. Applet GeoGebra en el que se plantea la detección de la relación angular entre un ángulo interior y sus centrales correspondientes, para establecer una conjetura.

Tras una primera práctica introductoria para que los alumnos aprendieran el entorno GeoGebra y el manejo del programa, se planificaron semanalmente prácticas de laboratorio en las que se trabajaba con un bloque de cuatro applets relacionadas con los conceptos geométricos básicos (en el caso que aquí presentamos). Los alumnos realizaban las prácticas por parejas (un ordenador por pareja), intentando así que los estudiantes tengan que verbalizar sus diferentes propuestas, promoviendo su intercambio, análisis y el consenso de una respuesta para cada tarea. En cada sesión se proporcionaba a cada pareja de alumnos los applets GeoGebra, generalmente cuatro, junto con las tareas asociadas a cada uno, en los que se presentaban y trabajaban diversos conceptos geométricos básicos. En esta comunicación ejemplificamos algunas de las relativas al tema de ángulos. En cada tarea, los alumnos debían consensuar una única respuesta que tenían que escribir en un documento de Word que se habilitaba para ello en el campus virtual de la asignatura.

Se observaron algunas dificultades mínimas de manejo del programa y de tiempo para terminar la práctica propuesta en la sesión de clase. También hubo que tener cuidado con que los alumnos no usasen Internet para buscar la definición de los conceptos o aclaraciones sobre ellos, puesto que ese comportamiento alteraría los resultados naturales de la tarea, así como las etapas posteriores de esta metodología, dando lugar a un desarrollo inadecuado de la misma. Nosotros, como docentes, dábamos orientaciones para el uso del programa y la forma de recoger las producciones de los alumnos, pero evitábamos intervenir en el reconocimiento personal del concepto, aunque hubiese que dar alguna aclaración u orientación.

Al finalizar la sesión, los alumnos subían al campus virtual de la asignatura el documento de Word con sus respuestas a las tareas. Estas respuestas son la información a partir de la cual se estructura el debate de la siguiente fase. El profesor hace una lectura de las respuestas a cada tarea y selecciona varias respuestas o varias ideas contenidas en las respuestas que, por su incompletitud, imprecisión o por haber extraído características o relaciones erróneas sirvan para el desarrollo de dicho debate, teniendo en cuenta también aquellas que se presentan con mayor frecuencia. Estas respuestas son ordenadas según lo alejadas o cercanas que se encuentren de la respuesta pedida (una definición o una relación precisa, por ejemplo), buscando que el transcurso del debate y la discusión de las respuestas acerque progresivamente a los estudiantes a la respuesta precisa.

TERCERA FASE: DEBATE O DISCUSIÓN COLECTIVA EN EL AULA

Una vez realizada la selección de aquellas producciones que van a servir como apoyo para el desarrollo del debate o discusión colectiva en el aula, dicho debate es realizado (en nuestro caso, con todo el grupo de alumnos) en el aula, guiado por el profesor. En estos debates, los alumnos intervenían libremente para comentar las respuestas seleccionadas, buscando el reconocimiento de elementos que sean erróneos, poco precisos o incompletos para establecer una definición o relación precisa, así como la promoción de textos alternativos que mejoren progresivamente las respuestas dadas, y que se vayan acercando paulatinamente a la definición o relación buscada, para su posterior institucionalización en la siguiente fase. El papel del profesor en el debate, como señala Mariotti (2009), es esencial dentro de la discusión matemática que se produce, como guía en la discusión incitando la evolución desde las definiciones o relaciones personales (emergidas en la fase anterior) hacia las matemáticas, que son el objeto buscado. Mariotti (2009) señala cuatro intervenciones usuales de los docentes que se producen en el desarrollo de un debate de estas características, y que son esenciales para su propósito: volver atrás en la tarea, focalizar la atención en aspectos específicos, solicitar una síntesis de la discusión y proveer una síntesis, explicitando la aceptación de elementos clave que nos acerquen a la definición o relación matemática precisa. A continuación mostraremos algunos extractos de los debates, que muestran sus características principales y el papel del profesor en este caso concreto.

En el primer debate, sobre el concepto de ángulo (asociado al applet de la Figura 1), se escogieron algunas definiciones que se iban aproximando progresivamente a la definición matemática, indicando explícitamente qué pareja había producido cada una, buscando que ellos mismos reconocieran algunos errores y añadieran elementos ausentes que iban generándose a lo largo del debate, para producir definiciones alternativas que se fueran aproximando al concepto matemático.

Por ejemplo, los estudiantes E1 y E2 se dan cuenta de una característica necesaria que faltaba y que sí había sido incluida por otros compañeros:

Prof: [Lee la definición de E1 y E2] “Porción de espacio comprendida entre dos semirrectas”

E1: Yo creo que ahí falta decir lo de... que están en un... que tienen un origen común.

Los estudiantes E3 y E4 reconocen un error en su definición después de que el profesor recurriera al applet (vuelta a la tarea) e incitara a los estudiantes a que observaran y leyeran la figura:

Prof: [Lee la definición propuesta por E3 y E4] “Un ángulo es una parte originada cuando dos rectas se unen en un mismo punto”. [Tras abrir el applet de la Figura 1] Eso sí que es un ángulo, ¿verdad? Entonces, parece que con lo que habéis escrito vosotras...

E3: Que se cortan.

Prof: Pero vosotras habláis de rectas...

E3: Semirrectas que se cortan...

E4: ¡Claro, lo que hay ahí son semirrectas!

La referencia concreta a estudiantes en las definiciones causaba que muchos de ellos no se implicaran en el debate si no aparecían las suyas, por lo se optó por no señalar explícitamente los autores de cada producción, fomentando que el debate fuera más abierto. En el siguiente pasaje encontramos una muestra clara de la filosofía del debate, con intervenciones de los alumnos en los que se va mejorando progresivamente una definición propuesta por una pareja de estudiantes, para el concepto “rectas perpendiculares”. El profesor cierra las intervenciones con una síntesis en la que reafirma una intervención correcta y alerta sobre la imprecisión de la definición inicial propuesta:

Prof.: [Lee la definición propuesta] “Recta que corta a otra horizontal formando ángulos rectos”.

E5: Mal del todo no está. Está claro que si se cortan tendrá que ser así para que no tengan la misma dirección.

Prof.: Esa definición, ¿no la puedes mejorar?

E3: No tiene por qué cortar a una recta horizontal, puede cortar a una recta vertical también.

E6: Yo iba a decir lo que ha dicho ella, que también puede cortar a una recta vertical, no hace falta que sea siempre la perpendicular... con dirección... arriba-abajo.

E7: Lo que tiene que hacer es cortarlo perpendicular... O sea, con un ángulo de... que forme cuatro ángulos de 90º, da igual la dirección en el plano.

Prof.: ¿Lo de recta horizontal tú lo quitarías?

Coro: Sí.

E8: Pero si especificas que es recta vertical antes... Dices una recta vertical que cruce... [error común de los estudiantes], o sea, que se corte con otra recta horizontal. Pues ya se cortan, y ya forman...

E6: Pero es que eso está mal también...

E9: Es que no tienen por qué ser ni verticales ni horizontales.

E10: Claro, el caso es que al cortarle forme cuatro ángulos rectos, independientemente de que sean horizontales o verticales.

Prof.: Entonces, ¿está correcta la definición o quitarías o pondríais algo?

E11: Yo creo que no tienen por qué estar obligatoriamente en horizontal y en vertical.

Prof.: Eso es. Fijaos, eso es una particularización, ¿de acuerdo? Al poner que la recta tenga que ser horizontal, se entiende... diríamos, que su altura respecto del suelo es la misma en todos los puntos. Suponiendo que el suelo fuese plano, claro.

En el desarrollo de los debates, además de volver al applet para contrastar las producciones y recordar la tarea pedida, también es de gran importancia el uso y la propuesta de contraejemplos por parte del profesor, que ayuden a discriminar definiciones correctas de los conceptos frente a otras definiciones incompletas o parciales, y que ayuden a identificar características necesarias que están ausentes. Un ejemplo es el siguiente, al hablar sobre ángulos adyacentes:

Prof: Una pareja ha escrito que “dos ángulos son adyacentes porque los dos suman 180º. Por lo tanto, dos o más ángulos son adyacentes si la suma de ellos da 180º”. Que suman 180º, ¿eso está bien? ¿Es preciso? [Tras esto, dibuja dos ángulos suplementarios en la pizarra, pero que no tienen ni el vértice ni ninguna semirrecta en común; además abre el applet en el que aparecen dibujados dos ángulos adyacentes]

E6: Yo creo que... yo creo que sí que miden 180º, porque si es a partir de una recta... La recta esa siempre va a tener 180º.

Prof: Pero ellos no dicen eso, ¿no?

E6: Ya, no lo dicen.

Prof: Fíjate, yo he dibujado aquí dos ángulos cuya suma son 180º, estas dos semirrectas he querido trazarlas paralelas. ¿Alguien diría que estos dos ángulos que he pintado son adyacentes?

Coro: No.

Prof.: ¿Por qué?

E12: Porque no comparten lado.

Prof.: Vale, pues ya hay algo que ha salido, y es que tienen que compartir lado [para ser adyacentes].

Una vez finalizado el debate relativo a un concepto o a una relación, comentando las diferentes definiciones o ideas seleccionadas por el profesor, se pasa a la recopilación por parte del profesor de aquellas ideas surgidas durante el debate que son necesarias para el establecimiento preciso de la definición de un concepto o la relación entre elementos, pasando a la fase de institucionalización.

CUARTA FASE: INSTITUCIONALIZACIÓN DE CONCEPTOS Y RELACIONES

En esta fase, inmediatamente posterior al debate, se produce la institucionalización de los conceptos y relaciones por parte del profesor, entendiendo institucionalización en el sentido de Brousseau (1998), como la puesta en común de aquellas ideas surgidas durante el debate que son necesarias para el establecimiento de una definición precisa de un concepto o una relación entre elementos, definición o relación que pertenece al saber cultural (en este caso matemático) de una sociedad.

Así, por una parte se produce la institucionalización de una definición tras el debate previo basado en algunas respuestas de los estudiantes a la tarea GeoGebra, estableciéndose ésta de modo preciso y pidiendo después a algunos estudiantes que la verbalicen. Algo similar sucede con las relaciones entre elementos (por ejemplo, relaciones angulares en una circunferencia, como la mostrada en la Figura 2), estableciendo de modo preciso la relación, motivando la necesidad de demostrar la misma de forma matemática y realizando dicha demostración, una vez que ha sido conjeturada por los estudiantes y debatida en el aula su veracidad a partir del dinamismo del programa GeoGebra.

En algunos casos esa institucionalización de los saberes matemáticos también se produce cuando aparecen conflictos o discusiones en los debates en los que aparecen posturas enfrentadas entre grupos de alumnos que argumentan sus posiciones sin que se produzca un avance en las mismas. Un ejemplo se produjo en el debate encaminado a obtener la definición de rectas paralelas, al discutir la definición propuesta por una pareja de estudiantes: “Son aquellas rectas que no se cortan por mucho que se prolonguen”. Una parte de los alumnos defendía que la definición era correcta, considerando que las rectas sí se podían prolongar en su trazado; mientras que otro grupo consideraba que no era correcta, puesto que las rectas son infinitas y no se pueden prolongar. El profesor intervino para aclarar que el conflicto en el primer grupo estaba derivado de la confusión entre el concepto y su representación gráfica, que una representación de una recta sí se puede prolongar (ya que es imposible que esta representación sea infinita), mientras que la recta como concepto, que está en la mente de la persona, sí que es infinita, por lo que no tiene sentido hablar de su prolongación.

QUINTA FASE: CONTROL DE LOS APRENDIZAJES

Una semana después del ciclo didáctico realizado, y a modo de cierre del mismo, se realizó una pequeña prueba individual por escrito, de corta duración (diez minutos), en la que se planteaban tres cuestiones relacionadas con los conceptos y relaciones que habían sido abordados en el ciclo didáctico, en el caso de esta comunicación elementos básicos de geometría plana. El control planteado fue el siguiente:

Nombre y apellidos. . . . .

1. Justifica por qué el siguiente enunciado es correcto o no. Si no lo fuere escríbelo correctamente.

   Dos rectas paralelas son aquellas que por mucho que se prolonguen no llegan a cortarse.

2. Escribe la definición de ángulos opuestos por el vértice.

3. El gráfico adjunto representa a dos rectas paralelas cortadas por una secante.
   a) Indica qué ángulos son iguales a β y cómo se denominan en relación a éste.
   b) Indica qué ángulos son iguales a α y cómo se denominan en relación a éste.

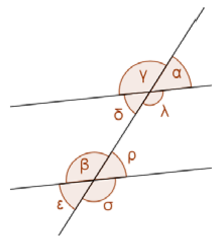


Figura 3. Escaneo con las preguntas de la prueba escrita sobre elementos básicos de geometría plana.

Cada cuestión fue evaluada por el profesor de 0 a 10 puntos, según su grado de proximidad a la respuesta correcta completa. En general, observamos que los resultados de los estudiantes no fueron demasiado buenos, con una media de puntuaciones entre 5 y 6 en las preguntas 2 y 3, pero una media inferior (3’5) en la primera pregunta. Varios alumnos obtienen puntuaciones muy altas, pero un número también importante, especialmente en la primera pregunta, obtienen puntuaciones muy bajas, que muestran una falta de asimilación de las definiciones y relaciones tratadas.

En la primera pregunta, con los resultados peores de las tres, observamos cómo se siguen planteando problemas derivados de la identificación del concepto y su representación gráfica, apareciendo bastantes respuestas contradictorias en las que los estudiantes reconocen que las rectas son infinitas, pero creen que éstas se pueden prolongar, mostrándose la posibilidad de prolongación como una concepción muy arraigada a pesar de haber sido tratada explícitamente en el debate (no sólo en el aspecto antes comentado, sino en más ocasiones), respondiendo que el enunciado es correcto.

Con respecto a la pregunta 2, aquellos estudiantes que optan por definir los ángulos opuestos por el vértice utilizando la idea de prolongación de las semirrectas que forman sus lados escriben la definición correcta, pero eso no es así en muchos de los estudiantes que parten de una intersección de dos rectas para definir este concepto, no acertando a indicar correctamente qué ángulos de los que aparecen en esa intersección son los opuestos por el vértice. Algunos siguen recurriendo indebidamente a la amplitud para definir estos ángulos, incluso sin establecer la configuración inicial de dos rectas que se cortan (por ejemplo, ángulos opuestos por el vértice como aquellos ángulos iguales con un vértice común). Otros se limitan a describir de forma errónea la situación gráfica que genera ángulos opuestos por el vértice, sin llegar a definirlos.

En la pregunta 3 se plantean bastantes problemas asociados a la nomenclatura de los ángulos, apareciendo nombres genéricos o incompletos como "ángulos opuestos", "internos" o "alternos", o escribiendo el mismo nombre a todos los ángulos que son iguales al ángulo indicado (por ejemplo, los ángulos γ, λ y σ son iguales a β y son alternos externos"). La identificación que más problemas ha dado es la de ángulos correspondientes, sustituyendo este nombre por otros como "congruentes" o "correlacionales". También existen alumnos que únicamente indican los ángulos como agudos u obtusos.

LIMITACIONES Y PROPUESTAS DE MEJORA

Los resultados finales de este ciclo didáctico que aquí se ha ejemplificado pueden considerarse como mejorables en ciertos aspectos, derivándose de la reflexión sobre el proceso algunos problemas y limitaciones que pueden servir para mejorar la metodología propuesta. Por un lado, el número de alumnos de los grupos (entre 80 y 90 alumnos) es muy numeroso, lo cual produce que en los debates, aunque el profesor intente que participen el mayor número posible, haya alumnos que no intervengan y no se impliquen en la actividad, o sólo lo hagan en algún momento concreto. Una solución posible sería realizar estos debates partiendo el grupo completo en dos (al igual que en la fase 2), aunque eso conllevaría el doble de tiempo para su realización en la planificación de la asignatura. Además, el control de aprendizajes ha puesto de manifiesto que varios alumnos mantienen concepciones erróneas que pusieron de manifiesto en la fase 2 o durante el debate, por lo que proponemos como mejora que, después del debate y la institucionalización, se instara a los estudiantes a que, individualmente, escribieran verbalmente un resumen de los elementos y problemas tratados en el debate, así como progresos en su concepción sobre el concepto tratado, errores detectados, dudas u otros sentimientos que quiera compartir. Ese trabajo fomentaría que el alumno reflexionara sobre el debate producido, teniendo que verbalizar las ideas que en él han salido y poner éstas en relación con su respuesta en la tarea GeoGebra o con sus concepciones previas, lo cual podría servir para que el debate "calara" más en todos los alumnos, no sólo en aquellos que más se implican en el mismo. Esto puede ser especialmente importante en el caso de los alumnos con los que aquí trabajamos, alumnos adultos, en los cuales las concepciones o ideas imprecisas o erróneas que tienen sobre algunos conceptos básicos (con los que han trabajado varios años durante su historial educativo) parecen mostrarse como un obstáculo importante hacia el establecimiento de una definición o relación matemática precisa, elementos que forman parte de los conocimientos que necesitan para desarrollar su futura labor profesional como docentes.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte de un Proyecto de Innovación Docente aprobado por la Universidad de Valladolid, titulado "Diseño y elaboración de unidades didácticas de matemáticas basadas en Libros GeoGebra para el Grado de Educación Primaria", cuyos miembros son los autores de la comunicación. El primer firmante de la comunicación cuenta con la ayuda y financiación de una beca predoctoral FPU (Ref.:AP2012-2241)

Referencias

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, Francia : La Pensée Sauvage Éditions.

de Villiers, M. (1996). Why proof in dynamic geometry. En M. de Villiers (Ed.), *Proofs and Proving: why, when and how?* (pp. 23-42). Sudáfrica: AMESA.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Fernández Blanco, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, N. Climent y A. Estepa (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 66 (3), 317-333.

Goldin, G. A. (2007). Representation in School Mathematics: A unifying research perspective. En J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston: NCTM.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM. The international journal on Mathematics Education*, 41 (4), 427-440.

Mariotti, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potencial of a DGS. *ZDM. The international journal on Mathematics Education*, 45 (3), 441-452.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, present and future* (pp. 205-235). Holanda: Sense Publishers.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1(1), 39-63.

Sinclair, M.P. (2003). The provision of accurate images with dynamic geometry. En N. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zillox (Eds.), *P*[ii]*roceedings of the 27th PME International Conference*, 4, 191-198.

Para hacer referencia al artículo:

Arce, M, Conejo, L, Ortega T y Pecharromán, C. (2015). Integración de “libros geogebra” en el aprendizaje de conceptos geométricos en el grado de Educación Primaria. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”.* (pp. 297-308). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

[i] Durante toda la comunicación se hará un uso genérico del masculino (por ejemplo, “los alumnos”, “los estudiantes”, “el profesor”), sin hacer referencia al sexo concreto de los participantes.

EL PROBLEMA DE JOSEFO: MAGIA E INVESTIGACIÓN

Antonio Arroyo Miguel

IES Comuneros de Castilla. Burgos

Facultad de Humanidades y Educación. Universidad de Burgos

Asociación "Miguel de Guzmán"

Resumen

Los juegos de magia tienen un gran atractivo para nuestros alumnos y suponen un buen incentivo para que se adentren en la resolución de problemas. Se presenta el problema de Josefo, que da lugar a interesantes juegos de magia con un gran contenido matemático. .Los juegosde magia son sencillos de realizar y no requieren una habilidad especial, a lo más una sencilla preparación previa a su realización. Terminaremos proponiendo algunas actividades relacionadas con los juegos realizados.

Palabras clave: *matemáticas, secundaria, magia, resolución de problemas, cuenta australiana.*

MAGIA Y MATEMÁTICAS

En los últimos tiempos están apareciendo numerosos artículos donde se comenta la gran afinidad entre las matemáticas y la magia. A poco que se profundice en estos temas, es fácil encontrar gran cantidad de caminos que nos llevan de la magia a la matemática y viceversa. Y aunque ahora, pueda aparecer como una nueva moda, la relación viene de muy atrás. Así podemos encontrarnos con magia en libros de matemáticas de Martin Gardner, Kasner, Newman, Grazt, etc. y en sentido contrario, matemáticas en libros de magia escritos por Pablo Minguel, Alfredo Florensa, Vicente Canuto o el más famoso Tamarit.

Por otra parte, es bastante evidente que la magia tiene un gran atractivo para nuestros alumnos, y que cualquier alusión a su uso en clase, supone un plus de receptividad por su parte.

Proponemos por tanto, utilizar algunos juegos de magia con un fuerte contenido matemático para, a partir de ellos, proponer a nuestros alumnos algunas actividades de resolución de problemas o pequeñas investigaciones, que les permitan profundizar en diferentes conceptos matemáticos.

De los muchos temas que pueden prestarse al propósito aquí manifestado, hemos elegido para esta comunicación el llamado PROBLEMA DE JOSEFO. El nombre hace referencia a Flavio Josefo, un historiador judío que vivió en el siglo I. Hombre de acción, estadista y diplomático, fue uno de los caudillos de la rebelión de los judíos contra los romanos. Hecho prisionero y trasladado a Roma llegó a ser favorito de la familia imperial. Fue considerado como un traidor a la causa judía y odiado por los judíos.

Cuenta Flavio Josefo en su libro "De bello judaico", que cuando los romanos capturaron la ciudad de Jotapata, Josefo y un grupo de soldados judíos se refugiaron en una cueva. Allí tras graves discusiones, decidieron suicidarse antes que entregarse. No pudiendo Josefo quitarles esa idea de la cabeza, con desesperación y confiando en la divina providencia les dio el siguiente consejo:

"Pues estáis, dijo, determinados a mataros, acabemos ya, echemos suertes quién matará a quién, y aquel a quien cayere, que mate al que le sigue, y pasará de esta manera por todos la misma sentencia, porque no conviene que uno se mate a sí mismo, y sería cosa muy injusta que, muertos todos los otros, quede alguno en vida, pesándole de matarse." Parecióles que decía verdad.

Entonces, colocados en un círculo, cada uno fue matando al de su derecha, a fin de no ofender a Dios con el suicidio. Procediendo de este modo, fueron muriendo los bravos soldados hasta que al fin quedaron solamente dos: *"Vino a quedar él y un otro, no sé si por fortuna o por divina providencia, y proveyendo que no se pudiese quejar de su suerte, o que si quedaba libre no hubiese de ser muerto por manos de un gentil, dióle la palabra y concertóse con él que entrambos quedasen vivos."* Josefo y un buen amigo, viéndose como únicos supervivientes, decidieron que era el momento de entregarse a los romanos y salvar la vida.

Esta anécdota nos sirve para presentar una serie de juegos de magia, relacionados con la adecuada colocación de una carta u otro objeto y, a partir de ello, proponer a nuestros alumnos pequeñas investigaciones matemáticas que les permitirá trabajar la Resolución de Problemas.

Con ello pretendemos ponerles frente a la belleza de las Matemáticas, estimular el gusto por ellas y por la resolución de problemas, potenciar y consolidar su afán de curiosidad, provocar en ellos el planteamiento de preguntas inteligentes y la puesta en práctica de los métodos, técnicas y procedimientos de trabajo propios y específicos de las Matemáticas. Además, es una buena forma de provocar en ellos, la puesta en práctica de razonamientos y procesos de pensamiento útiles en la resolución de problemas, adquirir estrategias y desarrollar habilidades que faciliten la confianza y autonomía personal.

Comenzamos la comunicación realizando algunos juegos de magia, y poniendo de manifiesto su fundamento matemático, para acabar proponiendo algunas actividades para trabajar en el aula.

Dotes mágicas

El primer juego va a tratar de detectar si los asistentes a la comunicación tienen "dotes mágicas"

Para saber si los espectadores tienen "dotes mágicas"

- Cada espectador toma un número de cartas entre 4 y 8. Las que él quiera.
- Las mezcla y observa la última. Esa será su "predicción" para saber si tiene dotes.
- Dejamos pasar el tiempo: una semana. Esto lo simularemos pasando de arriba a abajo una carta por cada día de la semana, de una en una y cantando los días: Lunes (una carta abajo), Martes (otra), y así hasta Domingo que pasaremos la última.
- A continuación se realizan las siguientes operaciones: (Cuenta Australiana)

  Pasar la carta superior debajo de las demás.

  Retirar la carta que ahora ocupa el lugar superior.

Repetir los pasos anteriores (pasar una carta de arriba abajo, retirar la nueva carta de arriba) hasta que quede en la mano del espectador una sola carta.

Si la carta con la que se quedan en la mano es la que vimos a principio, quiere decir, que el espectador tiene dotes de MAGO. Se espera que todos los asistentes tengan dotes de magos.

En busca de la suerte

Vamos a echar las cartas para ver la suerte que les espera a los asistentes para el presente curso.

Para ello, tomaremos a un representante de los asistentes, que será el encargado de "echar las cartas". En primer lugar vamos a buscar la carta de la suerte, que será el As de corazones (los corazones siempre han traído buena suerte). Le pedimos al representante que coloque el As de corazones sobre el mazo y que a continuación corte repetidamente para que la carta quede perdida por la baraja y no podamos saber dónde se encuentra. Una vez perdida la carta, le pedimos que tome 12 cartas de la baraja, las irá poniendo sobre la mesa de una en una, hasta tener el paquete de 12 cartas.

Ahora advertimos que la suerte está echada y que vamos a quedarnos con una sola carta de ese paquete. Lo haremos por el procedimiento de la Cuenta Australiana (primera carta a la parte de abajo y desechamos la siguiente, repetimos hasta quedarnos con una carta). Si la carta que se queda en la mano es el As de corazones, indicaría muy buena suerte para todos los allí reunidos. Para curarnos en salud, comunicamos que si no es el As de corazones, pero es otra carta de corazones también habrá suerte, aunque no tanta, y como último recurso, sino nos queda una carta de corazones, miraremos las otras 11 cartas y cuantas más cartas de corazones encontremos, más suerte para todos.

Al descubrir la última carta, veremos que, efectivamente es el As de corazones, y al descubrir las otras 11 cartas irán apareciendo de modo ordenado el resto de cartas de corazones: 2, 3, 4,…

Explicación

La Baraja debe estar preparada de la siguiente manera:

Las cartas de corazones estarán en orden: 9 – 5 – 10 – 3 – J – 6 – Q – 2 estas cartas estarán encima del mazo (el 9 encima del todo). En la parte de debajo del mazo estarán la K, vuelta del revés, no se verá, después el 7, 4, y por último cerrando el mazo el 8. El As estará perdido por el centro de la baraja.

Al comenzar el juego, buscamos el As de corazones porque es la carta de la suerte para el Amor.

Colocamos el As encima y el espectador corta para que se pierda en el corte (el As quedará sobre el 9, de modo que al completar el corte todos los corazones quedarán así:

K(vuelta) – 7 – 4 – 8 –As - 9 – 5 – 10 – 3 – J – 6 – Q – 2

A continuación se corta varias veces para que la carta quede perdida en la baraja.

Cuando ya hemos dado la carta por perdida, abrimos la baraja con las cartas tapadas, y nos sorprendemos de que haya una carta vuelta, ponemos cualquier disculpa y la separamos del mazo, aprovechando para poner todas las cartas que estaban debajo de la K, encima del mazo.

A continuación el espectador saca de la baraja una a una, poniéndolas sobre la mesa, 12 cartas.

Recoge las 12 cartas y las vuelve a colocar encima de la mesa del siguiente modo: La carta de arriba se pone abajo y la siguiente la coloca sobre la mesa, repite este proceso hasta que se queda con una carta en la mano, esa será el AS de corazones, significa suerte para el próximo año, pero además si continuamos levantando las cartas de la mesa veremos que son, el 2, 3, 4, ... de corazones, perfectamente ordenados, lo cual significa MUCHA SUERTE en los próximos meses

El gran descubrimiento

Damos la baraja a un espectador para que mezcle. Nos la entrega y la abrimos para enseñar que está bien mezclada. A continuación le pedimos que piense un número menor que el número de cartas, y mientras lo piensa, nosotros escribiremos una predicción en un papel, que quedará custodiado por otro espectador.

Ahora el espectador nos dice el número que ha pensado y tomamos de la baraja tantas cartas como nos indica ese número. Por último le pedimos al espectador que se quede con una sola carta, utilizando nuevamente el método de la cuenta australiana.

La carta que quede en la mano del espectador coincidirá con la predicción realizada y que está escrita en el papel que custodia un espectador.

Explicación:

Damos la baraja al espectador para que mezcle. Nos la entrega y la abrimos para enseñar que está bien mezclada. **Nos fijamos en la primera carta**, será nuestra predicción. Escribimos nuestra predicción en un papel y pedimos que nos diga un número, menor que el número de cartas lógicamente. (Por ejemplo a = 35) Restamos mentalmente el número dado de la mayor potencia posible de 2 (en nuestro caso $32 = 2^5$; p = 35 – 32 = 3) a ese número lo multiplicamos por 2 y lo sumamos 1 (n = 2p + 1 =7) esa es la posición en la que debemos colocar la primera carta.

Lo haremos de la siguiente manera:

Vamos a contar tantas cartas, como el número que nos ha indicado (a= 35) comenzamos contando las cartas por separado, y colocando cada carta encima de las anteriores hasta que lleguemos al número en que debe quedar nuestra carta (n = 7) en ese momento paramos, con cualquier disculpa, y a continuación seguimos contando, pero colocando las cartas en la parte de abajo. De este modo cuando hayamos contado las cartas, tendremos colocada nuestra predicción en la posición 2p+1.

A continuación damos la baraja al espectador para que haga una cuenta Australiana, primera carta abajo, siguiente fuera, y así hasta que se quede con una sola carta en la mano, que será nuestra predicción.

ACTIVIDADES.

A partir de los juegos aquí presentados, podemos proponer a nuestros alumnos actividades de resolución de problemas y de pequeñas investigaciones, más o menos profundas según los cursos a los que vayan destinadas.

Eligiendo Equipo

En un grupo de 12 alumnos se van a hacer 2 equipos de 6. Para ello se colocan todos los alumnos en un círculo y vamos eligiendo para el primer equipo: el primero Si, el segundo No, el tercero Si, el cuarto No,… hasta obtener los 6. Si yo me coloco en primer lugar ¿Dónde deben colocarse mis amigos, para que estemos juntos en el mismo equipo?

Evidentemente, la respuesta a esa primera pregunta es muy sencilla, pero ello dará lugar a que se comprenda bien el problema y contesten a las siguientes cuestiones.

¿Dónde deberían colocarse si en la elección se hace uno Si y dos No, es decir el primero Si, 2º y 3º No, 4º Si, 5º y 6º No,…?

¿Y si elegimos uno de cada 4? ¿Y uno de cada 5? Estudia todas las posibilidades de elegir a partir del primero, dejando cada vez uno más.

Podemos pensar el problema con un número inicial diferente de 12.

¿Dónde se colocó Josefo?

Imaginemos a Josefo en la cueva, asediado por los romanos y rodeado de sus 40 valientes soldados dispuestos a matarse. Josefo, tras convencerles de que colocados en círculo, cada uno debe ir matando al que tiene a su derecha, trata de calcular donde colocarse para ser el último superviviente. ¿Dónde debe colocarse Josefo?

Se puede sugerir al alumno que piense primero el problema con menos personas y realizar una tabla para tratar de buscar una fórmula de recurrencia, que le lleve a la solución del problema general. Van a aparecer las potencias de dos. Por lo que se podrá trabajar sobre el sistema binario de numeración.

Tabla1. Posición para librarse

Nº de personas en el círculo	Nº de la persona que libra
1	1
2	1
3	3
4	1
5	3
6	5
7	7
8	1
…	
N =	¿?

Es interesante investigar la solución que da al problema Martin Gardner.

Para averiguar en qué posición del mazo debe estar originariamente una carta, para que sea con la que nos quedamos al final al hacer una cuenta australiana, Martin Gardner nos sugiere, usar la notación binaria: *Sea n el número de cartas, lo escribimos en binario (ej,52 = 110100) , ahora llevamos el primer uno a la posición final, formándose un nuevo número (en nuestro ejemplo: 101001 = 41). Esa es la posición de la carta que nos quedará en la mano al hacer la cuenta Australiana.* (Gardner (1991)

Una vez realizada esta primera investigación podemos ampliar el problema, estudiando cómo debemos colocarnos en el caso que la elección se haga saltando más de 1.

A partir del primero eliminamos al 3º, el 4º elimina al 6º, etc… Con la baraja sería: pasamos dos debajo y eliminamos una, repitiendo el proceso hasta que quede una sola igual que antes.

Podemos tratar de generalizar resultados saltando 2, 3,…etc.

También se pueden plantear los problemas anteriores pero salvándose dos personas (como el caso de Josefo) o más.

Cuestión de orden

Tomamos 13 cartas de un palo de una baraja francesa (podemos pensar el problema con las 10 o 12 cartas de una baraja española). ¿Cómo debemos colocarlas para que al hacer una cuenta australiana, las cartas que saquemos, aparezcan en orden creciente (1, 2,…)?

Generalizar a otros números de cartas.

Referencias Bibliográficas

Alegría, Pedro. Página web: Divulgamat

Alegría, Pedro y Ruiz de Arcaute, J.C.. (2002): "La matemagia desvelada". *Sigma* 21, 145-174.

Gardner, M. (1981). *Carnaval matemático*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Gardner, M. (1983). *Circo matemático*. Madrid, España: Alianza Editoria

Gardner, M. (1984). *Festival mágico – matemático*. Madrid, España. Alianza Editorial.

Gardner, M (1989). *Magia inteligente*. Buenos Aires, Ediciones Granica

Gardner, M. (1991). *El ahorcamiento inesperado y otros entretenimientos matemáticos*. Madrid, España. Alianza Editorial.

Grazt, W.M. (Sin año de edición). *Enigmas, entretenimientos y curiosidades matemáticas*. Madrid. Ediciones Ibéricas

Kasner, E. y Newman, J. (1985) *Matemáticas e Imaginación*. Madrid. Editorial: Hyspamérica.

Muñoz Santonja, J. (2003) "*Ernesto el aprendiz de mate mago*". Madrid. Ed. Nivola.

Vinuesa del Río, C. Matemágicas: *Revista NÚMEROS* vol. 76

Para hacer referencia al artículo:

Arroyo, A. (2015). El problema de Josefo: magia e investigación. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 309-314). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

MATEMÁTICAS EN EL THYSSEN: ALGO MÁS QUE GEOMETRÍA

Myriam Codes Valcarce

Universidad de Salamanca

Resumen

Es habitual relacionar obras de arte con contenidos de geometría en todos los niveles educativos, pero hay obras en las que se manifiestan otros contenidos matemáticos que pueden introducir conceptos tan elementales y a la vez ricos como el de número. A partir de las obras Jesús entre los doctores (Durero, 1506), Retrato de una joven dama con rosario (Rubens, 1609-10) y Love, Love, Love. Homenaje a Gertrude Stein (Demuth, 1928), pertenecientes a la colección del museo Thyssen-Bornemisza de Madrid, se desarrolla una propuesta innovadora para mostrar al futuro maestro cómo descubrir el vínculo entre la matemática y otras disciplinas como el arte.

Palabras clave: *matemáticas, arte, contar, número*.

INTRODUCCIÓN

El binomio arte y matemáticas evoca líneas rectas y curvas, figuras geométricas regulares e irregulares, rectángulos áureos o no, en los que en ocasiones el artista embute figuras humanas y objetos de nuestro entorno salpicados de luz que, según su intensidad, dirigen nuestra mirada. Pero a partir de un cuadro se puede hablar de otra matemática que no es geometría, aunque siempre tengamos ocasión de recurrir a ella.

El número áureo es un ejemplo de recurso inagotable para relacionar la matemática con nuestro entorno, que normalmente desemboca en geometría. Construir un rectángulo áureo o dividir un segmento en media y extrema razón, son prácticas relativamente sencillas que se pueden llevar a cabo en un aula de primaria o secundaria y se pueden introducir a partir de un cuadro como el conocido retrato de Luca Pacioli atribuido a Jacopo de Barbari (Meavilla, 2006). El profesor Meavilla, utiliza esta obra para realizar lo que él llama un paseo histórico-geométrico en el que el contenido matemático se mezcla con el histórico a partir de la observación del cuadro y de la búsqueda de respuestas a interrogantes tan naturales cómo quién es el personaje retratado o cuál es el nombre de algún objeto dibujado.

Pero en el arte hay matemáticas más allá de la geometría y nuestro ingenio puede destapar ese vínculo que nos permitirá no solo disfrutar de estas dos disciplinas, sino además proyectar la interdisciplinaridad a otras áreas del conocimiento como la historia o la lengua.

La experiencia que se describe en esta comunicación deriva de la propuesta por parte de la directora del Área de Educación del museo Thyssen-Bornemisza de Madrid de diseñar un taller sobre arte y ciencia. La preparación de dicho taller sembró la semilla, y el convencimiento de que la actividad matemática no debe presentarse de manera aislada sino conectada con el resto de disciplinas del currículo, hizo el resto. Se utilizaron tres obras del museo para mostrar a los estudiantes del grado de maestro una sesión de clase en la que el discurso matemático discurriera a partir de una obra de arte haciendo referencia a conceptos matemáticos no geométricos y poniendo especial énfasis en el carácter más humanístico de la matemática.

EL NÚMERO EN EL MUSEO THYSSEN

El museo Thyssen-Bornemisza de Madrid abrió sus puertas hace poco más de 22 años para deleitarnos con la que fue la mayor colección privada de arte. Una característica que lo distingue de otros museos españoles es que posee una colección que alberga una extensa muestra de arte antiguo y moderno, pudiéndose contemplar en sus salas desde obras clásicas del s. XIII hasta las últimas manifestaciones de pintura moderna del s. XX. A partir de dos catálogos del museo (Alarcó, 2009; Borobia, 2009) se han seleccionado tres obras que emulan este carácter y tienden un puente entre el arte y la matemática. Las tres obras promueven un vínculo entre la expresión artística y un concepto matemático ajeno a la geometría, el número.

Jesús entre los doctores (Durero, 1506)

En esta obra, tanto la luz como el color y la colocación de los personajes dirigen la mirada al centro del cuadro en el que la conjunción de las manos de Jesús y de uno de los rabinos, enfatizan, según la iconografía cristiana, la sabiduría de Jesús a través del cómputo de sus argumentos con los dedos de la mano, frente a la ausencia de argumentos del rabino situado a su derecha (L. A. García, conversación personal, 17 de septiembre de 2014).

Figura 21. Jesús entre los doctores (Durero, 1506). Museo Thyssen de Madrid.
http://www.museothyssen.org/img/obras_descarga/1934.38.jpg

Desde la matemática, el gesto de las manos de la figura de Jesús nos traslada a épocas anteriores al nacimiento de las primeras civilizaciones en las que, además de otros utensilios como guijarros o muescas en trozos de madera o hueso, el hombre utilizó los dedos de las manos para contar. Boyer (1994) nos recuerda la observación de Aristóteles sobre el uso de nuestro sistema de numeración en base 10 como "consecuencia del accidente anatómico de que la mayor parte de nosotros nacemos con diez dedos en las manos y otros diez en los pies" (p. 21). En contraposición a la riqueza del pensamiento de Jesús que cuenta sus argumentos, Durero nos muestra el gesto del rabino con las manos vacías como señal de su incapacidad para rebatir los argumentos de Jesús.

Retrato de una joven dama con rosario (Rubens, 1609-10)

De nuevo la luz dirige nuestra atención, esta vez al rostro y las manos de la joven dama que porta un rosario de cuarzo. A pesar de desconocer su identidad, tanto la vestimenta (tejido, adornos,…) como el rosario nos informan de la posición social y política de la retratada: noble y católica, seguidora de la orden de los dominicos (Área de Educación, Fundación Colección Thyssen-Bornemisza [AE-FCTB], 2014).

Figura 2. Retrato de una joven dama con rosario (Rubens, 1609-10). Museo Thyssen de Madrid. http://www.museothyssen.org/img/obras_descarga/1979.64.jpg

El rosario es un utensilio diseñado ex profeso para realizar ordenadamente los rezos. En el caso de la religión católica, "se conmemoran los quince misterios principales de la vida de Jesucristo y de la Virgen, recitando después de cada uno un padrenuestro, diez avemarías y un gloriapatri" (Rosario, s.f.). En otras religiones, el rosario cambia ligeramente su estructura para ajustarse a los rezos que correspondan.

Love, Love, Love. Homenaje a Gertrude Stein (Demuth, 1928)

Este retrato pertenece a la colección conocida como *poster portraits* que reúne una serie de retratos de escritores y artistas realizados por C. Demuth a principios del siglo XX, caracterizados por la ausencia de rasgos fisionómicos; en su lugar, Demuth emplea diferentes tipos de signos con los que describe la vida profesional del personaje que retrata (Alarcó, 2009). En este caso, la retratada es la escritora norteamericana

Gertrude Stein que, instalada en París en 1903, se convirtió en coleccionista y mecenas del nuevo arte que nacía en Europa (Piñero, 2004).

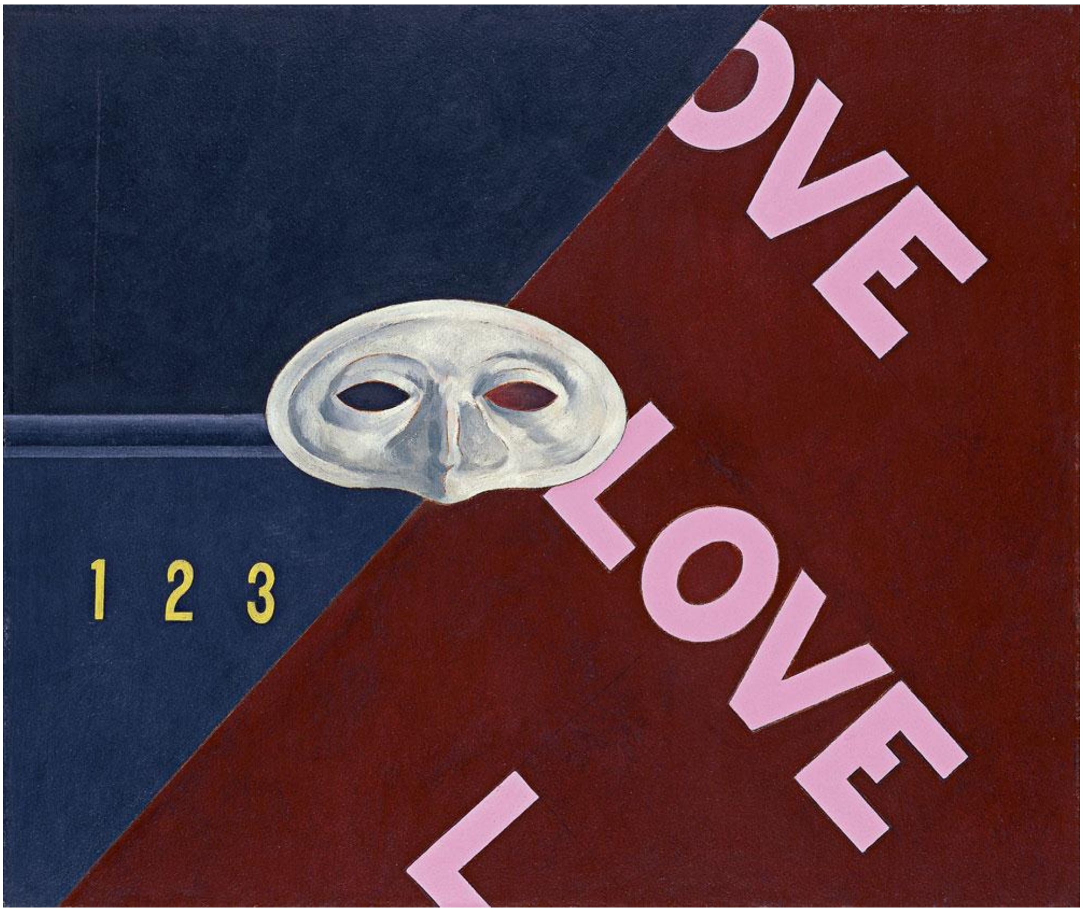


Figura 3. Love, Love, Love. Homenaje a Gertrude Stein (Demuth, 1928). Museo Thyssen de Madrid. (Courtesy Demuth Museum, Lancaster, Pennsylvania, USA)

En este óleo el número aparece explícitamente como protagonista indiscutible de la vida de la carismática Stein. La presencia del número 3 responde a la inclinación de Stein por este número (Alarcó, 2009), quién sabe si ocasionada por haber nacido el día 3 de febrero. La presencia del 3 también aparece implícita en la repetición tres veces, aunque incompleta, de la palabra LOVE.

CONTENIDO MATEMÁTICO DE LAS TRES OBRAS

El nexo común de las tres obras es su relación con el concepto de número. En la primera, la de Durero, se presenta la actividad de contar con los dedos de la mano, cuna de los sistemas de numeración; en la segunda, Rubens representa con el rosario una herramienta para contar sin utilizar las características anatómicas de nuestro cuerpo; finalmente Demuth, en un lenguaje enigmático, emplea las dos contextos del número, el ordinal y el cardinal.

Contar: Numerar o computar las cosas considerándolas como unidades homogéneas

Contar ha sido una actividad que ha llevado a cabo el hombre desde hace miles de años, antes incluso que escribir o utilizar herramientas (Boyer, 1994). Para ello es necesario emparejar los elementos de dos conjuntos, el que contiene los objetos del cual se va a extraer la cualidad numeral y otro auxiliar que se utiliza como contador (Cid, Godino y Batanero, 2002) para representar el cardinal del primer conjunto. Las partes del cuerpo, guijarros o marcas en un hueso o trozo de madera, han sido alguno de los objetos que ha utilizado el hombre desde la prehistoria para establecer esta relación biunívoca entre los dos conjuntos, el contado y el contador.

El emparejamiento de grupos de hasta 4 elementos se puede realizar sin necesidad de contar, pero a partir de 5 elementos o más, el hombre no es capaz de percibir el cardinal de un conjunto si no es contando. Este hecho ha dejado huella en los vocablos empleados por distintas culturas para designar a la cantidad de elementos de un conjunto (Ifrah, 2008).

Sistemas de numeración

Con el desarrollo de las civilizaciones, en el hombre nace la necesidad de contar un número de elementos mayor del que se puede encontrar en el conjunto contador. Esta limitación, junto con la de optimizar el esfuerzo para representar y memorizar los elementos del contador, deriva en el agrupamiento de unidades formando unidades de orden superior. Los signos empleados para las distintas unidades y las reglas que definen cómo combinar los signos para que representen cualquier cantidad forman un sistema de numeración, siendo su base el número de unidades que se han de agrupar para obtener la siguiente unidad superior (Cid, y otros, 2002).

El empleo de nuestras manos como conjunto contador nos proporciona una amplia variedad de bases para distintos sistemas de numeración. A pesar de la dominancia del sistema en base 10, en distintas culturas se ha empleado la base 5 (con los dedos de una sola mano), 12 (con las tres falanges de los dedos índice, corazón, anular y meñique, empleando el pulgar como puntero) o 20 (con los dedos de las manos y los pies). Especial atención requiere el sistema sexagesimal que, según el argumento antropomórfico que propone Ifrah (2008), es consecuencia del empleo de un sistema de numeración en base 60 por ser múltiplo de las bases auxiliares 5 y 12. El empleo del sistema sexagesimal ofrece ventajas respecto de otros sistemas de numeración como 10 o 20 por ser su base múltiplo de 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30, lo que permite realizar diez divisiones exactas (Boyer, 1994). Con nuestro sistema de numeración, solo hay dos posibles. Este hecho puede justificar la permanencia del sistema sexagesimal en la medida de los ángulos o del tiempo.

Número cardinal vs ordinal

La noción abstracta de número se materializó en el gesto antes que en el uso del lenguaje oral pero no se sabe con certeza si su origen tiene un fin práctico, en cuyo caso el número cardinal, el que expresa una cantidad, sería previo al ordinal, el que indica un orden. Los argumentos que defienden el origen ritual del número proponen que el nacimiento de la numeración surgió de la necesidad de intervenir en un orden determinado en los ritos ceremoniales. En ese caso, el número ordinal sería previo al cardinal (Boyer, 1994, p. 23).

El emparejamiento es necesario para el número cardinal mientras que en el número ordinal además del emparejamiento, subyace la idea de sucesión u orden (Ifrah, 2008).

LA EXPERIENCIA DEL AULA

La experiencia que se describe tuvo lugar este curso académico en las asignaturas Matemáticas y su Didáctica (itinerario adaptación grado primaria con mención) y Matemáticas y su Didáctica para educación infantil (itinerario adaptación grado infantil). Los alumnos de las dos asignaturas son maestros que no ejercen como tales. El objetivo de la experiencia fue mostrar con la práctica que el contenido matemático se puede encontrar en lugares insospechados y que la cotidianidad con la que aparece no es más que una prueba de su cercanía al resto de la actividad intelectual que realiza el hombre.

Se proyectaron los tres cuadros según su antigüedad (Durero, Rubens y Demuth) y se pidió a los alumnos una lluvia de ideas sobre qué manifestaciones matemáticas veían en los cuadros. Con el cuadro de Durero, el contenido geométrico es ineludible por la perspectiva y las dimensiones del cuadro, según comentarios de uno de los alumnos. Solo en el grupo de primaria una alumna fijó la atención en el gesto de las manos y nombró contar como parte de la matemática que veía en el cuadro.

Las manos de Jesús en el cuadro de Durero son un excelente recurso para vincular la matemática y el arte con otra disciplina más, las ciencias. En este "accidente anatómico", además de cinco dedos en cada mano (diez en total, base de nuestro sistema de numeración) encontramos en cuatro de ellos tres falanges. Siendo el pulgar el único que no posee esta característica, ya que solo posee dos, en una de las manos (la derecha) podemos emplearlo como puntero para facilitar la biyección entre el conjunto de elementos que se desea contar y las doce falanges, mientras que con los dedos de la otra mano se anotan el número de agrupamientos de doce elementos (Ifrah, 2008).

El rosario que porta la joven dama del cuadro de Rubens vuelve a trasladarnos a la primitiva actividad matemática de conteo, esta vez utilizando elementos externos al cuerpo humano. Las cuentas del rosario evocan los guijarros que el hombre primitivo utilizó para establecer la relación biunívoca entre los elementos de dos conjuntos que subyace en el concepto de número. Este comentario, sorprendió a los alumnos que en un principio no relacionaron el rosario con ningún contenido matemático.

En el cuadro de Demuth el número transciende a su uso cotidiano y adquiere un carácter esotérico relacionado con el mundo de los sentimientos y la subjetividad. Las distintas expresiones del número 3 en este óleo se observan en la secuencia 1 2 3, en la cifra 3 y en la repetición de la palabra LOVE tres veces. Así se funden en el mismo espacio el número cardinal y el número ordinal: 3 es el cardinal del conjunto formado por las palabras LOVE (completa o un trozo de ella) y el 3 aparece en el tercer puesto de la sucesión de números. A pesar de lo evidente de la representación del número en este cuadro, el sentido de su presencia se escapa a la percepción del observador que no conozca algo sobre la vida tanto del artista pintor como de la artista retratada.

A partir de estas consideraciones, el discurso derivó en el conjunto de los números naturales, enteros, racionales y para completar el de los reales, los irracionales. Y como no podía ser de otra forma, la geometría volvió a asomar sus orejas al hablar de los racionales y los irracionales.

En líneas generales, y sin pretender una lista cerrada, los tres cuadros del Thyssen se pueden emplear como recurso para…

…conocer las primeras manifestaciones de la matemática en la prehistoria y en las primeras civilizaciones. El descubrimiento de un hueso de cachorro de lobo con muescas organizadas en grupos de 5 que data de hace unos 30.000 años, evidencia la existencia de actividad matemática anterior a la civilización (Boyer, 1994) y realza la idea de que la matemática es una actividad intelectual natural, aunque no exclusiva, del ser humano.

…ahondar en el origen de los símbolos utilizados en distintas culturas para representar los números.

…familiarizarse con los sistemas de numeración que utilizan una base distinta de 10. Los dedos de las manos, como se indicó anteriormente, son la razón de nuestro sistema de numeración en base 10 y un recurso asequible para conocer otros sistemas de numeración aún vigentes.

Pero además del contenido matemático, son también una fuente inagotable de contenido de historia (antigua, moderna, de la ciencia, del arte…), y de otras disciplinas que pueden entrar en juego utilizando en el aula el trabajo por proyectos. Con ellos se crea la necesidad de documentarse, redactar informes y leer en otras lenguas, con lo que el contenido se amplía a la lengua y literatura, la lengua extranjera, y al desarrollo de competencias transversales como la búsqueda de información o el uso de herramientas digitales.

REFLEXIONES

Los formadores de maestros estamos en la obligación de llevar a las aulas prácticas que ilustren los buenos argumentos que en ocasiones solo se leen en los libros. Las características del aula de infantil y de primaria, aunque con matices, requieren de maestros competentes en trasmitir conocimientos globales vinculando las distintas disciplinas para enriquecer las experiencias del alumnado. La instrucción que se ha llevado a cabo cumple con el objetivo de mostrar a los futuros maestros cómo descubrir aspectos humanísticos de las matemáticas y cómo desarrollar una enseñanza que abarque las principales disciplinas del currículo.

En el caso del concepto matemático de número, resulta especialmente interesante descubrir las relaciones entre la anatomía humana y las bases de los diversos sistemas de numeración por la alusión implícita a la actividad matemática como actividad humana vinculada a la vida cotidiana, y permite vislumbrar sin interferencias el papel de la matemática como herramienta vinculada inexorablemente al desarrollo de la ciencia. El hecho de encontrar representada en el arte la manifestación de una actividad matemática enfatiza la cotidianidad de la misma.

El contenido matemático presentado está indudablemente vinculado a la historia del hombre, más concretamente con el origen de las primeras civilizaciones. Pero este es solo uno de los lazos que se pueden establecer con otras disciplinas que habitualmente se presentan ajenas a la matemática. La protagonista en este trabajo ha sido el arte que ha servido de vehículo para introducir el número y algunos aspectos relacionados con él: contar, sistemas de numeración y el número ordinal y cardinal.

Esta actividad se ha llevado a cabo con alumnos universitarios estudiantes del grado de Maestro, pero son muchas las adaptaciones que se pueden realizar para otros niveles educativos. En educación infantil la profesora M. Edo (Edo, s.f.) ha tenido experiencias muy ricas trabajando la geometría que, como sabemos, es el contenido que tradicionalmente da buena cuenta de la presencia de la matemática en el arte. Pero esta actividad va más allá de la geometría y de la proporcionalidad, también inherente en el arte, y ha encontrado un contenido que además da pie a introducir conceptos que pueden desarrollarse con mayor o menor complejidad según el nivel educativo: contar introduce los números naturales y tras estos, el desarrollo histórico de la matemática nos lleva a los racionales, los enteros,…; contar también nos lleva al uso de distintos sistemas de numeración y a la aritmética, y ésta a la teoría de números, concepto propio de la matemática discreta que se imparte en muchas aulas universitarias.

A partir de esta terna de cuadros, terminar hablando de los números inconmensurables, el Liber Abaci o simplemente de contar hasta cinco, depende solo del nivel de profundidad al que se quiera llegar. Eso sí, acompañado en todo momento por la historia, la estética, la lengua y la ciencia.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo recibido por las personas que integran el Área de Educación del Museo Thyssen de Madrid. Reciban un agradecimiento especial la directora del área, Ana Moreno, y Ana Andrés, Eva García y Salvador Martín. Gracias también al museo Thyssen de Madrid y al museo Demuth de Lancaster (USA) por permitir la reproducción de las obras. Gracias al profesor Luis Aurelio García Matamoro por sus comentarios.

Referencias

Alarcó, P. 2009. *Museo Thyssen-Boermisza. Pintura Moderna*. Madrid: Patronato de la Fundación Colección Thyssen-Bornemisza.

Área de educación, Fundación Colección Thyssen-Bornemisza. (2014, 23 de octubre). Obras Museo [Mensaje de correo electrónico].

Borobia, M. 2009. *Museo Thyssen-Boermisza. Pintura Antigua*. Madrid: Patronato de la Fundación Colección Thyssen-Bornemisza.

Boyer, C. B. (1994). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Cid, E., Godino, J. D., Batanero, C. (2002). Sistemas numéricos y su didáctica para Maestros. En *Matemáticas y su didáctica para Maestros*. Descargado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf

Edo, M. (s.f.). http://pagines.uab.cat/meque/

Ifrah. G. (2008). *Historia universal de las cifras: la inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo*. Madrid: Espasa Calpe.

Meavilla, V. (2006). *Paseo histórico-geométrico por un cuadro italiano del siglo XV*. Descargado de http://www.divulgamat.net/

Piñero, E. 2004. *"París era una Mujer": Gertrude Stein, las expatriadas y la eclosión de las artes*. Barcelona English Language and Literature Studies - BELLS *13*, 25-45. Descargado el 28 de octubre de http://www.publicacions.ub.es/revistes/bells13/PDF/articles_11.pdf

Rosario. (s.f.). En *Diccionario de la lengua española* (22ª edición). Descargado de http://lema.rae.es/drae/?val=rosario

Para hacer referencia al artículo:

Codes, M. (2015). Matemáticas en el Thyssen: algo más que geometría. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 315-322). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

LA DIFERENCIAL, UNA VUELTA AL CÁLCULO PRIMIGENIO

Claudio Collantes Mayor

Profesor de Matemáticas y Economía en Educación Secundaria

Resumen

Se promueve un nuevo enfoque de la enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral. Basado en los escritos de Euler, este documento replantear los conceptos diferenciales para lograr un entendimiento más profundo y a la vez más práctico de tales ideas. Pero tal cambio solo podrá lograrse, si los propios profesores de matemáticas, quienes son los encargados de transmitir estos conocimientos, quedan convencidos de la bondad del primitivo método de aprender a diferenciar. Mediante él se llega a las ideas sobre diferenciales sin utilizar el concepto de límite. El artículo defiende volver a estos inicios y a los autores que los crearon, en especial a Leonardo Euler; es la mejor manera de entender lo que realmente las ideas quieren transmitir. El formalismo quedaría relegado a una etapa posterior, cuando ya los conocimientos básicos se hubieran asentado, y sería materia de estudio para los especialistas teóricos de la materia.

Palabras clave: *diferencia, diferencial, variación, infinitésimo y Euler.*

LAS DIFERENCIAS FINITAS

Si la palabra diferencial recuerda y procede del término diferencia, es porque hay alguna razón para ello. Y la razón va a quedar evidente: las diferenciales nacieron de los resultados obtenidos en el cálculo de las diferencias de funciones y para que se hiciera más práctico el cálculo de dichas diferencias. Es decir, y esto parece lo lógico, las diferenciales provienen de las diferencias.

Analicemos, pues, en este apartado el concepto de DIFERENCIA y las ideas imprescindibles en el proceso de obtener el valor de una diferencia, para llegar a su expresión general. Una vez presentadas las ideas fundamentales, en el siguiente apartado trataremos sobre las diferenciales. Las diferenciales y su integración enlazan y se apoyan en las ideas a las que nos conducen las diferencias. Son estas, además, muy ilustrativas de los caminos que pueden recorrer las diferenciales; y por otra parte creemos, que son el mejor inicio para el aprendizaje, comprensión y aplicación de las diferenciales y todo lo que conllevan.

Sea, pues, una función real de variable real, $y = f(x)$. El valor de dicha función para un aumento, que llamaremos ω, en la variable independiente (esta se transforma en $x + \omega$), será $y = f(x + \omega)$. Definimos diferencia de dicha función entre ambos valores a: $f(x + \omega) - f(x)$. Un ejemplo sencillo de lo que decimos es la función $y = x^2$. Cuando sustituyamos x por $x + \omega$, la función se convertirá en $x^2 + 2\mathrm{x}\omega + \omega^2$. Por tanto, la diferencia obtenida en este caso será:

$$f(x + \omega) - f(x) = x^2 + 2\mathrm{x}\omega + \omega^2 - x^2 = 2\mathrm{x}\omega + \omega^2$$

Lógicamente y que quede dicho para todo el artículo, las funciones que utilizaremos van a ser funciones, analizadas desde un punto de vista teórico clásico, continuas y derivables en la mayoría de sus puntos. Funciones que podemos calificar, abandonando el rigor matemático, de <<normales>>, para todo aquel que se inicia en el camino de la comprensión del cálculo matemático o simplemente tiene que aplicarlo.

Si el concepto anterior de diferencia de una función en un punto lo hacemos extensivo a sucesivos aumentos (abusando del lenguaje, llamaremos aumento de x a cualquier variación sufrida por x, tanto si aumenta su valor, como si disminuye), iremos obteniendo una sucesión de valores para la función y en consecuencia una sucesión de diferencias. Tendríamos:

$$x \quad x+\omega \quad x+2\omega \quad x+3\omega \quad x+4\omega \quad x+5\omega$$

y los valores de la variable dependiente serían respectivamente:

$$y=f(x) \quad y^{I}=f(x+\omega) \quad y^{II}=f(x+2\omega) \quad y^{III}=f(x+3\omega) \quad y^{IV}=f(x+4\omega) \ldots$$

Las sucesivas diferencias vendrían dadas por las siguientes expresiones:

$$\Delta y=y^{I}-y \qquad \Delta\, y^{I}=y^{II}-y^{I} \quad \Delta\, y^{II}=y^{III}-y^{II} \quad \Delta\, y^{III}=y^{IV}-y^{III} \ldots$$

De igual forma, si en la serie de valores anteriores calculamos su diferencia, obtendremos las diferencias segundas, de forma que

$$\Delta^2 y=\Delta y^{I}-\Delta y \qquad \Delta^2 y^{I}=\Delta y^{II}-\Delta y^{I} \qquad \Delta^2 y^{II}=\Delta y^{III}-\Delta y^{II} \ldots$$

La generalización de este procedimiento es evidente, con lo cual tendremos la diferencia tercera, la cuarta... Habrá, pues, una sucesión de diferencias de distintos órdenes o grados.

Mediante este método podemos encontrar las diferencias de las funciones polinómicas, fraccionarias, irracionales, trigonométricas; diferencias de funciones exponenciales, logarítmicas, irracionales, etc. A modo de ejemplo ilustrativo, obtendríamos para la función $y=\ln(x)$ que su diferencia primera sería:

$$\Delta y=y^{I}-y=\ln(x+\omega)-\ln(x)=\ln(1+\frac{\omega}{x})=\frac{\omega}{x}-\frac{\omega^2}{2x^2}+\frac{\omega^3}{3x^3}-\frac{\omega^4}{4x^4}+\ldots$$

Lógicamente y como se está viendo, el gran hallazgo de las diferencias es que siempre llegamos a una expresión similar a la precedente, donde toda diferencias pueden escribirse como una suma de un número finito o infinito de términos de potencias de ω, esto es, de la diferencia planteada en la variable independiente *x*. En definitiva podemos escribir que para nuestras funciones

$$\Delta y=y^{I}-y=P\omega+Q\omega^2+R\omega^3+S\omega^4+T\omega^5+\ldots$$

P, Q, R, S, T... serán funciones dependientes del valor de la variable independiente *x*. Intuyo que fue el deseo de acortar esas sumas de indeterminados términos, lo que hizo dar con el concepto de diferencial y, que siempre, manejar un número infinito de sumandos tiene su problemática. El acortamiento, como luego veremos, se basa en un procedimiento lógico y generalizable, y es lo que constituye la esencia del cálculo diferencial.

Como es evidente, no hablamos ni de funciones analíticas ni desarrollos de Taylor-Maclaurin. El procedimiento desarrollado es justo el inverso: se utilizan los desarrollos en serie como paso previo. ¿Cómo llegó Euler a estos desarrollos? Pues simplemente utilizando la experimentación y calculando. Para hallar la suma de series infinitas, únicamente repite infinitas veces operaciones racionales. Esta forma de proceder presenta muchas restricciones, pero no entraremos en dichos problemas en este artículo.

Lagrange, otro de los matemáticos más importantes del siglo XVIII, se dio cuenta del valor de Δy y lo definió como "el diferencial principal del fundamento del cálculo".

CONCEPTO DE DIFERENCIAL

Por lo tanto, si admitimos que el anterior resultado de la suma de un número indeterminado de términos es generalizable a las funciones que manejamos, podemos simplificar nuestros cálculos transformando esa suma infinita de términos en una suma finita. En efecto, si consideramos que damos a ω un valor suficientemente pequeño, el sumando más importante en la expresión precedente es el valor del primer término. Por tanto

$$\Delta y = y^{I} - y \approx P\omega$$

Ahora bien, ¿por qué ha de convertirse la desigualdad precedente en una igualdad, cuando hemos suprimido un número indeterminado de términos? ¿En qué condiciones habría de seguirse verificando dicha igualdad?

La justificación de una igualdad enredó a los matemáticos en el camino de los infinitésimos. Euler intentó dar una explicación en su libro Principios del Cálculo diferencial siguiendo dichos conceptos y comparó inifinitésimos hablando de grados. Personalmente, después de traducir la obra mencionada, puedo decir que su justificación nos desliza por el camino de la verdad, aunque su argumentación, basada en dichos infinitésimos, me ha parecido insuficiente. De hecho los infinitésimos han ido perdiendo importancia hasta desaparecer de los currículos matemáticos. Sin embargo, y esto es lo sorprendente, las ideas y cálculos de Euler son correctos, al menos en lo que respecta a su libro "Instititutiones calculi differentialis". Siguiendo los pasos de este autor, vamos a examinar la diferencial del logaritmo neperiano. La expresión que habíamos obtenido era:

$$\Delta y = y^{I} - y = \ln(x+\omega) - \ln(x) = \ln(1+\frac{\omega}{x}) = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \ldots$$

Si abrimos una calculadora o un ordenador e introducimos una expresión como la precedente, con los términos que se quieran sumando y restando, podemos comprobar que si ω se hace suficientemente pequeña, entonces nuestra expresión se determina hallando únicamente el valor del primer término. Es decir que

$$\Delta y = y^{I} - y = \ln(x+\omega) - \ln(x) = \ln(1+\frac{\omega}{x}) = \frac{\omega}{x}$$

Esto se debe a que tomando ω suficientemente pequeña, la diferencia entre el primer término de la suma de los indeterminados términos y la suma de todos los términos es menor que el redondeo que realiza nuestro mejor ordenador. Dicho de otra forma, que si hacemos ω suficientemente pequeña, la aproximación $\Delta y = y^{I} - y \approx P\omega$ se convierte en igualdad:

$$dy = Pdx$$

Por supuesto, podríamos reinterpretar este argumento en términos de límites. Sí, pero no es necesario y, por otra parte, los límites nos llevan a un formalismo alejado del auténtico concepto de diferencial; justo el concepto y la idea que utilizan quienes aplican las diferenciales al resolver problemas prácticos. Los límites nos llevan a despreciar a la gran artífice de todo, la humilde ω, más conocida como dx. Que se llame a este término infinitésimo o no, es algo accesorio para nuestro problema.

La diferencial no tiene nada de misterioso, ni los infinitésimos son entes abstractos e inaprensibles para el entendimiento humano. La diferencial es una forma de manejar datos de la realidad cometiendo errores; pero errores conscientes y siempre menores que el nivel de tolerancia de nuestro sistema de medida.

DIFERENCIAL, DERIVADA Y LÍMITES DE UNA FUNCIÓN

Ahora ya, sabiendo cómo calculamos, no queda sino concretar nuestros acuerdos en el lenguaje matemáticos. Así, dada la función $y = f(x)$ llamaremos diferencial de dicha función a la expresión $dy = Pdx$. En el caso concreto del logaritmo neperiano tendremos la expresión habitual:

$$dy = \frac{dx}{x}$$

Para calcular la diferencial de una función cualquiera y según las pautas del apartado anterior, variamos x en una cantidad, que ahora ya llamaremos dx. A continuación calculamos la diferencia entre ambos valores, que según el resultado anterior de tendrá forma de suma finita o infinita. Eliminamos todos los términos de la suma excepto el primero, P (el de menor grado en dx), y definimos la diferencial mediante la siguiente expresión ya conocida vista

$$dy = Pdx$$

Puesto que P depende de x, ya que para cada x el número P obtenido es diferente, tenemos una nueva función. Además, para cada punto $(\mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x}))$ y dada una variación dx, obtenemos el punto correspondiente: $(\mathrm{x} + \mathrm{dx}, \mathrm{P}(\mathrm{x})\mathrm{dx})$. Lógicamente, si dx varía, también lo hará de forma proporcional dy. Lo que siempre se mantiene fijo para cada x es precisamente la cantidad denotada por P. Se verifica entonces que dy/dx=P, ya que P es independiente de la variación dada a x, esto es, de dx. Sin embargo, para cada aumento dx hay un valor concreto de dy, puesto que

$$dy = Pdx$$

Es decir, tenemos una línea recta de pendiente P.

Si la diferencial la escribiremos de la forma tradicional, utilizando en vez de $P(x)$, la notación $f'(x)$, obtenemos la expresión habitual: $dy = f'(x)dx$. No importa la notación, porque la clave de todo el proceso está en hallar $f'(x)$ para cada valor de la variable independiente. Por supuesto, llamamos derivada de una función en un punto al valor que toma el factor de proporcionalidad de la diferencial en ese punto; lo que hemos representado por $P(x)$ o por $f'(x)$. Queda definida de este modo también una nueva función: la función derivada. Ésta función viene dada por el valor en cada punto de la constante de proporcionalidad de la diferencial del punto. Así dada la diferencial de una función $dy = f'(x)dx$, la nueva función $y' = f'(x)$ se llama función derivada.

Una vez comprobada la validez de esta manera de entender el concepto de diferencial, hemos de recalcar otra idea fundamental, que subyace en toda el proceso de cálculo y que es muy útil también en la aplicación práctica: si $dy = f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx$ entonces también se cumple que $f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx$.

IMPLICACIONES EN LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE

La forma habitual en las últimas generaciones de matemáticos para calcular la diferencial ha sido determinar directamente el valor de $f'(x)$ mediante el concepto de límite. Para ello se ha procedido primeramente calculando la siguiente expresión

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Es decir, se halla la diferencia de la función en dos puntos cercanos (como hacíamos en el método anterior) y dividimos por el valor del incremento efectuado en *x*, llamado ahora *h*. De esta forma, al descomponer el numerador en suma de términos, al igual que antes, se rebaja un grado en *h* y todos los demás sumandos quedan multiplicados por potencias de *h*, con lo que al hallar el límite de la expresión cuando h tiende a cero, únicamente permanece el valor del factor que inicialmente multiplicaba a *h*. Dicho con otras palabras, el límite ha sido el artificio creado para justificar eliminar todos los términos menos el que estaba multiplicada por la primera potencia de *h*. Vamos, que ha sido la justificación para quedarnos con el primer término del desarrollo de Δy. Pero para un aprendizaje inicial no es necesario ser tan rigorista. Repito, entendidos así los límites, tienen sentido como justificación de la eliminación de un número indeterminado de términos. Euler, por ejemplo, construyó su edificio teórico prescindiendo del concepto explícito de límite. Así pues, lo que aportan los límites es una formalización para obtener una fundamentación clara de las ideas señaladas. Esta parte es precisamente la lineal de la función en la variación de *x*. Así que, nosotros, en nuestra clase, lo podemos hacer directamente, y sin excusas, sin ni siquiera usar límites, nos quedamos con lo que nos interese de nuestra función. El error cometido va a ser variable y dependerá de lo cerca que estemos del punto de referencia; pero nada más. Por tanto, ni hemos usado los límites para definir la diferencial, ni por lo que vemos los necesitamos para un acercamiento a las ideas básicas.

Por otra parte, intentar introducir en las aulas las diferenciales a través del límite de pendientes de rectas secantes hasta llegar a la pendiente de la recta tangente, no deja de ser la resolución de un problema práctico, hallar la recta tangente; pero no se puede convertir en el meollo del concepto. Hacerlo de otra forma es tergiversar las ideas y a los alumno. Todos hemos sido alumnos y es muy fácil que acabemos confundiendo lo particular con lo esencial, la causa con las consecuencias.

Insistamos en la idea expuesta anteriormente: tanto *dx* como *dy* son números reales. Pueden ser lo pequeños que precisemos, sobretodo *dx*; pero lo importante es que son números y que se relacionan a través de una regla de proporcionalidad. Por tanto, ambos valores forman una línea recta de pendiente $f'(x)$. Es decir:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Si varía el valor de *dx*, también varía (en el sentido que indique $f'(x)$) el valor de *dy*. La vieja idea de que *dx* es un mero signo sin ningún valor, debe ser desechada por falsa. El número real *dx* puede utilizarse para operar con él a todos los efectos. Cuando decimos que *dx* es un infinitésimo, únicamente queremos decir que es un número de un valor tan cercano a cero como se precise en el sistema de redondeo, que implícita o explícitamente estamos manejando. Por tanto, todos los *dx* son números reales y obedecen a las leyes que tales números soportan. Queda a nuestro albedrío elegir los valores convenientes para *dx* y esto de forma independiente de *x*.

Todo este proceso está más cerca de la intuición y lo evidente, que operando con límites; en especial cuando manejamos funciones implícitas, de las que hay que extraer la diferencial. Esta no sino una forma abreviada y simple de calcular la diferencia de la función en dos puntos próximos; porque la diferencial es la forma de calcular una diferencia, esto es, hacer una resta. Visto así, nuestros alumnos tienen que entenderlo y saberlo aplicar.

CONCLUSIÓN

Expuestas las ideas elementales del cálculo diferencial, entendemos que el mejor camino de iniciación debe empezar como lo comenzamos en este artículo, las diferencias. El tema de las diferencias ha desaparecido de nuestros currículos de matemáticas en bachillerato y seguramente de los de la mayoría que se imparten en las Universidades. Pensamos que se debería volver a explicarlas y que el alumno calcule diferencias de funciones.

El siguiente paso en el aprendizaje inicial sería llegar a diferenciales, una vez que se han adquirido las ideas esenciales de las diferencias de funciones. Un progreso en este sentido nos llevará a formalización y extracción de reglas generales para el cálculo de la diferencial. Este sería el tercer paso del camino y al que se llegaría en un proceso natural y entendible. De esta forma los alumnos tendrían una idea mental de la diferencial, que podrían utilizar en los cálculos. La diferencial, al despojarse de los límites, se conceptualiza como una operación de cálculo.

Por último, deseo hacer un pequeño recordatorio para el gran Euler. Lamentablemente, muchos de sus trabajos están en latín y se nos resiste un acceso de primera mano. Una lástima, porque entonces no va a sernos fácil seguir el consejo atribuido a Pierre-Simon Laplace: "*Leed a Euler, leed a Euler; es el maestro de todos nosotros".*

Referencias

Euler, L. (1765). Instititutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi. *Traducción al español de Claudio Collantes Mayor, 2014*.

Boyer, C.B. (1969). La historia del cálculo y su desarrollo conceptual. *Alianza Editorial*.

Cauchy, A.L.(1821). Cours d'Analyse. *Sociedad Andaluza de Educación Matemática <<Thales>>*.

Kline M., (1994). El pensamiento matemático, de la Antigüedad a nuestros días, I. *Alianza Editorial*.

Munoz-Lecanda M.C. y Roman-Roy N. Origen y desarrollo histórico del cálculo diferencial. *Ediciones UPC 1999*.

Para hacer referencia al artículo:

Collantes Mayor, C. (2015). La diferencial, una vuelta al cálculo primigenio. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas". (pp. 323-328). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

LA INNOVACIÓN EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS: UNA REFLEXIÓN DESDE LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE SECUNDARIA Y BACHILLERATO

Laura Delgado Martín

Universidad de Salamanca

Resumen

La Innovación en la clase de matemáticas se trata en el Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria desde el punto de vista de la reflexión sobre la práctica educativa. Se analiza el conocimiento del profesor necesario y cómo se conjugan sus diferentes elementos para realizar una buena práctica docente y su puesta al servicio del aprendizaje significativo de los alumnos, junto con todos los recursos y estrategias precisos. Después del análisis conjunto de prácticas de docentes innovadoras, los alumnos plantean sus propios proyectos, en los que la innovación en la clase de matemáticas se articula desde la motivación y la interdisciplinariedad con otras asignaturas y en los que las TIC aparecen como un recurso más integrado en el planteamiento educativo.

Palabras clave: *matemáticas, secundaria, innovación educativa, formación de profesores, conocimiento profesional*

INTRODUCCIÓN

El Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato se imparte en la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca desde el curso 2009-2010. En el bloque de asignaturas obligatorias por especialidad, se incluye una sobre Innovación Docente en este caso, en la Especialidad de Matemáticas.

La planificación de esta asignatura conduce al planteamiento de preguntas como: ¿qué es la innovación docente?, ¿realmente es un sinónimo de innovación educativa? ¿El planeamiento y desarrollo de actividades innovadoras deben circunscribirse a una asignatura, al trabajo de un profesor?, ¿o resultan más productivas desde el punto de vista educativo cuando se plantean de forma interdisciplinar, e incluso cuando involucran a todo un centro?

Son muchas las formas de responder a estas preguntas, no creemos conocer la respuesta exacta, la válida en cualquier circunstancia y lugar ya que, si algo sabemos los profesionales del mundo de la educación es que no existen verdades absolutas que valgan en cualquier curso, centro, aula o asignatura, aprendemos con la experiencia propia y de la experiencia de otros.

En esta comunicación planteamos una reflexión a partir de lo experimentado como docentes en una asignatura del Máster de Secundaria, específicamente diseñada para la Innovación.

Los alumnos que llegan a este Máster para ser profesores de matemáticas en secundaria, tienen una formación inicial diversa (matemáticos, físicos, ingenieros en diferentes especialidades, arquitectos, economistas,….), y sus motivos para cursar este Máster también son diversos. Muchos de ellos acuciados por la necesidad de trabajar y la posibilidad de presentarse a unas oposiciones que les permita hacerlo, o de conseguir un contrato en un colegio concertado. Algunos tienen vocación docente, se han enfrentado a clases particulares, no les desagrada enseñar, pero otros, no tienen ningún tipo de actitud positiva hacia el trabajo de profesor, lo que nos dificulta mucho la tarea.

Todos creen tener claro en qué consiste el trabajo de profesor de matemáticas, sin embargo sus creencias personales, fundamentadas en su formación académica, las diferentes maneras en que han usado las matemáticas en sus largos años como alumnos, y algunos de ellos como profesionales en otro tipo de ámbitos laborales, condicionan mucho su perspectiva.

Algunos, han demostrado un gran escepticismo frente a la asignatura de Innovación, hacia las metodologías, recursos y modelos educativos innovadores que se les presentan. Este escepticismo se ve refrendado en el Practicum del máster. En la mayor parte de los casos, se encuentran un modelo de enseñanza de hace 20 ó 30 años, y aquellos alumnos que intentan cambiar mínimamente y por un breve espacio de tiempo la dinámica de la clase usando algún recurso manejado en el Máster, perciben un cierto rechazo. No podemos generalizar, pero la realidad y la experiencia corroboran este hecho.

El objetivo de esta comunicación es plantear una reflexión conjunta sobre la importancia de la Innovación, sobre la necesidad de la misma, sobre su cabida en el actual modelo de enseñanza de las matemáticas y sobre el tipo de conocimientos matemáticos que consideramos importantes en el mundo actual para nuestros alumnos de siglo XXI. ¿Pasa la innovación exclusivamente por el uso de TIC? Nuestra respuesta a esta pregunta es no, pero es obvio que el uso de las mismas por parte de profesores y alumnos ha modificado sustancialmente los contenidos y procedimientos que hasta hace pocos años se consideraban imprescindibles.

¿QUÉ ES INNOVAR EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA?

Tal y como ahora está establecido en el curriculum oficial, nuestro principal objetivo como docentes es que nuestros alumnos adquieran competencias matemáticas. Si esto es lo que debemos conseguir, debemos hacerlo del modo más efectivo posible.

Cuando nuestra propuesta docente tiene una perspectiva propedéutica y debemos formar a futuros profesores, como ocurre en los Grados de Maestro y en el Máster de Educación Secundaria, la reflexión que debemos plantear es doble, ya que va mucho más a allá de nuestras aulas, las decisiones que tomemos, la planificación de nuestra enseñanza, nuestras propias creencias respecto a la enseñanza de las matemáticas, pueden y van tener una trascendencia mucho mayor que la que puede plantearse en un aula dónde se enseñen matemáticas a futuros ingenieros, físicos, matemáticos, arquitectos… Vamos a "alimentar" ese círculo de la docencia, vamos a enseñar matemáticas a futuros docentes que a su vez entrarán en aulas a enseñar matemáticas. Nuestra reflexión, por tanto, debe llegar a ese momento.

Cuando a los futuros docentes se les habla de competencias, suele ser en las asignaturas genéricas en su formación como profesores. Nosotros en las asignaturas de las especialidades debemos centrarnos en aspectos concretos y así, si hablamos de competencias matemáticas a desarrollar, tenemos que tener en cuenta aspectos muy diferentes (Planas, 2009): debemos conseguir que nuestros alumnos piensen y razonen matemáticamente, sepan argumentar, plantear y resolver problemas, (saber plantear problemas es muy útil para el trabajo de un futuro docente); sepan utilizar herramientas e instrumentos adecuados a cada tarea, de diferente naturaleza (software informático, recursos manipulativos, elegir textos educativos…); deben saber interpretar información y representarla del modo más adecuado y deben saber modelizar y comunicar sus resultados, expresar sus razonamientos, explicitar el camino a seguir para resolver un problema.

Y es precisamente a este punto donde debemos llegar: a los problemas en matemáticas. Parece ampliamente consensuado que el trabajo en el aula de matemáticas debe centrarse en resolver problemas. Si nuestros alumnos van a ser simples ejecutores de lo que un libro de texto les dicta, todas estas valoraciones dejan de tener sentido. Pero, si miramos la formación de profesores como la formación de auténticos profesionales de la docencia, una de las habilidades que se deben desarrollar, es saber qué problemas son los más adecuados para que sus alumnos adquieran las competencias deseadas.

Usando el concepto de buena práctica educativa tal y como aparece en el libro de Nuria Planas (2009), una buena práctica educativa es aquella que el profesor consigue un aprendizaje efectivo por parte de sus alumnos, y aludiendo al concepto anterior, entendemos que éste es aquel en el que aumentan sus competencias matemáticas.

En el mundo del siglo XXI, con nuestros alumnos conectados permanentemente a Internet, mediante tecnología cada vez más accesible, donde el conocimiento se entiende de forma dinámica, lo que se debe desarrollar en las aulas es la capacidad de razonar, de desarrollar el pensamiento crítico, de optimizar recursos, de establecer conexiones entre diferentes conceptos, debemos cambiar el planteamiento de las clases de matemáticas como una mera exposición de conceptos, procedimientos, realización de ejercicios y ejemplos, algunas veces problemas, que nuestros alumnos deben resolver. En los centros educativos, en nuestros planteamientos docentes, no podemos dejar de lado las nuevas tecnologías, ya que nuestros alumnos son nativos digitales del siglo XXI, los recursos, metodologías e innovaciones tienen que incluir los nuevos avances tecnológicos (De Pablos *et al.* 2010), aunque éstos en sí mismos no sean la base de la innovación, en todo caso, un medio para ella.

No decimos que debemos dejar de hacer ejercicios, es obvio que en matemáticas, algunas habilidades se desarrollan con la práctica, se aprenden ejercitándolas una y otra vez hasta coger la soltura suficiente. Sólo decimos, que no debe quedar aquí.

Es obvio que el papel del profesor como único transmisor de conocimiento ya no tiene sentido en nuestro sistema educativo. Un profesor se ha convertido en un mediador en el proceso, en un catalizador de situaciones de enseñanza-aprendizaje, en un orientador de la dirección a tomar.

La anterior definición de buena práctica, manifiesta una evidencia básica, cuando nos planteamos "problemas reales" en matemáticas: es fundamental, abrir las puertas de las clases de matemáticas a la realidad, para transferir el aprendizaje de las matemáticas formales de aula, a las matemáticas reales, que resuelven cuestiones concretas, que dan soluciones a preguntas, que modelizan e intentan predecir un resultado. Los resultados de las investigaciones en didáctica de la matemática, así como las recomendaciones de la legislación vigente, sugieren que, para que se produzca aprendizaje en matemáticas, los alumnos deben establecer conexiones no sólo entre los diferentes contenidos de matemáticas, sino también con contenidos relativos a otras áreas de conocimiento y con la vida cotidiana (González *et al*., 2011)

Esto se puede plantear de muchas formas. En el planteamiento de problemas en los que los elementos se toman de la realidad, y por tanto haremos simulaciones en condiciones ideales, o en utilizar la realidad como punto de partida para desarrollar nuestra actividad matemática en el aula.

Evidentemente la elección de uno u otro camino va a depender muchas veces del nivel educativo en el que nos encontremos. La complejidad matemática, los conceptos más avanzados que se pueden dar en Bachillerato, permiten plantearnos la segunda opción como una vía posible.

En el momento en el que conectamos la realidad con nuestras clases de matemáticas, aparece un hecho de forma casi natural: la interdisciplinariedad. Tanto si la metodología usada es mediante proyectos, como en el aprendizaje basado en problemas, es muy complicado no utilizar otras áreas para redactar, construir, crear de forma convincente nuestros problemas reales de matemáticas.

Por tanto, una buena práctica educativa, requiere varias cosas, pero hay dos pilares fundamentales: uno, la contextualización en la realidad para hacer significativa la experiencia de aprendizaje, en la que todos los elementos participantes se implican y contribuyen a ella, y dos, la interdisciplinariedad, apoyándose en otras materias (Goñi, 2011c).

Volviendo a la pregunta del epígrafe, ¿qué es innovar en el aula de matemáticas? Podemos pensar que es romper con lo establecido, introducir algo nuevo, probar con cambios metodológicos, estratégicos, recursos, planificaciones docentes distintas… cualquier aspecto que produzca un cambio a mejor en el aprendizaje de los alumnos.

Muchas veces no debe ser algo completamente nuevo, algo que no se haya hecho nunca, en realidad “la novedad puede surgir de resignificar algo anterior y conocido” (Goñi, 2011c, p. 60).

Un docente debe saber si se está produciendo aprendizaje o no en su aula, si los alumnos comprenden lo que se les expone, si entienden lo que se pretende que consigan. Si no es así, debemos introducir un cambio para reconducir la situación. La elección de qué cambio introducimos y de cómo se hace es elección del profesional de la educación. Para ello, es fundamental el trabajo con otros profesionales, y el conocimiento de otros planteamientos docentes.

INNOVACIÓN DOCENTE VERSUS INNOVACIÓN EDUCATIVA

Cuando comenzamos la reflexión acerca de lo que es innovar, hay que partir de la diferenciación, o no, entre estos dos conceptos.

Si pensamos exclusivamente desde el punto de vista del docente, en los modos distintitos en los que puede planificar su enseñanza independientemente de otras materias, centrándose exclusivamente en su aula y sus procedimientos de clase, evidentemente estamos hablando de innovación docente, circunscrita a un caso concreto y particular. Quizá sea lo más extendido, ya que las estructuras organizativas no favorecen la implicación de muchos otros agentes en nuestro sistema educativo.

En el momento en el que planteamos la innovación de forma estructural, implicando otras áreas de conocimiento de forma activa, no sólo recurriendo a contenidos de las mismas a tratar colateralmente en el diseño de actividades, sino que también implica a todo un centro, a varias asignaturas a un proyecto conjunto, podríamos hablar de innovación educativa ya que trasciende a la clase de matemáticas, se convierte en un elemento impulsor de todo el proceso de enseñanza y aprendizaje que se desarrolla en un centro.

Experiencias de este último tipo podrían ser los Programas de Innovación Educativa en los que participan algunos centros como puede ser el IES García Bernalt de Salamanca (http://iesgarciabernalt.centros.educa.jcyl.es/sitio/#), experiencias que nuestros alumnos conocen ya que este centro acoge todos los años a varios de ellos en sus prácticas.

FORMACIÓN DE PROFESORES: EL CONOCIMIENTO DE UN PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Como hemos mencionado anteriormente, los alumnos del Máster que cursan la especialidad de matemáticas, tienen orígenes académicos muy diversos. En el Máster, el trabajo no se centra en el contenido puramente matemático, teniendo en cuenta los perfiles de estos alumnos y su formación en matemáticas, la parte de conocimiento matemático se da por sabida y así el desarrollo de las clases se centra en la unión de este contenido matemático con el conocimiento pedagógico necesario para desarrollar la docencia.

Inicialmente, los futuros docentes conectan la manera en la que han aprendido contenidos con la forma en que van a enseñarlos, esto se traduce en un proceso de “reconceptualización” (Goñi, 2011a) por nuestra parte, para que estos conceptos puedan ser llevados adecuadamente al aula.

Basándonos en el trabajo de Shulman (1986), el conocimiento que un profesor de cualquier área, se puede estructurar en tres tipos: el conocimiento de la disciplina que imparte (Subject Matter Knowledge, SMK), el conocimiento pedagógico del contenido (Pedagogical Content Knowledge, PCK) y el conocimiento del curriculum.

En el caso de un profesor de matemáticas, el conocimiento de la materia, tanto desde el punto de vista puramente matemático, como del contenido pedagógico, influye en las acciones y elecciones que éste puede realizar en el aula (Rowland *et al.*, 2005). Utilizando el modelo de Rowland “the Knowledge Quartet” para determinar el conocimiento del profesor y su influencia en la práctica, vamos que centrarnos en sus cuatro dimensiones: fundamentación, transformación, conexión y contingencia. Las cuatro relativas a cómo el conocimiento puramente matemático y el conocimiento pedagógico se "mezclan", influyen y condicionan la práctica matemática en el aula.

La primera de ellas, "fundamentación", está basada en la base teórica de los futuros profesores, recibida a lo largo de toda su formación académica. En esta formación matemática fundamental, es dónde están las raíces de sus creencias, en lo que ellos consideran que es básico enseñar en matemáticas, y en cómo debe realizarse esta enseñanza. Todos ellos han sido alumnos durante mucho tiempo, y la inmensa mayoría no ha dejado de serlo en el momento en el que comienzan a cursar el Máster, esta formación recibida durante tanto tiempo, es evidente y "pesa" a la hora de plantear alternativas de enseñanza que pueden ser mejor o peor aceptadas.

La mayor parte de nuestros alumnos, desarrollan hábitos iniciales de enseñanza por imitación de lo que han visto durante años. Por tanto, uno de los objetivos de la asignatura de Innovación Docente es precisamente la ruptura con esas ideas preconcebidas, la presentación de innovaciones, cambios y modificaciones más o menos básicos en la enseñanza que les lleven a plantearse dudas sobre sus propias creencias, incluyendo dudas sobre lo que se enseña, y cómo se enseña.

Esto, plantea el desarrollo del pensamiento crítico, en el que valora hasta el curriculum oficial, lo que se supone que se debe dar porque unas instituciones educativas así lo han decidido y el cómo se debe desarrollar esa enseñanza, hasta la importancia de ciertos contenidos en detrimento de otros en el curriculum (en este momento muchos exponen la ya conocida carencia de conocimientos en el ámbito de la estadística por ser el bloque temático que normalmente queda al final del libro de texto, y la importancia que durante su formación académica se dio a bloques como el análisis o el álgebra, importancia que se traduce en el tiempo dedicado a su enseñanza).

La siguiente categoría, hace referencia a la "transformación" del conocimiento, y es realmente el momento en el que nuestros futuros profesores tienen que reflexionar en cómo planificar la enseñanza y cómo llevar a cabo el proceso. Esta reflexión implica pensar en la estructura de la clase, en cómo presentar un contenido de forma motivadora, en conectarlo con conocimientos previos y futuros (luego es obvia la necesidad del conocimiento del curriculum previo y posterior de la etapa educativa en cuestión), qué ejemplos se deben llevar a clase, cómo se pueden realizar demostraciones, qué recurso se puede utilizar…

Evidentemente, todo parte de una idea clara: una cosa es saber matemáticas uno mismo (aspecto que no entramos a analizar en nuestros alumnos) y otra, muy diferente, es intentar transmitir el conocimiento matemático al grupo de alumnos que tengan en sus aulas.

En el marco teórico, se hace referencia a una tercera categoría que ya ha aparecido en la anterior: la "conexión". En ella se unen las elecciones y decisiones tomadas anteriormente, de forma que la planificación del profesor sea coherente y se desarrolle de este modo a lo largo de un tema o una clase. En este punto, la innovación que decida un docente introducir en su clase, tiene sentido siempre y cuando está cohesión se mantenga. No puede ser un criterio aleatorio porque un recurso parezca novedoso, porque es un nuevo libro que se ha recomendado, porque es un programa de ordenador, un recurso on-line… No tiene validez si no da consistencia, si no conecta con el planteamiento docente previo, todas las elecciones que toma un profesor en el aula siempre están basadas en el fundamento básico de su conocimiento (Rowland, 2013).

El cuarto miembro del cuarteto se llama "contingencia" y hace referencia a lo complicada que resulta la tarea docente, para la que no hay "recetas mágicas" que nos digan qué debemos hacer en cada momento y cómo debemos hacerlo. Esta suele ser el planteamiento básico de nuestros alumnos en el Máster y una de sus demandas más repetidas: "yo quiero que me digan qué tengo que hacer y cuándo", como una receta de comportamiento y actuación en el aula.

Esta última categoría se refiere a las situaciones que suceden en clase, y que son imposibles de prever. Un profesor puede planificar sus clases, sus acciones e intenciones, pero lo que casi nunca puede anticipar es la respuesta de sus alumnos. Sin embargo, lo que sí puede aprender un profesor es a ponerse en el lugar del alumno. Un profesor con el suficiente conocimiento de sus alumnos y de su clase debería de saber cómo abordar un problema, poner un ejemplo, plantear una analogía… que convenga más o menos a cada uno. Asimismo, si aceptamos que en nuestra clase el alumno es el protagonista de su aprendizaje, y por tanto debe ser el responsable de la construcción de su conocimiento, el papel de un profesor no puede ser el de mero transvase de conocimiento. Cualquier duda, sugerencia, idea planteada, es indicio de cómo está construyendo su aprendizaje, qué errores está cometiendo el alumno, o a veces el profesor, en el planteamiento y desarrollo que está realizando y que no le está ayudando.

Normalmente, cuando un profesor lleva muy planificada su actividad docente, tiene dificultades para encajar cualquier desvío sobre la misma a partir de las preguntas de sus alumnos, tiene la sensación de pérdida de control de la situación, sin embargo, aprender que esto es un punto enriquecedor, es parte del proceso de aprendizaje del profesor.

Profesores reflexivos en el aula de matemáticas

Utilizando el anterior marco teórico, podemos pensar que realmente, el principal trabajo que se debe desarrollar en las clases del máster es un trabajo de reflexión de nuestros futuros profesores acerca de la práctica docente.

En la formación de profesores, se ha pasado de un planteamiento individual, en el que el grupo pasaba a un segundo plano, a considerar la importancia tanto para profesores como para alumnos y futuros docentes, el aprendizaje colaborativo y la creación conjunta de conocimiento (Kortaghen, 2010). Para realizar este tipo de trabajo conjunto es esencial una reflexión acerca de la práctica educativa, tanto propia, como la que se observa en los demás. Esto es lo que en este mismo artículo Kortaghen llama el “enfoque realista”, en el que se integran teoría y práctica basándose en experiencias docentes directas de los futuros profesores y de sus propias características personales. Así, si cuando hablamos de los alumnos de secundaria pretendemos que construyan su propio conocimiento, que tengan criterio propio, que sepan elegir entre diferentes opciones para resolver un problema, conectar conocimientos nuevos con otros ya aprendidos…. Si este es el planteamiento para los alumnos, también deben ser los principios en los que se base la formación de los futuros profesores.

De este modo, la reflexión sobre la práctica docente, propia y ajena, y el aprendizaje conjunto sobre experiencias docentes se convierten en los pilares básicos de la asignatura de innovación.

LA ASIGNATURA DE INNOVACIÓN EN EL MASTER DE SECUNDARIA

Los alumnos realizan prácticas en centros educativos, pero muchas veces, condicionadas por cuestiones como el calendario, la situación de las vacaciones de Semana Santa, o la organización por cuatrimestres en la Universidad, aparece una separación entre teoría y práctica que no es deseable. Lo habitual, es que nuestros alumnos reciben una formación teórica puramente pedagógica en la primera parte del Máster, para luego recibir la formación específica centrada en los el conocimiento pedagógico y en el conocimiento curricular, y luego se van a las prácticas. Esto, se traduce, al menos en lo que hemos observado por sus propios comentarios, en una cierta desconexión entre teoría y práctica, en lo que se supone que se debe hacer, en metodologías, recursos o innovaciones posibles y lo que luego pueden ver en sus prácticas reales.

La reflexión deseable en un profesor de matemáticas de Secundaria debería de ser antes de la acción, pero también en la misma y sobre la misma (Flores, 2007), luego en la formación de profesores, la teoría y la práctica, idealmente, no deberían estar desvinculadas.

Centrándonos en lo que sucede en la asignatura de Innovación, se comienza hablando de las buenas prácticas docentes, de la importancia del aprendizaje efectivo por parte de los alumnos, y de la obligación como profesores que tendrán (tenemos) de que sea así para lo cual nuestro papel se traduce en mediadores del proceso.

El cómo conseguir que esto se produzca, es la clave del éxito educativo real.

Si seguimos hablando de la escuela del siglo XXI, en la que nuestros alumnos tienen a su disposición todo el conocimiento a "golpe de clic", lo que debemos es basar nuestra enseñanza en la significatividad de los aprendizajes que realicen. Esto es, un alumno valorará como útil, importante y digno de ser aprendido, aquel conocimiento que le permita entender mejor el mundo que le rodea, que le dé respuestas y que le permita integrar este conocimiento con otros aspectos que también despierten su interés.

Algo fundamental es la motivación inicial ante el aprendizaje. Todos estamos de acuerdo en que el aprendizaje de cierto contenido y procedimientos matemáticos resultan arduos y laboriosos, sin embargo si el alumno se encuentra motivado para hacerlo, el trabajo que debemos desarrollar como docentes será mucho más sencillo y eficaz.

La reflexión por tanto, empieza en la propia labor docente, pero también en la labor de los otros. Parte del trabajo en esta asignatura se centra en analizar y reflexionar sobre prácticas educativas más o menos innovadoras (sobre esto se despiertan discrepancias de forma muy rápida) en las que se utilizan recursos diferentes para abordar problemas matemáticos.

Las prácticas analizadas son muy dispares, pero todo lo que se les presenta es real, esto es, se trata de experiencias docentes de diferentes niveles, cursos y entornos educativos, en las que las matemáticas ocupan un papel primordial, la innovación se centra en esta asignatura, pero también, en muchas de ellas, se implican otras materias, incluso otros cursos. Desde el uso de TIC en el aula de forma total y desbancando los utensilios tradicionales como cuadernos, bolígrafos y libro de texto, pasando por la Literatura como recurso didáctico, el cine, las series de televisión, la papiroflexia, la Historia, el medio ambiente, la conservación de la naturaleza, los deportes, las facturas domésticas, la prensa, el descubrimiento de las matemáticas en el entorno más inmediato, los recursos interactivos, los blogs educativos, las aulas virtuales, las webquest,….

Todos estos temas son vehículos que nos permiten analizar prácticas educativas diferentes, en las que se usan recursos no tradicionales, en las que se motiva a los alumnos y en las que se conectan las matemáticas con otras disciplinas.

A partir de las lecturas planteadas, de las búsquedas que ellos mismos realizan para encontrar "algo más" relacionado con sus propias inquietudes y creencias en las que se van a basar, comienza la reflexión como profesores.

Esta reflexión es siempre conjunta y permite analizar, aunque no tan profundamente como quisiéramos, el tipo de bagaje con el que llegan estos alumnos a la enseñanza. En éste, por supuesto, también condiciona el tipo de persona que sea cada uno, las creencias a veces muy arraigadas sobre el conocimiento "importante, imprescindible, fundamental" en matemáticas, sobre la idea que tienen ellos de lo que debe ser un profesor de matemáticas, una clase de matemáticas, y sobre las libertades que pueden, deben o pudieran permitirse para "mezclar" su asignatura con otras del curriculum de sus alumnos, y los posibles beneficios o perjuicios que surgirían de ello.

Uno de los principales problemas a los que nos enfrentamos en esta asignatura es la idea de que, en realidad "todo está ya inventado", en palabras de ellos mismos. Nada es lo suficientemente original, lo suficientemente nuevo… De este modo el objetivo que debemos conseguir es hacerles ver que la idea de la asignatura no es convertirles en profesores completamente originales, a los que se les ocurran cosas novísimas y desconocidas para los demás, sino a saber reflexionar sobre qué tipo de enseñanza quieren realizar, sobre el tipo de profesores que quieren ser y lo útil que puede resultar integrar elementos diferentes en las clases de matemáticas, siempre y cuando se produzca un cambio en la situación que tenemos en esos momentos en el aula, que no nos resulta nada gratificante porque nuestros alumnos no están aprendiendo.

Para alumnos como los del Máster con una fuerte formación académica en el ámbito matemático y siendo ellos mismos, un "producto" exitoso del sistema educativo, resulta muy difícil enfrentarse con la realidad de una aula en la que algunos de los alumnos que tendrán no van a manifestar ni el más mínimo interés por la asignatura de matemáticas, no le ven la utilidad y están deseando dejarla de lado a la primera oportunidad que les brinde el sistema.

Tal y como aparece en el Informe Pisa 2012:

> El interés y la motivación de los estudiantes pueden ser considerados como el motor de su aprendizaje. De esta forma, los sistemas educativos deben asegurar que los alumnos no solo tengan los conocimientos necesarios en una determinada disciplina, sino que también dispongan del compromiso y dedicación para alcanzar las competencias requeridas. PISA distingue dos tipos de motivación de los alumnos en su aprendizaje de las matemáticas: la que se asocia al disfrute e interés en la materia en sí misma (motivación intrínseca, en adelante "interés"), y otra forma vinculada a un componente más práctico de la asignatura (motivación extrínseca o instrumental, "motivación" en este informe). Ambos tipos influyen tanto en el grado o continuidad del compromiso con el aprendizaje, como en la profundidad de la competencia alcanzada.
>
> Los alumnos se muestran a veces desinteresados por las matemáticas debido a la dificultad intrínseca de esta asignatura, pero dicho interés puede ser incrementado a través de las prácticas docentes o de otras sinergias positivas que se generan en el aula o en el seno de las familias [].(Informe PISA 2012, p. 150).

Luego, lo primero que deben darse cuenta nuestros futuros profesores, es que es precisamente a esos alumnos a los que deben dedicar más atención y sobre los que están puestos todos los esfuerzos. Un alumno interesado obtendrá resultados académicos óptimos por sí mismo, mientras que los que no lo están, son los que debemos convencer de la importancia y de la utilidad de las matemáticas, "la enseñanza es la labor docente, pero tiene en el aprendizaje su meta" (Goñi, 2011b, p. 7).

Propuestas innovadoras de los alumnos

A partir de las lecturas, de las búsquedas y también a partir de los conocimientos, de la reflexión y de las conexiones que establecen los alumnos de la asignatura de Innovación crean sus propios proyectos Innovadores.

En las tablas siguientes se presentan los trabajos de los alumnos, con sus títulos y un breve comentario para ilustrar sus contenidos. Al principio, en los tres primeros cursos, planteamos trabajos individuales. Sin embargo, atendiendo a alguna de las consideraciones que hemos expuesto en esta comunicación, como la importancia del trabajo colaborativo, la reflexión conjunta a partir de experiencias propias y ajenas, los dos últimos cursos académicos se plantearon grupos de trabajo, como se puede ver en las Tablas 4 y 5.

Tabla 6. Trabajos de Innovación de los 5 alumnos del curso 2009-10

Autores	Título y contenido del trabajo
7973431	Resolución de triángulos (Los alumnos realizaban mediciones directamente, y para ayudarse con la resolución de problemas usaban Geogebra y presentaban sus trabajos de forma conjunta a través del aula virtual creada a tal efecto en Moodle y presentaban a sus compañeros sus resultados con un Power Point)
70812783	Con las manos en la masa (la cocina como recurso de aprendizaje de problemas con ecuaciones de primer grado y orientado a 2º ESO)
07963502	(Medio+Matemáticas)=Motivación^2 (Utilizando todo tipo de recursos fundamentalmente noticias encontradas en prensa escrita, internet, adecuadas a cada tema elegido, para contextualizar y trabajar con matemáticas reales)
70865855	Algebra 3º ESO (utilización de una webquest para trabajar con polinomios y operaciones)
X3963083	El Número 2 (aproximación intuitiva a los sistemas de numeración, designado para cualquier curso de secundaria y bachillerato, las actividades no necesitaban ningún recurso especial)

Tabla 2. Trabajos de Innovación de los 9 alumnos del curso 2010-11

Autores	Título y contenido del trabajo
78631106V	La estadística y Cristiano Ronaldo (Utilización de información real encontrada en Internet para resolver problemas de estadística en 2º ESO. Uso de hoja de cálculo Excel y de una webquest)
76131852N	Matemáticas en la Fórmula 1 (Contenidos de números, funciones, estadística y probabilidad en 3º ESO. La información se saca de internet actualizada, la resolución de problemas es tradicional)
32688860H	Diseño de una Webquest para el estudio de sucesiones y progresiones (uso de recursos históricos)
71032312D	Elaboración de un blog y un foro (enriqueciendolasmates.blogspot.com) (Números y resolución de problemas, 4º ESO)
70981687F	Blog matemático
70935339G	Aprendemos con la Plaza Mayor de Salamanca (1º ESO, contenidos de Geometría a partir de un paseo matemático y actividades contextualizadas en este monumento)
70809683C	Geometría y Arquitectura (dirigido a 1º y 2º de bachillerato utilizando como recurso básico tres edificios conocidos de arquitectura moderna)
70884841Z	Matemáticas en la prensa (la prensa escrita como recurso, planteado para la ESO)
70811966A	La geometría en los monumentos de tu ciudad (uso de una webquest

Tabla 3. Trabajos de Innovación de los 12 alumnos del curso 2011-12

Autores	Título y contenido del trabajo
11971066ª	Las matemáticas en la cocina (1º ESO contenidos interdisciplinares con las asignaturas de Educación Física y CC. Naturales, actividades de cocina, compra de alimentos y cálculos sobre energía)
07989641Q	El juego de las funciones (Recursos Geogebra, Pizarra Digital, Google mapas, para 3º ESO. ES un tablero interactivo con 50 casillas en cada una de ellas hay que hacer una actividad relacionada con los contenidos de funciones)
71434368W	Matemáticas en el parque de atracciones (1º Bachillerato, contenidos de Análisis , salida con el grupo clase, actividades en el aula de informática seleccionadas entre recursos de acceso abierto, actividades de clase, interdisciplinariedad con el área de Física)
0390652X	Juegos algebraicos (1º y 2º ESO, material manipulativo para trabajar en grupo)
70873112S	Geometría y Geología (3º ESO, actividad interdisciplinar. Actividades de aula, y en el aula de informática, salida al Instituto Geominero)
70255930S	Sembrando matemáticas (3º ESO, proyecto diseñado para vincular el contenido matemático con las matemáticas cotidianas en una zona rural, contextualización, actividades de clase y con el programa SIGPAC)
76138210E	Matemáticas y Geografía (2º ESO, contenidos de funciones y gráficas, interdisciplinariedad, uso de TIC con un programa interactivo que permite crear gráficas)
74007465C	Aprendemos Geometría con las abejas (Contenidos de Geometría y Medida de 1º ESO, interdisciplinariedad con el área de CC. Naturales, recursos on-line como videos de youtube y artículos para leer, se les proporciona el enlace, al final una salida al museo de la miel)
70870947N	Vista de lince (1º ESO, estimación de medidas, conceptos de semejanza y proporcionalidad a partir de un paseo matemático por la ciudad y el trabajo directo sobre ciertos monumentos muy representativos, interdisciplinariedad con el área de Historia para una explicación previa de los mismos en su contexto histórico)
03929592L	Matemáticas en las estaciones del año (3º ESO, interdisciplinar con CC. Naturaleza, contenidos de trigonometría del curso y con un trabajo que permite avanzar de forma natural como consecuencia del mismo en el curriculum)

70864465Q	Matemática financiera (Asignatura de "Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I" de 1º de bachillerato. Se centra en el bloque 1. Aritmética y álgebra y concretamente en el tema "Resolución de problemas de matemática financiera en los que intervienen el interés simple y compuesto, y se utilizan tasas, amortizaciones, capitalizaciones y número índice. Parámetros económicos y sociales". Uso de hoja Excel, internet como fuente de información, objetivo de encontrar las matemáticas en la vida cotidiana y uso de recibos de préstamos bancarios para trabajar directamente en clase)
28963691K	Matemáticas en Red (4º ESO, trabajo en red de matemáticas en una Red social, Tuenti más exactamente, todo el bloque de contenidos del curso, a desarrollar a lo largo del mismo trabajo colaborativo, en grupo)

Tabla 4. Trabajos de Innovación de los 15 alumnos del curso 2012-13

Autores	Título y contenido del trabajo
76136485E 45112195H 70819546Q	Matemáticas y deporte (3º ESO, contenidos de Geometría, Funciones y Gráficas, Estadística y probabilidad, crearon fichas de trabajo con actividades y recursos sacados de internet, elaboraron una revista con contenidos matemáticos y deportivos. Interdisciplinar con los departamentos de Educación Física, Plástica, Tecnología)
72141735G 70894379F 70872559Z	Excursión al centro comercial (3º ESO, gymkana matemática en un entorno real, los alumnos salen a un centro comercial en el que deben realizar 10 actividades en las que hay que resolver problemas que recorren todos los contenidos del curso en un tiempo limitado. Metodología por proyectos)
09815410E 70982206C	Las matemáticas en las Ciencias Sociales (1º ESO, Geometría, Funciones y Gráficas, Estadística y Probabilidad, se realizan salidas por la ciudad para contextualizar monumentos que luego se usaran en una webquest diseñada explícitamente para el trabajo, también un tablero de juego interactivo llamado el juego del GEOMAT, en el que en cada casilla que son las banderas de las comunidades autonómicas deben realizar una actividad de matemáticas de repaso de todo lo visto)
70885308K 70885308K	Infografías en el aula (Trabajar pensamiento, aprendizaje y expresión visual con infografías y diferentes proyectos para según qué nivel de ESO y/o Bachillerato. Cualquier contenido del curriculum de estos cursos)
71524601Y 70870301X 76044928M	Algo pasa en Europa (3º ESO, todo el curriculum, interdisciplinariedad con Geografía e Historia, Literatura, Idiomas. Creación de un blog http://algopasaeneuropa.blogspot.com.es/ Las actividades se proponen en el blog, cada bloque de contenidos se asocia a una región de Europa diferente y su música, historia, arte y geografía, sirve como hilo conductor de las mismas. Los alumnos deben realizar un portafolio y será la herramienta de evaluación final)

70873628W 70861707H	Interdisciplinariedad en Arapiles (1º Bachillerato, interdisciplinariedad con Lengua y Literatura, Biología y Geología, Educación Física. Trabajo por proyectos en el que se mezcla en trabajo en aula y prácticas de campo. Se parte del conocimiento de coordenadas geográficas, polares y cartesianas. Actividades sobre el terreno en las que se combinan contenidos de todas las áreas mencionadas. Crean una aplicación para móvil con cuatro opciones diferentes, ya que hay cuatro grupos de alumnos que hacen recorridos diferentes y van introduciendo las soluciones de las actividades, si son correctas pueden continuar, trabajan con otra aplicación de móvil para las coordenadas GPS)

Tabla 5. Trabajos de Innovación de los 15 alumnos del curso 2013-14

Autores	Título y contenido del trabajo
71295651K 80083315Y	Las matemáticas en la cocina (1º ESO, todos los contenidos de este curso a desarrollar mediante 9 actividades, relacionadas con la alimentación, elaboración de platos, o cálculos nutricionales)
71027025N 71036018N	El agua y las matemáticas (Interdisciplinariedad con Literatura, CC. Naturaleza, Lógica. El agua es el eje principal de todas las actividades, cada una se centra en diferentes aspectos y van realizando actividades matemáticas para llegar a una reflexión final, sobre el uso adecuado de recursos, gasto de agua en los hogares a partir de datos reales, etc.)
70874543C 71036161V 06587807D	Un viaje por la historia de las matemáticas (4º ESO, realización de hojas de trabajo recorriendo todos los contenidos del curriculum de matemáticas del curso, cada una de ellas comenzando con la historia de un matemático famoso, relacionado con el contenido: 1. Arquímedes. Números irracionales; 2. Euler. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones; 3. Tales. Midiendo distancias; 4. Pitágoras. Teorema; 5. Descartes. Poliedros; 6. Newton y Leibniz; 7. Pascal. La magia del triángulo de Pascal Al final se elabora una base de preguntas y respuestas entre todos y se crea un trivial matemático para jugar toda la clase.
71108846E 45688718T 07954727Q	Paseo matemático (3º ESO, contenidos de Geometría. Primero se trabajan en clase luego se propone una Gymkana matemática para encontrar esos conceptos en nuestro entorno más próximo, se realizan fotografías para la puesta en común. Se propone un problema final que es evaluar si la Plaza Mayor de la ciudad es o no un cuadrado. Se valora el modo de proceder de cada grupo de trabajo.
71018600M 76034968G	Matemáticas desde la Astronomía (4º ESO, contenidos de triángulos, semejanza, Teorema de Tales, relaciones métricas entre triángulos, uso de la calculadora. Hojas de trabajo en las que se introducen antes de la actividad matemática, información sobre historia, Astronomía, geografía que permite contextualizar las actividades pedidas)

70893709G 70890219X 70901993P	Parquemático (3º ESO bloque de Geometría. 10 actividades para realizar en clase: Soñando con parques, Lugar geométrico, La lanzadera de Tales y Pitágoras Logo parquemático, Gira la noria, Chócate con la geometría, Mapa de un parque, Volúmenes, Pirámide del terror matemático, El espectáculo debe continuar Toda la información se les plantea a los alumnos directamente o bien se les indica en qué webs pueden encontrar lo que necesitan. Se supone que la actividad última sería la visita real a un parque de atracciones)

Estos trabajos no sólo fueron elaborados teóricamente, sino que fueron expuestos a toda la clase, sometiéndose a la evaluación entre compañeros y a las críticas sobre aspectos como la viabilidad, claridad en los objetivos, originalidad, repercusión en la evaluación, grado de motivación para los alumnos, etc. Se valoraban positivamente aspectos como la interdisciplinariedad y la inclusión de otras asignaturas y profesores en el proyecto innovador.

Alguno de ellos, fueron trabajos seminales para los Trabajos Fin de Máster, y en algún caso, los alumnos implementaron parte de sus proyectos en el aula cuando así se lo permitieron los tutores de los centros, aunque solamente en aspectos relativos a las clases de matemáticas.

CONCLUSIONES

A partir del concepto de buenas prácticas docentes, del conocimiento del profesor de matemáticas, de la necesidad de la formación de profesionales reflexivos y de innovación, desarrollamos la asignatura de Innovación Docente, articulándola sobre experiencias de otros docentes, y sobre propuestas propias de los alumnos del Máster.

Con ello, vemos que nuestros alumnos son capaces de desarrollar, al menos teóricamente, experiencias innovadoras en el aula, interdisciplinares, usando TIC, con el objetivo fundamental de motivar a los alumnos para que sus aprendizajes sean más efectivos y por tanto adquieran las competencias matemáticas deseables según el curriculum vigente.

Consideramos que sería deseable, que estas propuestas pudieran en cierta medida llevarse a la práctica y de este modo, la reflexión también se extendiera a la realidad educativa. En algunos casos, cuando las condiciones del centro, del curso y del tutor eran propicias, se han experimentado parte de estos proyectos en los centros educativos, pero la mayor parte de las veces no ha sido posible, por ciertas circunstancias coyunturales a la práctica, y también por encontrarse con el rechazo del tutor del centro.

Si queremos que nuestros futuros docentes reciban una formación adecuada, deberíamos proporcionales situaciones reales en las que la teoría recibida, las propuestas que ellos mismos plantean y la práctica en el aula se pudieran desarrollar de forma prácticamente simultánea para que su reflexión para, en y sobre la práctica fuese efectiva.

Referencias.

De Pablos Pons J. et al (coord.) (2010). *Políticas educativas y buenas prácticas con TIC*. Ed. Graó, Barcelona

Flores, P. (2007). Profesores de Matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *PNA*, *4*(1), 139-159.

González Astudillo M. T., Monterrubio Pérez, M. C., Delgado Martín, L., Codes Valcarce M. (2011). Tipos de contextos de las actividades de Análisis Matemático en los libros de texto de Educación Secundaria en España. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM-IACME),* Recife, Brasil.

Goñi J.M. (coord.). (2011a) *Matemáticas. Complementos de formación interdisciplinar. Formación del profesorado. Educación Secundaria Vol I*. Ministerio de Educación. Instituto de Formación del Profesorado. Investigación e Innovación Educativa. Barcelona: Editorial Graó.

Goñi J.M. (coord.). (2011b) *Didáctica de las matemáticas. Formación del profesorado. Educación Secundaria Vol II*. Ministerio de Educación, Instituto de Formación del Profesorado. Investigación e Innovación Educativa. Barcelona: Editorial Graó.

Goñi J.M. (coord.). (2011c) *Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas. Formación del profesorado. Educación Secundaria Vol III*. Ministerio de Educación. Instituto de Formación del Profesorado. Investigación e Innovación Educativa. Barcelona: Editorial Graó.

Kortaghen F.A.J. (2010) La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 68 (24,2), 83-101.

MEC (2013). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. OCDE. Informe Español*. Ministerio de Educación, Madrid.

Planas N., Alsina A. (coord) (2009). *Educación matemática y buenas prácticas. Infantil, Primaria, Secundaria y Educación Superior*. Ed. Graó, Barcelona.

Rowland T. (2013). The knowledge quartet: the genesis and application of a framework from analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. *Journal of education*. 1(3), 15-43.

Rowland T., Huckstep P., Thwaites A. (2005). Elementary teachers mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 8: 255-281.

Shulman L. (1986) .Those who understand, knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Para hacer referencia al artículo:

Delgado, L. (2015). La innovación en la clase de matemáticas: una reflexión desde la formación de profesores de secundaria y bachillerato. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas". (pp. 329-342). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

DISEÑO Y EJECUCIÓN DE UNA PROPUESTA GLOBALIZADA DE MATEMÁTICAS MANIPULATIVAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Rosa María Fernández Barcenilla[a], Roberto Merino Millán[b]

[a]Facultad de Educación y Trabajo Social de Valladolid, [b]Graduado en Educación Primaria por la UVa.

Resumen

La manipulación es la acción de operar con las manos o cualquier instrumento, y a través de la cual se puede adquirir información y conocimiento. Es por tanto el material manipulativo un recurso idóneo para fomentar situaciones de aprendizaje, socialización y compañerismo en el alumnado, en especial de Educación Primaria.

En esta comunicación se ha planteado una propuesta de intervención educativa en la materia de matemáticas, basada en el diseño y ejecución de actividades manipulativas a través de una metodología activa en la que el alumnado ha sido el centro de su propio aprendizaje.

Esta propuesta de intervención y ejecución real ha sido llevada a cabo con alumnos del 6º curso de Educación Primaria, y se ha dejado constancia de todo el proceso de planificación, desarrollo y evaluación continua mediante documentación multimedia, gráfica y escrita.

Palabras clave: *matemáticas, material manipulativo, educación primaria.*

INTRODUCCIÓN

Esta comunicación se centra en el conocimiento, la utilización y la valoración de materiales manipulativos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en colegios de Educación Primaria.

Las matemáticas son una de las áreas que más dificultades de aprendizaje plantean a los niños. El no dominio de esta materia puede implicarles temor, ansiedad y rechazo al enfrentarse a esta asignatura. A su vez, esta materia contribuye a la adquisición de importantes competencias y habilidades necesarias en la vida. La adquisición de dichas habilidades depende en gran medida del método de trabajo en el aula. Uno de los recursos metodológicos que fomenta la adquisición de competencias y habilidades, y potencia el desarrollo integral del niño a través del proceso de aprendizaje del alumno (autoaprendizaje) es la manipulación.

Para lograr que el alumnado adquiera estas habilidades se ha diseñado y ejecutado una propuesta globalizada de matemáticas manipulativas para alumnos y alumnas de 6º de Educación Primaria.

Se ha elaborado y realizado una serie de actividades complementarias a las unidades didácticas del libro de texto. Estas actividades se han diseñado a modo de iniciación, refuerzo o ampliación de los contenidos planificados en las Programaciones Didácticas.

Una vez que las actividades se llevaron a cabo en el aula, se ha evaluado el proceso y los resultados obtenidos dejando constancia de todas las fases del proceso de planificación, desarrollo y evaluación continua mediante documentación multimedia, gráfica y escrita.

Previamente al diseño y ejecución de la propuesta de intervención educativa se ha profundizado en aspectos esenciales del aprendizaje de las matemáticas y de los materiales manipulativos en esta materia.

OBJETIVOS

Objetivo general

Potenciar y promover la utilización de materiales didácticos manipulativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria, con el fin de adquirir las competencias básicas y lograr alcanzar los objetivos previstos a través de la observación, manipulación y experimentación.

Objetivos específicos

- Explorar, identificar y seleccionar materiales manipulativos que sean de utilidad para mejorar el aprendizaje de matemáticas en Educación Primaria.
- Diseñar una serie de actividades que se pueden realizar con material manipulativo.
- Fomentar en el alumnado el gusto e interés por las matemáticas.
- Apreciar y asociar las matemáticas con la vida cotidiana disfrutando con su uso.
- Desarrollar el razonamiento matemático, usándolo en situaciones carentes, en apariencia, de relación con las matemáticas.
- Conocer y manipular materiales que favorezcan la comprensión y resolución de problemas.
- Potenciar la imaginación y creatividad, valorando la importancia de los resultados finales y procesuales.
- Desarrollar la visualización y percepción espacial.
- Crear un hábito de orden en el alumnado e inculcar el gusto por la limpieza.
- Aprender de los errores cometidos.
- Promover una actitud positiva y de respeto ante las situaciones y actividades planteadas.
- Valorar el uso del material manipulativo para desarrollar en el alumnado actitudes de compañerismo, generosidad, responsabilidad, trabajo en equipo…

JUSTIFICACIÓN

Relevancia del tema

Muchos de los conceptos matemáticos casi siempre han provenido del mundo físico, sin embargo se pretende que los estudiantes de primaria aprendan contenidos abstractos que han supuesto un gran esfuerzo de asimilación a la humanidad. La mayor parte de las veces se dejan de lado los modelos físicos o naturales, por pensar que al ser la matemática una ciencia exacta se debe enseñar con rigor. Sin embargo en un artículo de 2009, Bazán indica que el conocimiento matemático es una abstracción, y para llegar a él se debe partir de lo concreto y manipulativo. Para la resolución de los problemas matemáticos una de las fases, junto a la gráfica-representativa y la simbólica, es la manipulativa, donde los estudiantes deben observar unos objetos concretos, tener la posibilidad de manipularlos, operar sobre ellos y comprobar por sí mismos el resultado de sus acciones.

Disposiciones legales

La importancia de la manipulación, a través del uso de materiales, para un buen aprendizaje de las matemáticas, concretamente de la geometría, aparece reflejada en las disposiciones legales nacionales y autonómicas.

Así a nivel nacional aparece reflejado tanto en el nuevo REAL DECRETO 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria en 1º, 3º y 5º curso, como en el RD 1513/2006, de 7 de diciembre por el que este año se establecen las enseñanzas mínimas para los cursos 2º, 4º y 6º de Educación Primaria, y que a partir del próximo curso escolar quedará derogado.

Por otra parte, en el contexto de Castilla y León, aparece reflejado en la nueva ORDEN EDU/519/2014, de 17 de junio, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León en 1º, 3º y 5º curso, así como en el DECRETO 40/2007, de 3 de mayo, por el que se establece el Currículo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León para los cursos 2º, 4º y 6º, y que a partir del próximo curso escolar quedará derogado.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El aprendizaje de las matemáticas

Bases psicopedagógicas

Para Piaget (1896-1980) el *aprendizaje es constructivista*. Así, el niño construye su inteligencia mediante la adquisición de tres tipos de conocimiento: el *conocimiento físico* hace referencia a las características externas de los objetos y se obtiene a partir de la observación y la experimentación; el *conocimiento social* se adquiere por transmisión de los adultos y trata de las normas que cada sociedad ha establecido de forma arbitraria (Cascallana, 2002); y el *conocimiento lógico-matemático* ya no surge de las acciones, sino de la reflexión sobre estas (Martínez y Rivaya, 1989). Cascallana (2002) señala que Piaget distingue dos tipos de abstracciones: la *empírica*, propia del conocimiento físico y donde el niño se centra en una cualidad del objeto ignorando el resto; y la *reflexiva*, que es la que el niño pone en acción en el proceso de conocimiento lógico-matemático e implica la construcción de relaciones entre objetos en la mente del sujeto que las crea.

La concepción piagetiana del conocimiento como resultado de un proceso de acción sobre la realidad y como construcción estrictamente personal, ha servido de fundamento a un amplio movimiento pedagógico orientado hacia una metodología activa basada en el *aprendizaje por descubrimiento*. Según comentan Martínez y Rivaya (1989), la metodología activa centra el proceso de enseñanza-aprendizaje en la propia actividad creadora del alumno, en su labor investigadora propia, en sus propios descubrimientos, entendiendo que es el propio alumno quien construye sus conocimientos. Así el aprendizaje por descubrimiento manifiesta los principios de una metodología activa, y a su vez puede ser autónomo, caracterizado por su espontaneidad, o dirigido, que implica la existencia de una estrategia didáctica para orientar el proceso de descubrimiento.

Para Ausubel (1918-2008) el aprendizaje verdaderamente importante es el *aprendizaje significativo,* es decir, cuando la materia de aprendizaje puede relacionarse, de manera sustancial, no arbitraria, con lo que el alumno ya sabe, siendo necesario para ello que la materia sea potencialmente significativa, es decir, coherente entre su estructura y la estructura cognoscitiva. (Martínez y Rivaya, 1989).

Por último, destacar también la figura de Vygotski (1896-1934), que en contra de la teoría de Piaget, plantea que el desarrollo mental está apoyado por la interacción social con adultos o con otros iguales, lo que permite el acercamiento al medio social.

Concepciones

Díaz (2004) indica que las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas son un factor que condiciona la actuación de los profesores en la clase, y que existen dos concepciones diferentes sobre el aprendizaje de esta ciencia:

La concepción *idealista-platónica* considera que el alumnado debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática. Según esta visión no se puede ser capaz de aplicar las matemáticas, salvo en casos muy triviales, si no se cuenta con un buen fundamento matemático.

Por otro lado, la concepción *constructivista* considera que debe haber una estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones a lo largo de todo el currículo; y que es importante mostrar a los alumnos la necesidad que satisface cada parte de las matemáticas antes de que les sea presentada. La actividad de los alumnos al resolver problemas se considera esencial para que éstos puedan construir el conocimiento.

Fases

Cascallana (2002) señala tres fases del niño en la adquisición de conceptos matemáticos:

Una primera fase, necesaria pero no suficiente, denominada *fase manipulativa*, donde para la resolución de problemas lógicos el niño debe observar unos objetos concretos, tener la posibilidad de manipularlos, operar sobre ellos y comprobar por sí mismo el resultado de sus acciones.

En segundo lugar, una *fase representativa o simbólica*, donde el niño ya no opera sólo sobre los objetos concretos, sino que también lo hace sobre sus representaciones gráficas simbólicas. Esta fase facilita el paso de lo concreto a lo abstracto.

Y por último, una *fase abstracta*, en la que se puede pasar del símbolo al signo y operar sobre signos abstractos y arbitrarios, como son los números.

Material manipulativo

Concepto

Para la RAE manipular es operar con las manos o con cualquier instrumento.

Para Cascallana (2002) cuando se habla de manipulación en matemáticas se está haciendo referencia a una serie de actividades específicas con materiales concretos, que faciliten la adquisición de determinados conceptos matemáticos.

Alsina, Burgués y Fortuny (1988) definen el material manipulativo como “todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje.” (p. 13).

Clasificaciones

Los materiales didácticos utilizados para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas pueden clasificarse de diferentes maneras según los criterios que se elijan para ello.

Cascallana (2002) clasifica los materiales en *estructurados,* que son aquellos diseñados especialmente para la enseñanza de las matemáticas, y en *no estructurados*, refiriéndose a todos los que el niño puede manipular, sin ser necesariamente creado con fines matemáticos.

Por otra parte para Díaz (2004) existen dos tipos de materiales manipulativos: *manipulativos tangibles*, que ponen en juego la percepción táctil; y *manipulativos gráfico-textuales-verbales*, en los que participan la percepción visual y/o auditiva.

Proceso de enseñanza-aprendizaje

Como ocurre en la generalidad de las materias, en la enseñanza de las matemáticas no solo es importante lo que se enseña, sino también como se enseña.

Según Martínez y Rivaya (1989) las matemáticas deben plantearse como una actividad de investigación guiada, ya que todo aquello que el alumno descubre investigando es aprehendido, y por tanto aprendido mucho mejor.

Así la enseñanza de las matemáticas debe ser activa, donde el alumno no es un mero receptor de conocimientos, sino que es también un constructor de su propio pensamiento. Cuando el alumno se enfrenta a un problema y trabaja, manipula, conjetura, se equivoca, acierta, retrocede y avanza, investiga en suma, no está limitándose a asimilar unos conocimientos, sino que está adquiriendo unos hábitos mentales que le serán de utilidad. (Martínez y Rivaya, 1989)

Es importante provocar interés y expectación en el niño. Biniés (2010) indica que es necesario, cuando experimentamos, introducir un interrogante relacionado con la experiencia y el entorno de vida del propio alumno. Es básico que el niño sienta la necesidad de encontrar la respuesta a un problema que sea su propio interés, lo que le lleve a querer descubrir cómo es tal cosa. El verdadero aprendizaje es el propio descubrimiento.

Para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a través de materiales manipulativos, Cascallana (2002) propone tres principios básicos: en primer lugar la importancia de la actividad del niño como centro del proceso de aprendizaje; en segundo lugar, el conocimiento que el niño tiene de la realidad es global, el conocimiento matemático no conviene presentarlo aislado del social y físico; y como último objetivo, la consecución de la autonomía intelectual, lograr que el niño sea quien dirija y controle su propia actividad.

Utilización y razones de su uso

Los materiales manipulativos se utilizan en matemáticas con el fin de conseguir tres objetivos: favorecer la adquisición de rutinas, modelizar ideas y conceptos matemáticos, y plantear y resolver problemas. Por tanto, la utilización de éstos debe ir encaminada a conseguir los objetivos fijados, y no algo contraproducente. Para ello, se deben utilizar de forma esporádica, ya que sino, su influencia en el proceso de aprendizaje será nula, considerando el alumnado que la “clase con materiales” es un divertimento.

Para el uso del material manipulativo es conveniente tener en cuenta los cuatro principios de Dienes (1970), que aparecen reflejados en su libro: el *Principio Dinámico,* en el que se propondrán a los niños tres tipos de juegos (preliminares, estructurados y de práctica); el *Principio de constructividad,* donde en la estructuración de las actividades, la construcción precederá siempre al análisis; el *Principio de la variabilidad matemática*, mediante el cual los conceptos que encierran más de una variable deben ser estudiados a través experiencias que supongan en manejo del mayor número posible de aquellas variables; y por último el *Principio de la variabilidad perceptiva*, es decir, proponer trabajos que parezcan muy distintos, pero que esencialmente tengan la misma estructura conceptual.

Por tanto, en el momento de elegir el material que se va a utilizar, es importante evitar una serie de errores, entre otros: la sofisticación del material, que haya poca cantidad, creer que el material ya asegura un concepto, y la no adecuación de los conceptos presentados por el material.

Por otra parte Martín (2014), en uno de sus artículos, nos indica que existen diversas razones para utilizar material manipulativo en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, puesto que éste, entre otras, permite la **reflexión** acerca de los conceptos matemáticos y de las propiedades, r**ecrean distintas situaciones** que en un libro de texto se presentan de manera estática y limitada, f**omentan el interés** por la materia, y posibilitan tanto el trabajo individual como grupal.

Antecedentes

La utilización de materiales para resolver situaciones matemáticas data de los tiempos antiguos, en donde los nudos en cuerdas, las quemaduras en madera, las piedras y otros objetos, permitían hacer operaciones matemáticas.

Como indica González (2010), numerosos son los autores que han justificado el uso y la manipulación de materiales didácticos para adquirir aprendizaje: entre otros, Comenius (1592-1670) sostiene que el conocimiento tiene origen en los sentidos, por tanto, los objetos hay que mostrarlos, no describirlos; el alemán Fróebel (1782-1850), creador de la primera escuela infantil en Alemania en 1837, implementa un método educativo basado en el juego con un material didáctico distribuido en distintas cajas a las que les llama dones; y Piaget (1896-1980), en su didáctica psicológica, también propicia el material como medio de aprendizaje.

Además, entre los años 1950 y 1970 hubo una gran difusión de los materiales manipulativos estructurados. Investigadores matemáticos mostraron que mediante su uso se pueden interiorizar conceptos y propiedades matemáticas. Algunos de estos materiales manipulativos difundidos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas fueron: las regletas Cuisenaire, pentominós de Golomb, geoplano de Gategno, bloques lógicos y bloques multibase de Dienes, entre muchos otros.

DISEÑO DE LA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EDUCATIVA

Esta propuesta globalizada, compuesta por un conjunto de actividades, se ha diseñado como complemento a las unidades didácticas relativas al Bloque de Contenido de Geometría Plana. Teniendo en cuenta lo establecido por la LOE, ya que fue diseñado para el curso escolar 2013-2014. Para ello se han definido los siguientes apartados:

Contexto del Centro y del aula

El diseño de las actividades que engloban esta propuesta ha sido realizado teniendo en cuenta tanto el centro, el CEIP Pinoduero de Tudela de Duero; como el aula, correspondiente al 6º curso de educación primaria. Su alumnado estaba formado por 12 alumnas y 9 alumnos de entre 11 y 12 años de edad, caracterizados por ser activos y participativos.

Objetivos

La propuesta de intervención globalizada ha sido elaborada para alcanzar unos objetivos generales y otros específicos de cada actividad. Los específicos se encuentran descritos en la secuenciación de actividades.

Objetivos generales

- Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana y disfrutar con su uso.
- Plantear y resolver problemas matemáticos utilizando los procedimientos adecuados de cálculo, medida, estimación y comprobación de resultados.
- Utilizar el propio lenguaje matemático.
- Resolver problemas sencillos y obtener resultados correctos a través de la manipulación y experimentación con materiales.
- Desarrollar estrategias cooperativas y de respeto a los compañeros.
- Conocer y valorar la aportación de otras culturas y épocas en las matemáticas.

- Fomentar el interés y el gusto por las matemáticas en el alumnado.
- Conocer materiales manipulativos, apreciarlos y cuidarlos.

Contenidos

Individualmente cada actividad tiene marcados unos contenidos conceptuales y/o procedimentales específicos, que se encuentran descritos en la posterior secuenciación de dichas actividades.

Además, todas las actividades que conforman la propuesta manifiestan unos contenidos actitudinales:

- Respeto, compañerismo y amistad.
- Creatividad e imaginación.
- Interés por la materia.
- Conocimiento y valoración de las aportaciones matemáticas de otras culturas a lo largo de la historia.

Competencias Básicas

Las actividades que componen esta propuesta didáctica, al tratarse del 6º curso de educación primaria, desarrollan las competencias básicas establecidas en el Decreto 40/2007, de 3 de mayo:

-*Competencia Matemática*, relacionando los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático; interpretando diferentes tipos de información; ampliando el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad; y resolviendo problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. Se trabajará constantemente, es la competencia reina de esta materia.

-*Conocimiento e interacción con el mundo físico*, reconociendo formas geométricas de dos o tres dimensiones en un entorno inmediato, interpretando escalas, utilizando los sistemas de medición y asociando las matemáticas a la vida cotidiana.

-*Autonomía e iniciativa personal*: interiorizando un conjunto de valores y actitudes personales que fomenten la confianza en sí mismos, aprendiendo de los errores y de asumir riesgos, y fomentando el compromiso a través de la realización de trabajos grupales.

-*Competencia cultural y artística* desarrollando la imaginación, la creatividad y el gusto por la belleza de las formas.

-*Competencia social y ciudadana* dando mucha importancia al trabajo en equipo a la hora de compartir materiales, aceptando los puntos de vista de los demás.

-*Aprender a aprender* utilizando materiales de forma autónoma y siendo capaz de comprender el proceso seguido en el aprendizaje o el resultado.

-*Competencia en comunicación lingüística*: utilizando el lenguaje matemático como instrumento de comunicación oral y escrita, de representación, interpretación y comprensión de la realidad, de construcción y comunicación del conocimiento y de organización y autorregulación del pensamiento, las emociones y la conducta.

Metodología

Los aspectos metodológicos son uno de los puntos fuertes y más importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la Educación Primaria. Se trata de un conjunto articulado de acciones que se desarrollan en el aula con la finalidad de provocar aprendizajes en el alumno, y de un planteamiento global y sistematizado de cómo se deben organizar y llevar a cabo los contenidos y las prácticas escolares, ordenadas hacia la adquisición de las competencias básicas que permitan al alumnado integrar y aplicar el conocimiento alcanzado.

En esta propuesta educativa se utilizará una metodología activa, basada en la manipulación, que fomente el aprendizaje significativo y el desarrollo de competencias básicas. El alumnado, eje vertebrador y centro del proceso de aprendizaje, será quien a través de su acción y desde sus inquietudes cognoscitivas, construya su propio conocimiento, organice la realidad y reelabore de forma continua sus estructuras mentales. Se trata de un modelo sustentado en la capacidad creadora de los niños, en sus actividades de descubrimiento y en sus capacidades artísticas.

La metodología también será interdisciplinar, conectando los contenidos matemáticos tratados con el resto de asignaturas.

El papel del profesorado será preparar e impulsar situaciones educativas, creativas, estimulantes y que despierten en el alumnado la curiosidad por el mundo que le rodea, guiándoles en su paso por las tres fases del conocimiento matemático: la fase manipulativa, la fase gráfica-representativa y la fase simbólica. El uso de material manipulativo facilitará el paso de una fase a otra, seleccionando actividades acordes al pensamiento del alumnado.

El docente deberá desempeñar el papel de guía y mediador en el proceso de enseñanza-aprendizaje, estableciendo relaciones entre los conocimientos previos y los nuevos contenidos, para así lograr un aprendizaje significativo.

En el desarrollo de actividades se asentarán las bases que permitan ir hacia la construcción y estructuración del pensamiento lógico, básico en matemáticas, a través de situaciones de movimiento, juego, manipulación y experimentación.

Se primará una enseñanza lógica y razonada frente a la mecánica y memorística, mediante el uso de materiales manipulativos, que a su vez fortalecerán la capacidad creativa del alumno.

En el desarrollo de actividades, el maestro seguirá siempre las mismas pautas: primero presentará la actividad al alumnado, indicando lo que se debe hacer; en segundo lugar guiará al alumnado para que por sí mismo pueda llegar al resultado final; y por último corregirá la actividad para que los alumnos asienten todos los conceptos y procedimientos.

Recursos empleados

En la realización de las actividades que configuran la propuesta se emplearan tres tipos de recursos: *personales*, todas aquellas personas que intervengan en el desarrollo didáctico de un contenido para completar, aclarar, afrontar los conocimientos del alumnado; *ambientales*, desde la conformación flexible y funcional del espacio del aula, hasta la utilización de los diferentes espacios del centro para la realización de las actividades; *y materiales*, imprescindibles para poder desarrollar las actividades manipulativas. Se han utilizado materiales manipulativos estructurados y no estructurados, a su vez clasificados en:

- *Materiales reciclados*: De elaboración propia. Éstos favorecen la creatividad y la conciencia del alumnado ante el medio ambiente. Algunos de estos materiales son: cajas de cartón, botellas de plástico, papel y cartulinas usadas, etc.
- *Materiales impresos*: Para el maestro: Fichas de autoevaluación, guías, libros de texto, programación didáctica de ciclo y de aula. Para el alumnado: Cartulinas, fichas de las actividades, cuestionarios de evaluación.

- *Materiales audiovisuales*: Ordenador, Pizarra Digital Interactiva, cámara de fotos y vídeo. También se ha utilizado software de edición de vídeo para editar todo el material audio-visual recogido en el aula.

Temporalización

Al tratarse de una propuesta educativa que complementa a cuatro unidades didácticas, las actividades de ésta han de ponerse en práctica en consideración con el progreso de las unidades didácticas, para que una vez realizadas todas, se pueda implementar la actividad final globalizada. Por tanto, no se puede precisar inicialmente una temporalización exacta para su ejecución, ya que esta dependerá en cada caso del ritmo que marque la dinámica de la clase.

Secuenciación de actividades

Esta propuesta contiene once actividades manipulativas a modo de introducción, refuerzo o ampliación de contenidos, que serán resumidas en una actividad final globalizada. A continuación se detallan los objetivos, los contenidos, los materiales necesarios, la duración, el tipo de actividad y una breve descripción de cada una de ellas:

Actividad 1: Ángulos en figuras planas

Objetivo: Demostrar que los ángulos de un triángulo suman 180º y los de un cuadrilátero 360º.

Contenidos: La suma de ángulos en triángulos y cuadriláteros, un resultado demostrable.

Materiales: Hojas recicladas, regla, lapicero y tijeras.

Duración: 15 minutos.

Tipo de actividad: De ampliación.

Descripción: El alumnado deberá demostrar manipulativamente de dos formas diferentes, mediante dobleces, y a través de cortes y uniones de piezas, que los ángulos de un triángulo suman 180º y los de un cuadrilátero 360º. Para ello el docente guiará a los alumnos y les denotará los pasos que deben seguir, para que sean estos los que descubran la solución.

Actividad 2: Ingenio egipcio

Objetivos: Conocer y comprender como resolvían problemas geométricos los egipcios. Introducir el teorema de Pitágoras.

Contenidos: Aplicación de la geometría egipcia: el triángulo de 12 nudos. El teorema de Pitágoras.

Materiales: 1 metro de cuerda y unas tijeras.

Duración: 30 minutos.

Tipo de actividad: de ampliación.

Descripción: El profesor, repartirá a cada grupo de dos alumnos una cuerda dividida en 12 trozos de longitudes similares delimitados mediante nudos. Acto seguido, los alumnos, crearán un triángulo que contenga como lados agrupaciones de 3, 4 y 5 delimitaciones de cuerda; y tensándolo por sus vértices, podrán apreciar que dicho triangulo es siempre rectángulo. Por tanto, atribuyendo a cada delimitación entre nudos un valor; se puede cuantificar la dimensión de cada uno de los lados para presentar dicha Terna Pitagórica. También, el maestro propondrá situaciones que se dieron en la vida egipcia para dividir las tierras y que resolverán los alumnos, Por último, se presentará el famoso teorema de Pitágoras que verifica todo triángulo rectángulo.

Actividad 3: Relación en circunferencias

Objetivos: Comprender el número π. Relacionar el perímetro y el diámetro de una circunferencia.

Contenidos: Elementos de la circunferencia. Número π.

Materiales: Cuerda, regla, círculos variados y material reciclable cilíndrico (tapa de bote, tapón de suavizante, etc.)

Duración: 30 minutos.

Tipo de actividad: de introducción.

Descripción: Se facilitará al alumnado, por parejas, un kit con el material anteriormente especificado. Los alumnos deberán rodear con la cuerda, y después medir con la regla, la longitud del perímetro y del diámetro del círculo asignado. Registrarán dichos valores obtenidos en su cuaderno. El siguiente paso consiste en dividir el valor del perímetro entre el del diámetro, obteniendo un resultado. Una vez realizada la división, el portavoz de cada grupo transmitirá el resultado obtenido y se irán apuntado los diferentes valores en la pizarra. De esta forma se podrá ver que todos los datos están próximos a 3,1416... Los grupos de alumnos repetirán el mismo proceso con otro círculo o cuerpo cilíndrico, comprobando que el resultado vuelve a estar cercano al valor numérico anteriormente expuesto. Se mostrará al alumnado la gran importancia del número irracional π, presente en muchas propiedades geométricas. Concretamente, con esta actividad se muestra al alumnado que en el cociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro aparece un valor constante. La relación encontrada se puede plasmar en una fórmula que indica que la longitud de una circunferencia es igual al producto de su diámetro por el número π, $simbólicamente$ $(L = \pi * d)$. Por último, se justificará ante el alumnado que en este proceso de medición hay un error. $\pi\ es$ un número decimal con infinitas cifras no periódicas, y al operar utilizaremos una aproximación, que conllevará cierto error.

Actividad 4: Partes del círculo y de la circunferencia

Objetivos: Identificar los diferentes puntos, segmentos, curvas y superficies que pueden formar parte de un círculo.

Contenidos: La circunferencia y sus elementos. Puntos, segmentos, curvas y superficies que forman parte del círculo (centro, cuerda, arco, radio, sector circular, corona circular, etc.)

Materiales: Goma eva, cuerda, compás, regla y tijeras.

Duración: 45 minutos.

Tipo de actividad: de refuerzo.

Descripción: Cada grupo de 3 o 4 miembros deberá construir cooperativamente con goma eva y cuerdas todos los elementos que pueden formar parte de la circunferencia y el circulo (cuerda, radio, diámetro, arco, semicírculo, sector circular, segmento circular y corona circular). Estos elementos deberán poder ser superpuestos encima de un círculo modelo. Una vez construidos todos los elementos experimentarán con ellos y anotarán en su cuaderno las relaciones que observen. Algunos ejemplos son: el sector circular está formado por dos radios; el diámetro divide al círculo en dos semicírculos, etc.

Actividad 5: Medimos con sombras

Objetivos: Identificar series proporcionales y completar tablas de proporcionalidad. Conocer magnitudes proporcionales entre sí.

Contenidos: Series de números proporcionales y tablas de proporcionalidad. Magnitudes proporcionales. Resolución de problemas de proporcionalidad.

Materiales: Cuaderno del alumno, lapicero, goma y un metro de bolsillo.

Duración: 45 minutos.

Tipo de actividad: De introducción del concepto de longitud y de ampliación.

Descripción: Los alumnos deberán hallar la altura del edificio que conforma el colegio a través de su propio cuerpo y las sombras proyectadas. Es imprescindible para poder llevar a cabo la actividad que haya sol y disponer de un espacio en el que se puedan apreciar sombras. Antes de ir al lugar oportuno para realizar el ejercicio, el maestro explicará en la pizarra que la relación existente entre la altura de un objeto y la sombra que proyecta es proporcional con la altura de otro objeto y su sombra (una adaptación sencilla del Teorema de Tales); y por tanto, se pueden anotar dichas medidas en una tabla de proporcionalidad (ver tabla 1) de la que se conocen 3 de los 4 datos.

Tabla 7. Tabla de proporcionalidad que se entregará a cada grupo de trabajo.

	ALUMNO	**EDIFICIO**
ALTURA	..............metros	CALCULAR
SOMBRA	..............metros	..............metros

Posteriormente, ya en el patio, cada grupo de trabajo, de 3 o 4 miembros, comenzará a medir la altura de uno de sus componentes, la sombra que éste proyecta y la sombra del objeto o construcción del que se quiere hallar su altura. Se recogerán todos los resultados en la tabla de proporcionalidad. Para finalizar, se deberá calcular la altura del por reducción a la unidad o mediante el coeficiente de proporcionalidad entre la altura y la sombra.

Actividad 6: Dominó

Objetivos: Relacionar porcentajes, fracciones, números decimales y representaciones gráficas.

Contenidos: Porcentajes, fracciones, números decimales y representaciones graficas.

Materiales: Cuaderno del alumno, lapicero y dominó.

Duración: 45 minutos.

Tipo de actividad: de refuerzo.

Descripción: se dividirá a la clase en 3 grupos y se colocará a cada uno de ellos en una zona. El juego del dominó consistirá en unir las piezas relacionadas mediante porcentajes, fracciones, números decimales y representaciones graficas. Las normas del juego las establecerá el maestro, siendo flexibles en todo momento. Se recomienda que los alumnos dispongan de su cuaderno y un lapicero por si necesitan hacer alguna operación escrita.

Actividad 7: Mural colectivo a escala

Objetivos: Interpretar escalas. Realizar una composición grupal a escala.

Contenidos: Escalas numéricas y gráficas. Interpretación y elaboración de murales a escala.

Materiales: Un folio, un lapicero, un bolígrafo, compás y lapiceros de colores.

Duración: 30-40 minutos.

Tipo de actividad: de refuerzo.

Descripción: Se realizará de manera conjunta una composición ampliada mediante la unión de piezas, y ésta se colocará en la corchera del aula. Para ello, el profesor asignará a cada niño, de forma aleatoria, la realización de una parte de un dibujo realizado a escala 1:4 en tamaño din A4, y compuesto de figuras geométricas planas. Este dibujo se dividirá en partes iguales, tantas como alumnos haya.

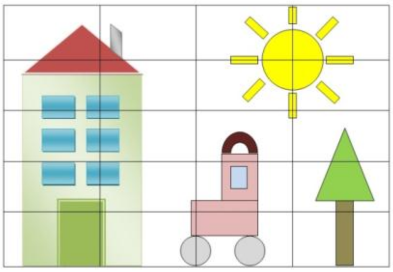


Figura 1: Dibujo a escala 1:4 dividido en 20 partes iguales.

Actividad 8: Calculamos con agua

Objetivos: Conocer y relacionar las diferentes medidas capacidad.

Contenidos: Medidas de capacidad. Resolución de problemas mediante la manipulación.

Materiales: Recipientes reciclados (botellas o tarros de diferentes medidas) graduados, un embudo, un lapicero, una goma y la hoja de respuestas que facilitará el maestro.

Duración: 50 minutos.

Tipo de actividad: de refuerzo.

Descripción: Se comenzará agrupando a los alumnos por tríos y dotando a cada grupo del material necesario. Se dispondrá de 3 recipientes de diferentes capacidades: de 0´003 hl, 0´5 l y 13 dl respectivamente. El recipiente mayor contendrá la cantidad indicada de agua. Una vez que los grupos de trabajo estén preparados para comenzar, el maestro propondrá diferentes situaciones que los alumnos deberán resolver. Por ejemplo, entre otras, "mediante transvases de agua de un recipiente a otro, debes obtener las siguientes cantidades de agua, apuntando como lo hiciste: 700 ml, 0,11 dal y 0,0001 kl". Durante los 15 últimos minutos de clase se corregirán los resultados obtenidos, para ello el maestro realizará la actividad en su mesa ante la observación del alumnado, que a su vez deberá ir autocorrigiéndose.

Actividad 9: Demostramos áreas

Objetivos: Demostrar las formulas del área de algunas figuras planas: triangulo, rombo y romboide.

Contenidos: Áreas de figuras planas: triangulo, rombo y romboide.

Materiales: Cartulinas de colores din A4, lapicero, regla y tijeras.

Duración: 40 minutos.

Tipo de actividad: De refuerzo.

Descripción: Individualmente, y siguiendo los pasos que marque el maestro, cada alumno deberá realizar los tres polígonos indicados a continuación, teniendo en cuenta las referencias de una cartulina modelo que sea rectangular y de tamaño din A4. Primero, un triángulo cuya base sea la misma de la cartulina modelo; segundo, un rombo en el que sus diagonales se correspondan con la base y la altura de la cartulina modelo y, por último, un romboide con la misma base y altura que la cartulina modelo. (Ver figura 2)

Una vez construidas las figuras planas se demostrarán las fórmula de su áreas, en función de la del rectángulo (A= b*h), colocando las piezas sobrantes de éste sobre dichas figuras planas. El alumnado podrá comprobar que el área del triángulo y el rombo, así construidos, es la mitad que el área del rectángulo y en el caso del romboide se trata del mismo área.

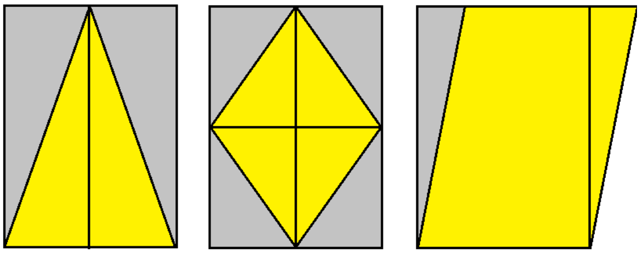


Figura 2: Figuras planas sobre la cartulina modelo.

Actividad 10: Medimos superficies

Objetivos: Comprender el concepto de superficie y conocer la relación entre sus medidas. Estimar.

Contenidos: Concepto de superficie. Medidas de superficie. Implementación de materiales manipulativos para la resolución de problemas.

Materiales: Goma eva, regla, bolígrafo y hoja de respuestas que facilitará el maestro.

Duración: 50 minutos

Tipo de actividad: de refuerzo.

Descripción: En primer lugar, se dividirá la clase en grupos de trabajo de 3 personas, habilitando a cada uno de ellos una zona de trabajo en el aula. El docente entregará a cada grupo un kit de material manipulativo, compuesto por diferentes piezas de goma eva en las que se denota su superficie (ver figura 3) y una hoja de cuestiones que deberán contestar. En dicha hoja aparecerán variados enunciados, entre otros: “1- Colocando diferentes piezas de goma eva y sumando sus superficies deberás hallar la superficie de la mesa y del libro de texto (es importante que a la hora de sumar todas las medidas estén en la misma unidad)”, “2- Comprueba el resultado midiendo los objetos y aplicando la fórmula del área de un rectángulo”, “3- ¿Cuántas piezas verdes contiene una amarilla? ¿y una roja?”

A partir de dichos enunciados cada grupo realizará la actividad y el docente sólo se limitará a guiar, mediar y resolver dudas. Durante los 15 últimos minutos de clase, se pondrán en común los resultados obtenidos. El maestro realizará la actividad en su mesa ante la observación del alumnado, que a su vez deberá ir autocorrigiéndose.

Figura 3: kit de material manipulativo compuesto por piezas en las que se indica su superficie.

Actividad 11: Taller manipulativo

Objetivos: Conocer materiales manipulativos novedosos y experimentar con ellos. Acercar los contenidos de la Educación Secundaria al alumnado y fomentar su interés hacia ellos.

Materiales: Palillos, folios, tijeras, fichas de parchís o similar, pegamento, diferentes materiales manipulativos estructurados (ganchos entrelazados, retroatasco, tantrix, tangram) y hoja de autoevaluación para los grupos.

Duración: 90 minutos.

Tipo de actividad: De ampliación.

Descripción: Se dividirá al alumnado en grupos de 3 personas. Cada uno de estos resolverá diferentes desafíos a modo de juegos lógicos mediante la manipulación. Para ello se crearán 7 estaciones por las que pasaran todos los grupos, y en las que se dispondrá del material necesario para su desarrollo. Las estaciones serán las siguientes: 1-Tangram, 2-Rompecabezas, 3-Retroatasco, 4-Desafíos con palillos, 5-Puzzles, 6-Pentominó, 7-Tantrix. Las estaciones dispondrán de una hoja que sirva como guía y en la que se muestre lo que se debe hacer. Allí, al realizar la actividad, cada grupo irá apuntando los resultados en una ficha de autoevaluación que le suministrará el maestro.

Antes de organizar la clase en grupos, el maestro captará la atención del alumnado mostrando a éstos diferentes composiciones topológicas con papel (flexágonos, banda de Mohebius, etc.) y realizando algún ejercicio de Matemagia, como por ejemplo adivinar el pensamiento a través de tarjetas adivinas.

Actividad final globalizada

Objetivos: Repasar e interiorizar todos los contenidos tratados en la propuesta de intervención.

Materiales: Papel de rollo, cartulinas de colores, cinta adhesiva, fotografías y material manipulativo del resto de actividades.

Duración: 120 minutos.

Tipo de actividad: globalizada y de repaso.

Descripción: Una vez se hayan realizado las 11 actividades ya descritas, se llevará a cabo una actividad de repaso que servirá para que el alumnado asiente los contenidos tratados y haga una valoración personal que sirva al maestro para poder evaluar la propuesta. La actividad se divide en dos partes, cada una de 60 minutos. La primera parte consiste en componer entre todos los alumnos un mural que resuma las once pruebas que se han llevado a cabo. Para ello el docente repartirá tareas en el alumnado. En el mural deben aparecer once recuadros con los nombres de cada una de las actividades que conforman la propuesta. (Ver figura 4).

Figura 4: Mural de la actividad final de repaso.

Una vez se haya elaborado el mural, se dividirá la clase en parejas y a cada una se le asignará una de las once actividades. Cada pareja deberá realizar una ficha que resuma la actividad asignada. Esta ficha-resumen se elaborará sobre una cartulina (del tamaño del recuadro fijado en el mural para su actividad) en la que deberán aparecer: el título, fotografías de las pruebas (proporcionadas por el maestro), el material manipulativo utilizado y lo que el alumnado considere oportuno.

La segunda parte de la actividad consiste en explicar al resto de compañeros la ficha-resumen realizada. Para ello, se orientarán las sillas de la clase hacia la corchera, donde se colgará el mural. Por orden, mientras el resto de compañeros permanecen atentos, cada pareja irá saliendo a la corchera y responderá a tres preguntas que realizará el docente: ¿En qué consistió la actividad?, ¿Cómo la hicisteis y que materiales utilizasteis?, y ¿Cuál es vuestra valoración personal sobre la actividad? ¿Os gusto?. Una vez que se hayan respondido las tres preguntas, la pareja colocará con cinta adhesiva, la ficha-resumen en el mural. De esta forma, al finalizar la actividad, el mural contendrá un resumen visual de todas las pruebas realizadas.

Evaluación

La evaluación es un elemento curricular fundamental e íntimamente ligado al proceso de enseñanza-aprendizaje, que se establece, define y argumenta en diversos decretos, órdenes y leyes.

En esta propuesta se seguirán los patrones que indica la orden EDU/1951/2007, de 29 de noviembre, por la que se regula la evaluación en la educación primaria en Castilla y León. Esta orden determina que la evaluación debe ser un proceso continuo, global, formativo, orientador, sistemático, flexible e integrador; y que además, se debe realizar tanto en el proceso de enseñanza como en el proceso de aprendizaje.

En la evaluación del proceso de enseñanza, se deberá tener en cuenta tanto los aspectos de planificación y coordinación docente, como la práctica educativa. Para ello el maestro se autoevaluara diariamente, valorando su actividad docente y sacando conclusiones que le permitan, siempre, mejorar su labor. Es importante que el docente tome nota de algunas propuestas de mejora para situaciones futuras.

Con respecto a la evaluación del proceso de aprendizaje, se evaluará el grado de consecución de los objetivos fijados, tomando como referente unos criterios de evaluación. La evaluación será flexible y permitirá modificar aquello que no haya posibilitado conseguir los objetivos marcados inicialmente, para poder posteriormente alcanzar la meta deseada.

La técnica empleada para evaluar a los alumnos es principalmente la observación directa y sistemática de éstos. Se llevará a cabo mediante una ficha de evaluación, que el profesor deberá completar en el desarrollo de las actividades. En esta ficha se tendrá en cuenta el comportamiento, la implicación en las actividades, y la resolución de éstas, baremando cada una de ellas del 1 al 5.

Criterios de evaluación:

- Demuestra que la suma de los ángulos en un triángulo y en un cuadrilátero es 180º y 360º, respectivamente.
- Conoce técnicas de resolución de problemas geométricos de otras culturas antiguas.
- Relaciona el perímetro y el diámetro de una circunferencia a través del número π.
- Identifica los diferentes elementos que forman parte de un círculo.
- Identifica magnitudes proporcionales entre si y completa tablas de proporcionalidad.
- Relaciona fracciones con números decimales, porcentajes y representaciones.
- Interpreta escalas.
- Conoce y relaciona diferentes medidas de masa, longitud y capacidad.
- Comprende el concepto de superficie y conoce la relación entre sus medidas.
- Relaciona el área del triángulo, rombo y romboide con la del rectángulo.
- Desarrolla estrategias cooperativas y de respeto a los compañeros.
- Aprecia y cuida el material propio y del resto de la clase.

EJECUCCIÓN DE LA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EDUCATIVA

Desarrollo de las actividades

Todas las actividades que conforman esta propuesta de intervención educativa se han llevado a cabo en el aula. Al implementarlas se han seguido los criterios fijados en el diseño de las mismas. En general, no se han realizado cambios en la planificación inicial, aunque en alguna ocasión, se han tenido que reconsiderar aspectos relacionados con algún elemento curricular y establecer ajustes que no estaban previstos. Por ejemplo, entre otros, aumentar el tiempo de realización en algunas actividades.

Por otra parte, el maestro siempre ha sido el responsable de proporcionar el material manipulativo fijado para cada actividad y en el caso de que los alumnos utilizasen material propio, estos fueron avisados con anterioridad para que dispusiesen de él en el momento oportuno.

Proceso de evaluación

Se ha planificado evaluar la totalidad del proceso enseñanza-aprendizaje, así como cada uno de los elementos que lo componen; teniéndose en cuenta la organización del trabajo, los recursos que se han ido utilizando, la metodología aplicada a cada situación, e incluso, las propias intervenciones como elemento del proceso.

Se ha evaluado continuamente, a lo largo de la ejecución de la propuesta, el proceso de enseñanza-aprendizaje. El docente, después del desarrollo de cada actividad, ha llevado a cabo una autoevaluación propia, mediante una ficha en la que se han fijado unos ítems que darán respuesta a la consecución o no de los propósitos establecidos. Teniendo en cuenta esta autoevaluación se subsanarán posibles futuros errores y se mejorarán los métodos de trabajo en matemáticas.

Los alumnos, como parte fundamental del desarrollo de esta propuesta, también han intervenido en la evaluación de la misma. Para ello, una vez implementadas todas las actividades, se les presentó un cuestionario que debían responder de forma anónima. Analizando y codificando los datos de los cuestionarios respondidos por el total de 19 alumnos, podemos corroborar que: las actividades manipulativas llevadas a cabo han ayudado a introducir, asentar y afianzar conceptos; las actividades manipulativas son más dinámicas y amenas que las propias del libro de texto; trabajar con material manipulativo suscita el interés y la atención; las actividades manipulativas fomentan la cooperación y el trabajo en equipo.

En este proceso de evaluación también se ha tenido constancia del conocimiento y del pensamiento del profesorado acerca del material manipulativo en Matemáticas. Para ello se ha pasado una encuesta a los seis profesores encargados de impartir Matemáticas en el colegio donde se ha llevado a cabo esta propuesta, el CEIP Pinoduero. Estas encuestas también se han analizado y codificado, corroborando que: en las clases de matemáticas, por lo general, se utiliza material manipulativo; el profesorado conoce variados materiales manipulativos que poder utilizar en sus clases; el material manipulativo estimula, asienta y afianza el aprendizaje de los niños; con el material manipulativo las clases son más dinámicas y amenas para el alumnado; manipulando los niños se divierten más, estas clases les gustan más; la manipulación de objetos en clase acerca al niño al uso de materiales en la vida cotidiana.

CONCLUSIÓN

Todas las actividades que conforman la presente propuesta han sido implementadas durante el periodo de realización del Practicum de Roberto Merino Millán en el CEIP Pinoduero de Tudela de Duero) durante el curso académico 2013/14. Rosa Mª Fernández Barcenilla tuteló el Trabajo Fin de Grado (TFG) en el cual se planificó, diseñó y estructuró dicha propuesta de intervención educativa. Aprovechamos para agradecer al profesorado de dicho centro, en especial a Virginia Rico y Asunción Arranz, así como a Jorge de las Heras por su ayuda y colaboración.

Como conclusión, podemos decir que la manipulación es la puerta de entrada de muchos aprendizajes. A través del aprendizaje manipulativo podemos conseguir un mayor interés y una dinámica participativa de la clase, que favorecerán el gusto por las matemáticas.

Mediante los medios manipulativos es el niño quien, a través de su acción, construye su propio conocimiento, organiza la realidad y reelabora de forma continuada sus estructuras mentales.

Después de diseñar y ejecutar la propuesta de intervención educativa fijada en esta comunicación se puede asegurar que los materiales manipulativos: permiten modelizar conceptos e ideas matemáticas facilitando el paso hacia la abstracción de los mismos; proporcionan una fuente de actividades matemáticas estimulantes y altamente atractivas; permiten que los/las alumnos/as realicen actividades de forma autónoma; y estimulan la colaboración que supone el trabajo en grupo donde han de tenerse en cuenta las opiniones individuales para llegar a una conclusión colectiva.

El mensaje de Mª Antonia Canals: “Los maestros han de ser felices haciendo matemáticas, de este modo los alumnos también lo serán”, se ha cumplido en todas las actuaciones llevadas a cabo y reflejadas en esta comunicación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Libros

Alsina, Á. (2008). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos: Para niños y niñas de 6 a 12 años* (3ª ed.). Madrid: Narcea.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. M. (1988). *Materiales para construir la geometría.* Madrid: Síntesis.

Biniés, P. (2010). *Conversaciones matemáticas con María Antonia Canals: O cómo hacer de las matemáticas un aprendizaje apasionante.* Barcelona: Graó.

Cascallana, M. T. (2002). *Iniciación a la matemática: Materiales y recursos didácticos.* Madrid: Santillana.

Díaz Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Granada: Universidad de Granada.

Dienes, Z.P. (1970). *La construcción de las matemáticas.* Barcelona: Vicens-Vives.

Gattegno, J. y Medina, G. (1967). *El material para la enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Aguilar.

Gil, F., Moreno, M. F., y del Olmo, M. A. (1989). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis

González, J.L. (2010). Recursos, material didáctico y juegos y pasatiempos: consideraciones generales. Revista *UMA, Didáctica de la Matemática*. En: http://www.kindsein.com/es/2/80/147/

Martínez, A. y Rivaya, F.J. (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Sánchez, C. y Casas, L. M. (1998). *Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en matemáticas*. Madrid: Centro de Publicaciones del M.E.C.

Marco normativo

Decreto 40/2007, de 3 de mayo, por el que se establece el Currículo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León. BOCYL 89, 9 de mayo de 2007.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE 106, 4 de mayo de 2006.

Orden EDU/1951/2007, de 29 de noviembre, por la que se regula la evaluación en la educación primaria en Castilla y León. BOCYL 237, 7 de diciembre de 2007.

Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. BOE 293,8 de diciembre de 2006.

Páginas web

Jobita Bazán Sánchez. (2009). *Bienvenido al mundo de la matemática.* Recuperado el 17 de julio de 2014 de: http://jbasanchez.pbworks.com/w/page/5405093/FrontPage

Malena Martín. (2014). *10 razones para usar juegos y materiales manipulativos en secundaria.* Recuperado el 22 de julio de 2014 de: http://aprendiendomatematicas.com/ didactica/10-razones-para-usar-juegos-y-materiales-manipulativos-en-secundaria/

Real Academia Española (2014). *Diccionario de la lengua española.* Recuperado el 3 de julio de 2014 de http://www.rae.es/

Para hacer referencia al artículo:

Fernández, R.M y Merino, R. (2015). Diseño y ejecución de una propuesta globalizada de matemáticas manipulativas en educación primaria. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”. (pp. 343-361). Lugar: Academia de Artillería de Segovia

METODOLOGÍA INVESTIGADORA: LA ESTRATEGIA *¿QUÉ SI NO?* CON EJEMPLOS PARA LA CLASE

Constantino de la Fuente Martínez
IES *Cardenal López de Mendoza*, Burgos.

Resumen

Cuando el profesor/a intenta acercar a sus alumnos y alumnas a los procesos de investigación matemática, se encuentra con dificultades: ¿qué es una investigación matemática en estos niveles educativos?, ¿se pueden trabajar en clase este tipo de tareas? ¿cómo podemos generar investigaciones matemáticas interesantes, adecuadas a su nivel académico y su nivel de desarrollo de la competencia matemática? Esta comunicación presenta varios ejemplos, extraídos de actividades de clase, relacionados con dos de las dificultades anteriormente señaladas: por un lado, la constatación de que sí es posible desarrollar procesos elementales de investigación matemática en las aulas de ESO y Bachillerato y, por otro, la ejemplificación de la eficacia de la estrategia didáctica ¿qué si no? (what if not?) en los procesos de generación de investigaciones matemáticas a partir de tareas de resolución de problemas (problem solving).

Palabras clave: *metodología investigadora, investigaciones matemáticas, resolución de problemas.*

INTRODUCCIÓN

El currículo de matemáticas de la nueva ley de educación hace hincapié en la realización de investigaciones matemáticas en todos los niveles educativos, desde Ed. Primaria hasta Bachillerato, como una forma de acercar al alumnado al verdadero rostro y a los quehaceres cotidianos de esta Ciencia. También menciona la elaboración, por parte de los estudiantes, de informes que recojan el proceso llevado a cabo y sirvan para desarrollar casi todas las facetas de la competencia matemática, teniendo un papel muy importante las relacionadas con la comunicación de y sobre las ideas matemáticas.

Una de las primeras cuestiones que surge en estos planteamientos se refiere al concepto mismo de investigación matemática. En este sentido, distinguiremos entre:

1. *Investigaciones o problemas abiertos*. Orton y Frobisher (1996) propusieron que *un "problema"… es "abierto" cuando no se especifica ninguna meta*[i]. Por ejemplo la tarea siguiente:

Ejemplo 1. *Investiga el número 0,10100100010000…*

En Estados Unidos, a esta tarea se le denomina *investigación matemática*; en otros países, por ejemplo en Inglaterra, se le llama *problema abierto*[ii].

2. *Proyecto de investigación.* Braverman (2006) y Braverman y Samovol (2008) definen un *proyecto de investigación* como *un conjunto de problemas de matemáticas con un tema específico, que requiera la exploración, la consideración de casos especiales, el pensamiento inductivo, la generalización, la propuesta de conjeturas, su prueba o refutación y el planteamiento de nuevos problemas originales que se basan en ideas del problema dado inicialmente.* Como podemos observar, la definición también caracteriza los procesos que conllevan estas tareas de investigación: *la exploración,* la consideración de *casos especiales, el pensamiento inductivo, la generalización, las conjeturas,* junto con su prueba o refutación y *el planteamiento de nuevos problemas* derivados del problema inicial. Estos autores también describen el proceso de transformación de un *pequeño problema* matemático (conjunto de problemas) en un *serio (para el estudiante de la escuela secundaria) trabajo de investigación*. Un ejemplo ilustrativo puede ser el que ellos mismos proponen (se presenta adaptado). El problema inicial es el siguiente:

Ejemplo 2. *Dados los números 1, 2, 3, …, 11, 12, colocar los signos + o – entre ellos para que la operación resultante dé como resultado cero. Hacer lo mismo con los números entre 1 y 13, entre 1 y 14, entre 1 y 15.*

Uno de los proyectos de investigación que podrían obtenerse de las tareas anteriores tiene por objeto resolver el problema de investigación siguiente:

Ejemplo 3. *Dados los números 1, 2, 3, …, n, colocar los signos + o – entre ellos para que la operación dé como resultado una cantidad S. Estudiar cuándo será posible.*

Por otra parte, habitualmente, en las tareas de resolución de problemas, la meta está bastante delimitada desde el principio, pudiéndose reformular para que sea más abierta o, como proponen Mason, Burton y Stacey (1982) y Schoenfeld (1985), se puede comenzar con una tarea de resolución de problemas y, más tarde, ir añadiendo ampliaciones o *extensiones* para acabar transformándola en una investigación; dicho con palabras de Frobisher (1994): *casi siempre es posible modificar* [una tarea problem-solving] *para transformarla en… una investigación*[iii]. Esta última manera de proceder, como proponen Polya (1945, 1962-1965, 1966); Mason, Burton, Stacey (1982); Schoenfeld (1985) y Guzmán (1991) en la última fase de sus modelos de resolución de problemas, tiene la ventaja didáctica para el estudiante de proporcionarle un *andamio* inicial (la meta original de la tarea de resolución de problemas) que sirve para una aproximación progresiva a la realización de tareas de investigación. En cualquier caso, siempre debemos diferenciar entre los proyectos de investigación que se obtienen a partir de tareas de resolución de problemas y las *investigaciones que tienen su propia existencia separada*[iv]. En los ejemplos siguientes se puede comprobar:

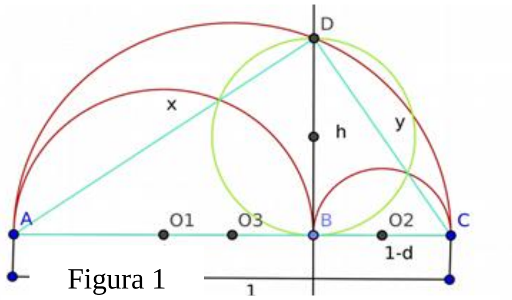


Figura 1

Ejemplo 4. *La Figura 1 representa un arbelos o cuchillo de zapatero. Arquímedes fue el primero que estudió matemáticamente este objeto. Construye un modelo matemático del arbelos, calcula las superficies de las regiones que intervienen e investiga las relaciones que hay entre ellas.*

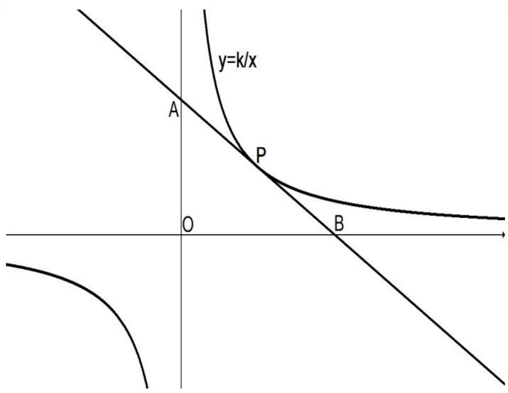


Figura 2

Ejemplo 5. *Considere la función $y = \frac{1}{x}$ y sea P un punto de la misma. La recta tangente a la función en el punto P interseca a los ejes de coordenadas en los puntos B (con OX) y A (con OY).*

1. Demostrar que el punto P es el punto medio del segmento AB y que el área del triángulo OAB es 2 u. d. s.

Considere la función $y = \frac{k}{x}$ y un punto P cualquiera de la misma. Como en la Figura 2, trace la recta tangente a la función en ese punto. Considere los puntos de corte de la recta tangente con los ejes de coordenadas, A y B. Demuestre los siguientes resultados:

2. P es el punto medio del segmento AB.

3. El área del triángulo rectángulo OAB es 2k.

Como se ha demostrado, el área del triángulo OAB siempre tiene el mismo valor y no depende del punto de tangencia P. En cambio, las características del triángulo sí dependen de la situación de P. Calcule las coordenadas de P para que se cumpla que:

4. El triángulo OAB sea isósceles.

5. La longitud de la hipotenusa del triángulo OAB sea mínima.

Por otra parte, el punto P es vértice de un rectángulo cuya base y altura coinciden, respectivamente, con sus coordenadas.

6. Compruebe que el área de este rectángulo es la mitad que la del triángulo OAB.

Considere ahora la función $y = \frac{k}{x^n}$*, siendo n un número entero positivo. En esta nueva situación, que generaliza la inicial, investigaremos si se siguen cumpliendo algunas de las propiedades estudiadas anteriormente.*

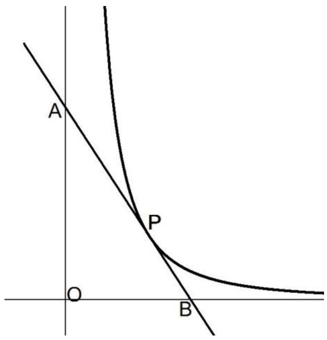


Figura 3

7. Represente gráficamente la función $y = \frac{k}{x^n}$*, para k=2, en función de la paridad del exponente n. Para un valor cualquiera k, explique cuál es la forma de la función dependiendo del valor n.*

La Figura 3 representa una función de la forma $y = \frac{k}{x^n}$ *,* $n \geq 2$*, para valores positivos de la variable independiente x. Sea P un punto cualquiera de la función.*

8. Demostrar que P no es el punto medio del segmento AB. Calcular las coordenadas del punto medio de AB.

Se considera ahora la nueva función $y = \frac{k}{n.x^n}$ *,* $n \geq 2$*, y sea P un punto cualquiera de ella.*

1. *Estudie la veracidad o falsedad de las siguientes conjeturas, justificándolo razonadamente:*
   a) *P es el punto medio del segmento AB*
   b) *El área del triángulo OAB es* $2k/_{a^{n-1}}$ *.*
2. *Calcule las coordenadas de P para que se cumpla que:*
   a) *El triángulo OAB sea isósceles.*
   b) *La hipotenusa AB del triángulo rectángulo OAB tiene longitud mínima.*

Ejemplo 6. *Hay números naturales que se pueden obtener como suma de consecutivos, por ejemplo 3=2+1; 10=1+2+3+4. Incluso algunos se pueden obtener de más de una manera, por ejemplo: 15=4+5+6 y 15=1+2+3+4+5. ¿Qué números naturales se pueden obtener como suma de números naturales consecutivos? ¿De cuántas maneras distintas para cada uno de ellos?*

Como se puede observar, la primera de las tareas planteadas (Ejemplo 4) analiza un objeto real que tuvo su utilidad en un momento de la historia. La investigación trata de estudiar y entender el objeto a través de un proceso de matematización por medio de un modelo matemático. El ejemplo 6 también plantea unas tareas de investigación, sobre números naturales consecutivos, que tienen entidad propia, no surgen de la extensión de una tarea de resolución de problemas. En cambio, el Ejemplo 5 parte de un problema cerrado sobre la función $y = \frac{1}{x}$, cuya pregunta aparece numerada como 1. A continuación se plantean varias cuestiones sobre las funciones de la forma $y = \frac{k}{x}$ y se finaliza con el estudio de los mismos interrogantes o similares para las funciones de la forma $y = \frac{k}{x^n}$, $n \geq 2$. Como vemos el problema de investigación surge de la extensión de una tarea inicial de resolución de problemas.

LA ESTRATEGIA *¿QUÉ SI NO?*

Si nos fijamos en el ejemplo 5, el proceso de obtención de las cuestiones de investigación, a partir de las planteadas para la función $y = \frac{1}{x}$, está regido por la *generalización de las variables* o *cualidades* que intervienen en el enunciado inicial. Esta idea de *generalizar* es una de las posibilidades que nos ofrece uno de los recursos con los que contamos a la hora de plantearnos el diseño de investigaciones en ESO o en Bachillerato. Shriki (2008) plantea el uso de la estrategia *¿Qué-si-no? (The "What-If-Not?" strategy)* o estrategia WIN. Se trata de un modelo para la generación de un problema de investigación, a partir de la presentación de un enunciado de un problema inicial. La estrategia se desarrolla en tres niveles:

Nivel I: *Listado de cualidades* del enunciado inicial;
Nivel II: *¿Qué-si-no? Búsqueda de alternativas* a las cualidades observadas;
Nivel III: *Presentación de nuevos problemas* inspirados en las alternativas encontradas.

La clave de la estrategia WIN es la *Búsqueda de alternativas* a las cualidades contenidas en el enunciado. Veámoslo con un ejemplo:

2						
3	5					
6	8	10				
11	13	15	17			
18	20	22	24	26		
….	….	….	….	….	….	

Figura 4

Ejemplo 7. *La tabla lateral se puede continuar indefinidamente escribiendo números. Averigua el primer número y el último situados en la fila 20º, así como la suma de todos los que componen esa fila.*

A partir del enunciado podemos resolver las cuestiones planteadas y pasar a otro problema. En este caso la tarea no deja de ser una actividad de resolución de problemas con una meta clara y cerrada. También podemos plantearnos más preguntas, aplicando la estrategia WIN. Para ello deberíamos hacer una lista de cualidades, cada una con sus alternativas, para obtener nuevos problemas. Este proceso, que requiere un análisis pormenorizado del enunciado inicial, lo podemos resumir en la tabla siguiente:

Tabla 1 Listado de cualidades y alternativas.

CUALIDADES	**ALTERNATIVAS**
Primer y último número de la fila 20ª	Primer y último número una fila cualquiera (n-ésima)
La suma de los números de la fila 20ª	La suma de los números de una fila cualquiera (n-ésima)
El primer número de la tabla es el 2	El primer número de la tabla es uno cualquiera: **m**
La diferencia entre el último número de una fila y el primero de la siguiente es 1	La diferencia entre el último número de una fila y el primero de la siguiente es **p**
La diferencia de los elementos de cada fila es 2	La diferencia entre los elementos de cada fila es **d**
En la 1ª fila hay un nº y en cada una de las siguientes hay un número más que en la anterior	En la 1ª fila hay **q** números y en cada una de las siguientes hay **r** números más que en la anterior

También pueden identificarse otras cualidades que no figuran en el enunciado inicial, por ejemplo:

1. Estudiar si el número 2014 está en la tabla, y si es así averiguar la fila y la columna en la que está situado.
2. Las columnas forman sucesiones de las que puede ser interesante calcular el término general.
3. Calcular la suma de todos los números de la tabla que son menores que uno dado y conocido de ella.

Estas cualidades, si se incluyen en la búsqueda de alternativas, pueden generar también nuevos problemas.

Una vez identificados valores alternativos para las cualidades del problema, combinando algunas de las posibles variantes, podemos plantearnos nuevos problemas. Por ejemplo:

- Averiguar el primer y último número de la fila n-ésima.
- Calcular la suma de los números que componen una fila cualquiera (n-ésima).
- Para un número cualquiera, averiguar si está en la tabla y, si está, dar sus coordenadas (fila, columna) (x, y) en las que se encuentra.
- Calcular la suma de todos los números de la tabla, que sean anteriores a uno conocido A.
- Calcular los términos generales de las sucesiones que forman las columnas.
- Resolver las preguntas anteriores si la diferencia entre los elementos de cualquier fila es **d**, en vez de 2.
- Resolver las preguntas anteriores si el primer número de la tabla es **m**, en vez de 2.
- Lo mismo cuando el primer número de la tabla es **m** y la diferencia entre los elementos de una fila cualquiera es **d**.
- Analizar lo que ocurre cuando la diferencia entre el último número de cada fila y el primero de la siguiente es **p,** en vez de 1 como en el problema inicial.
- Colocar, con otro criterio, los números en la tabla. Estudiar su estructura con preguntas similares a las anteriores.

Como podemos observar, y sin ánimo de ser exhaustivos, aparecen muchas cuestiones complejas, pequeños problemas de investigación, que pueden ser muy atractivos para los niveles de ESO o Bach.

ORIENTACIONES Y REFLEXIONES FINALES

Los ejemplos presentados intentan ilustrar la gran riqueza de contenidos con los que podemos contar a la hora de plantearnos, con nuestros alumnos/as, un acercamiento al proceso de creación y descubrimiento en matemáticas. Aprovechamos la parte final de la comunicación para plantear algunas orientaciones y reflexiones dirigidas a aquellos profesores y profesoras interesados en el tema:

1. Es posible acercar progresivamente a nuestro alumnado al proceso de creación y descubrimiento en matemáticas, mediante el planteamiento de investigaciones, al principio más sencillas y guiadas y después más complejas, autónomas y abiertas.
2. El profesor/a debe decidir la cantidad y la complejidad de este tipo de tareas, en función de su experiencia previa, de la de sus alumnos/as y dependiendo del nivel de desarrollo cognitivo de estos últimos. También debe plantear la realización de este tipo de tareas de forma voluntaria para aquellos alumnos/as que tengan un estilo de aprendizaje que favorezca el disfrute con la realización de estas propuestas.
3. Como hemos visto en esta comunicación, hay estrategias didácticas que permiten la extensión de tareas de resolución de problemas a investigaciones genuinas.
4. La propuesta de investigaciones y proyectos de investigación permite al profesor/a la creación paulatina de una *atmósfera de conjeturas* en el aula, mediante el uso de preguntas de diferentes tipos: *preguntas genuinas de investigación, meta-preguntas, preguntas abiertas y/o cerradas, preguntas de control,* etc. y enseñando a sus propios alumnos/as a que se hagan preguntas ellos mismos, transformando preguntas estándar, buscando variantes, etc.

BIBLIOGRAFÍA

- Braverman A., Samovol, P. (2008). Creativity: transforming problem solving to the research. En Saul, M. E., Applebaum, M. (Coord. Simposium 2: *Mathematical creativity and giftedness in secondary school*) *CMEG-5. Proceedings of The 5º International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted students.* Pág. 398-399. Haifa, Israel.

- Braverman, A. (2006). Systematic implementation of inquiry projects in secondary school mathematics for the development of students' creativity. Proposal od PhD thesis, BenGurion University of the Negev, Beer-Sheva.

- Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. En A. Orton y G. Wain (Eds.), *Issues in teaching mathematics* (pp. 150-173). Cassell, Londres.

- Guzmán, M. de, (1991) *Para pensar mejor*. Edit. Labor, Barcelona. (1994. Edit. Pirámide, Madrid.

- Mason, J. (2002). Minding Your Qs and Rs: effective questioning and responding in the mathematics classroom. En L. Haggerty (Ed.) *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*, RoutledgeFalmer, London, pág. 248-258.

- Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (1982) *Thinking Mathematically.* London: Pearson. Traducción española de 1988: *Pensar matemáticamente.* Edit. Labor, Barcelona.

-Orton, A., y Frobisher, L. (1996). *Insights into teaching mathematics.* Ed. Cassell, Londres

- Polya, G., (1962-1965). *Mathematical Discovery* (vol 1 y 2). Wiley, Nueva York.

- Polya, G., (1945). *How to solve it*. Princeton University Press, USA. Existe traducción al castellano en 1965: *Cómo plantear y resolver problemas*. Edit Trillas, Mexico.

- Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Edit. Tecnos, Madrid.

- Schoenfeld, A., (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press, Nueva York.

- Shriki, A. (2008). Assisting teachers to develop their students'creativity in mathematics–implementing the "what-if-not?" strategy. En Saul, M. E., Applebaum, M. (Coord. Simposium 2: *Mathematical creativity and giftedness in secondary school*) *CMEG-5. Proceedings of The 5º International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted students.* Pág. 408-410. Haifa, Israel.

Para hacer referencia al artículo:

De la Fuente C. (2015).Metodología investigadora: la estrategia ¿qué si no? con ejemplos para desarrollar en clase. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas". (pp. 363-368). Lugar: Academia de Artillería de Segovia

[i] Orton y Frobisher (1996), pág. 32

[ii] Ibid, pág. 27.

[iii] Frobisher (1994), pág. 158

[iv] Ibid, pág. 158

TIMSS: UNA VISIÓN INTERNACIONAL DE LA EVALUACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Francisco Javier García Crespo

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE)

Resumen

Desde el año 1995, primera edición, la IEA lleva a cabo el estudio TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study). TIMSS evalúa a nivel internacional los rendimientos en matemáticas y ciencias simultáneamente, en alumnos de cuarto curso de educación primaria. La prueba está basada en una revisión exhaustiva de los currículos de los países participantes. En los dominios de evaluación se distinguen los dominios de contenido (áreas temáticas y capacidades evaluables) y los dominios cognitivos, estos últimos desglosados en un conjunto de habilidades o destrezas que se convierten en el referente inmediato de las preguntas. En esta comunicación se recogen las características más destacadas del marco teórico de TIMSS y se presentan algunas preguntas liberadas que pueden ser utilizadas como material complementario en el aula.

Palabras clave: *TIMSS, competencia matemática, dominios de evaluación, procesos cognitivos, diseño del test, preguntas liberadas*.

EL INSTITUTO NACIONAL DE EVALUACIÓN EDUCATIVA (INEE)

La estructura orgánica básica del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD), designa al Instituto Nacional de Evaluación Educativa, dependiente de la Dirección General de Evaluación y Cooperación Territorial, como organismo responsable de la evaluación del sistema educativo español.

El INEE presta especial atención a la tarea de difusión que tiene encomendada. Esta función la realiza a través de la publicación de informes, boletines informativos y otros materiales con el objetivo principal de ser útiles para los miembros de la comunidad educativa.

FINALIDAD DE LAS EVALUACIONES

Las evaluaciones inspeccionan la calidad de la oferta educativa para conocer su funcionamiento, persiguiendo el objetivo final de servir como guía en la toma de decisiones, encaminando estas hacia aquellas medidas que conducen hacia la innovación y mejora del sistema educativo.

Los criterios empleados permiten medir el rendimiento educativo a distintos niveles: alumnado, centros escolares y sistemas educativos. Para obtener dicho conocimiento se valoran los aprendizajes de los alumnos y alumnas, cuyo trabajo se reconoce y certifica. Además, las evaluaciones permiten elaborar “Indicadores educativos”, puntos de referencia para valorar la eficacia de la educación, e “Identificar competencias clave” como aquellas que facultan a los estudiantes y trabajadores de la educación para tener un papel activo en esta sociedad del conocimiento.

LAS EVALUACIONES INTERNACIONALES

Es función del INEE, en colaboración con las Administraciones educativas, la coordinación de la participación del Estado español en las evaluaciones internacionales.

Distintas organizaciones internacionales promueven este tipo de evaluaciones.

OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos)

Esta organización está formada por 34 estados, entre ellos España, y su objetivo es la coordinación de sus políticas económicas y sociales.

Organiza las siguientes evaluaciones:

- PISA (Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes. Programme for International Student Assessment)
- TALIS (Estudio Internacional de Enseñanza y Aprendizaje. Teaching and Learning International Survey)
- PIAAC (Programa para la Evaluación Internacional de las Competencias de Adultos. Programme for the International Assessment of Adult Competences)

IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement)

La IEA es una asociación independiente, cuyos miembros son universidades, institutos o agencias ministeriales dedicadas a la investigación sobre evaluación educativa. El Instituto Nacional de Evaluación Educativa es miembro de la IEA. Organiza las siguientes evaluaciones:

- PIRLS (Estudio Internacional de Progreso en Comprensión Lectora. Progress in International Reading Literacy Study)
- TIMSS (Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias. Trends in International Mathematicas and Science Study)

TIMSS-MATEMÁTICAS 2011

TIMSS evalúa matemáticas y ciencias. Los dos estudios evalúan a alumnos/as de 4º grado internacional (4º de Educación Primaria en España).

La muestra española en TIMSS estaba formada por 4183 alumnos/as de 4º curso de Educación Primaria, 151 colegios y 200 profesores/as. Los mismos centros, profesores/as y alumnos/as participaron en PIRLS. En este estudio Andalucía y Canarias ampliaron el tamaño muestral en sus respectivas comunidades, por lo se alcanzó un tamaño muestral en la muestra española de 8580 alumnos/as, 312 centros y 402 profesores/as.

A nivel internacional participaron 50 países y sistemas educativos en TIMSS.

El marco teórico en TIMSS-matemáticas 2011 aprobado en las asambleas internacionales de coordinación del estudio sigue los siguientes porcentajes de dominios de contenido y dominios cognitivos: Números 50%, formas y mediciones geométricas 35%, representación de datos 15%; conocer 40%, aplicar 40% y razonar 20%.

Las preguntas de las pruebas en PISA 2012 se insertan en contextos reales atendiendo a cuatro tipos: personal, social, profesional y científico y evalúan las capacidades matemáticas fundamentales: comunicación; representación; diseño de estrategias; matematización; razonamiento y argumentación; utilización de operaciones y lenguaje simbólico, formal y técnico; utilización de herramientas matemáticas

DISEÑO Y APLICACIÓN DE LAS PRUEBAS

La obtención de resultados representativos y fiables, y la distribución por niveles requiere gran número de ítems, para ello se usa una distribución de cuadernillos por bloques. De tal manera que no todos los alumnos contestan a los mismos ítems, pero el conjunto total de los alumnos contestan de manera equilibrada a todos los ítems de la prueba. En TIMSS Cada bloque tiene entre 10 y 14 preguntas de dominios de contenido y cognitivos en proporción del marco teórico. 175 ítems de matemáticas, 172 ítems de ciencias y 8 bloques de cada materia son de anclaje.

RESULTADOS EN TIMSS-MATEMÁTICAS 2011

Los resultados TIMSS recogen, en primer lugar, las puntuaciones medias obtenidas por los alumnos/as de cada país o sistema educativo. En segundo lugar, los estudios reflejan la distribución del alumnado en cinco niveles de adquisición de la competencia, desde el “Muy bajo” hasta el “Avanzado”, según la puntuación que obtienen. Además se analizan diferentes variables del contexto educativo recogidas en los cuestionarios de los directores, profesores/as y alumnos/as.

Mayores puntuaciones se corresponden, en general, con países con mayores índices de desarrollo. Resulta también de interés la distribución por niveles, en especial los porcentajes de alumnos/as situados en los niveles superiores e inferiores.

A continuación se describirán brevemente los resultados de estos estudios, centrando la atención en los españoles:

- En este estudio las mejores puntuaciones medias en Matemáticas son las de Singapur (606), Corea (605) y Hong Kong-China (602).
- España consigue 482 puntos y se sitúa por debajo del promedio de la OCDE (522).
- Corea consigue el mejor rendimiento de los países de la OCDE con 83 puntos por encima de la media. En TIMSS-matemáticas la distancia de España con la media OCDE es 40 puntos, mayor que en PIRLS-lectura (25 puntos).
- El porcentaje de alumnos/as excelentes en España es un 1%, inferior al 5% de la OCDE. En cuanto a los alumnos/as rezagados, el porcentaje en España es un 13%, mientras que en la OCDE es un 7%.

Las variables de contexto individual, familiar y escolar de los alumnos/as evaluados en permiten relacionar los resultados con el entorno en el que se desarrollan los aprendizajes. En los informes internacional y español se recoge numerosa información sobre estas variables. Podemos destacar:

La diferencia bruta de puntuación media entre los centros de titularidad pública y privada es de 19 TIMSS-matemáticas. Esta diferencia desaparece al descontar el efecto del ISEC de los centros y de los alumnos/as (no son diferentes de cero de forma significativa).

Otros factores que explican en mayor medida la variación en el rendimiento del alumnado son:

- **Contexto del estudiante**: la lectura fuera del colegio (17% de varianza explicada).
- **Contexto familiar**: la lectura por placer (8% de varianza explicada).
- **Contexto del docente**: las limitaciones físicas de los alumnos (falta de sueño y la nutrición) vistas por el propio profesor (6% de varianza explicada).
- **Contexto del centro educativo**: la valoración del colegio (satisfacción de los docentes con sus compañeros, con el proyecto del centro, con los padres y sus alumnos) (7,5% de varianza explicada).

MATERIALES, RECURSOS Y DIFUSIÓN DE LOS ESTUDIOS

El Instituto Nacional de Evaluación Educativa, en su labor de difusión de la información generada por los diferentes estudios de evaluación del sistema educativo que coordina, dispone de gran cantidad de información que pone a disposición de la comunidad educativa a través de su página Web: http://www.mecd.gob.es/inee. De especial interés para el profesorado es el enlace a los recursos e ítems liberados de pruebas de evaluación. En la sección de ítems liberados se recogen diversos estímulos e ítems que se han hecho públicos después de formar parte de un estudio internacional o nacional.

Referencias

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2013). *PIRLS - TIMSS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. IEA.Volumen I: Informe español*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. http://www.mecd.gob.es/inee/portada.html

IEA (2013). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics. Amsterdam: IEA: http://www.iea.nl/*

Para hacer referencia al artículo:

García, F.J. (2015). TIMSS: Una visión internacional de la evaluación de las matemáticas en educación Primaria. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”.* (pp. 369-372). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

LA MOTIVACIÓN EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Jesús Ramón García Jerónimo

Academia de Artillería

Resumen

La innovación metodológica en el campo de las matemáticas supone un reto importante ya que se trata de una de las materias más determinantes en la construcción de los procesos de pensamiento del individuo. Para proponer intervenciones metodológicas eficaces es necesario identificar las variables más relevantes e identificar su influencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Entre estas variables destaca el papel de la motivación a la hora de explicar las diferencias individuales en el aprendizaje de las matemáticas. En consecuencia se plantea la necesidad de realizar un abordaje integral creando un contexto que fomente la motivación en la comunidad educativa tanto de profesores (formación continuada, incentivos, etc.) como de alumnos. En cuanto al alumno, es fundamental tener en cuenta sus necesidades académicas, personales y cognitivas para diseñar actividades que estimulen un aprendizaje profundo y significativo de los procesos matemáticos.

Palabras clave: *procesos de pensamiento, metodología, motivación, aprendizaje significativo.*

INTRODUCCIÓN

La innovación en la docencia de las matemáticas ha sido siempre motivo de interés pedagógico y metodológico, ya que se trata de una de las materias más importantes en la construcción de los procesos de pensamiento a lo largo de las diferentes etapas evolutivas y educativas del individuo. El proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es especialmente complicado e incluye gran cantidad de variables que se deben tener en cuenta a la hora de elaborar proyectos de innovación y mejora. Estas intervenciones innovadoras deben pretender identificar aspectos de la docencia matemática susceptibles de optimizar y/o actualizar para lograr mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los procesos lógicos, favorecer la comprensión de conceptos y potenciar actitudes positivas en relación con esta importante materia. La renovación metodológica en las matemáticas ha sido una de las grandes preocupaciones de la comunidad educativa como se pone de manifiesto con la organización de diversas actividades como olimpiadas matemáticas, canguro matemático, planes nacionales como el PROA (Programas de refuerzo, orientación y apoyo) o autonómicos como el Plan de mejora del éxito educativo de la Junta de Casilla y León. El presente congreso es una muestra más de este interés por buscar metodologías novedosas que mejoren la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Pero, como se comentaba anteriormente, no es tarea fácil ya que las dificultades de aprendizaje en las matemáticas están influidas por diferentes factores que se analizarán con más detenimiento en los siguientes apartados.

FACTORES RELEVANTES EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Complejidad de las matemáticas

En primer lugar se trata de una asignatura compleja que requiere de la adquisición y utilización de diversas capacidades o competencias de gran trascendencia para el desarrollo intelectual del individuo. Entre estas capacidades están el pensamiento lógico, procesamiento de conceptos abstractos, resolución de problemas, cálculo numérico, razonamiento inductivo y deductivo, obtención relaciones causa-efecto, operar con símbolos etc. Para explicar esta complejidad se han realizado diferentes investigaciones que intentan aclarar el procesamiento matemático desde diversos enfoques. Según la teoría de las inteligencias múltiples (Gardner, 1983), la inteligencia no es algo unitario sino que existen 8 tipos de inteligencia: Intrapersonal, interpersonal, lingüístico-verbal, visual-espacial, musical, kinestésica-corporal, naturalista y lógico matemática. En concreto, la inteligencia lógico-matemática se refiere a la capacidad para construir soluciones, resolver problemas, estructurar elementos para realizar deducciones y fundamentarlas con argumentos sólidos y usar los números de manera efectiva y razonando adecuadamente. Estudios neurocognitivos (Warrington, E. 1982; McCloskey, Caramazza y Basili, 1985; Salguero, M. y Alameda J., 2003 y 2011) parecen apoyar la concepción de que el procesamiento matemático comprende dos procesos principales a nivel cognitivo: el pensamiento numérico y el cálculo aritmético. El pensamiento numérico procesa las tareas de estimar cantidades y contar elementos, existiendo en los individuos desde edades muy tempranas; esto indica una base innata con circuitos neuronales preparados para la tarea de contar que con la experiencia y que con el aprendizaje adquieren mayor complejidad. Es decir el pensamiento numérico tiene un componente innato y otro adquirido mediante el aprendizaje. El otro proceso es el cálculo aritmético que es una de las capacidades más evolucionadas en la especie humana y supone interrelacionar las cantidades numéricas mediante reglas espaciales y semánticas, en distintas combinaciones y productos. Estos procesos constan de habilidades interdependientes pero relacionadas entre sí.

Para explicar el razonamiento matemático se han propuesto varios modelos como el cognitivo de McCloskey y cols. (1986) y el Modelo neurofuncional de Triple código de Dehaene y Cohen (1995). Según McCloskey el procesamiento matemático se compone de un input (sistemas de procesamiento numérico y de cálculo), una central de representaciones abstractas con dos módulos (logográfico y fonográfico), y un output (producto). El modelo de triple código de Dehaene y Cohen (1995) asume que hay tres rutas asemánticas con tres categorías de representación mental o códigos: Código verbal auditivo, código analógico de magnitud y código visual arábigo. Los estudios neurológicos parecen apoyar parcialmente este último modelo sobre la actividad cerebral matemática, relacionando estructuras cerebrales con la propuesta de Dehaene y Cohen.

Estudios con técnicas de neuroimagen han identificado que el procesamiento matemático exacto se localiza fundamentalmente en el lóbulo frontal, lóbulo parietal del cerebro (surco intraparietal y región inferior) y giro angular. La región inferior parietal sería la responsable del pensamiento matemático, cálculo aproximado y la capacidad cognitiva visual-espacial. Pero el procesamiento matemático complejo no solo implica estas áreas, sino que necesita de la interacción simultánea de varias zonas cerebrales que procesan información numérica, verbal, espacial, conceptual, cálculo aritmético, pensamiento abstracto, etc. En individuos con problemas de cálculo y aritméticos se han identificado áreas cerebrales con menor densidad de materia gris y menor actividad neurológica. Gallese y Lakoff (2005) añaden un matiz sensorio-motor al procesamiento abstracto, afirmando que el pensamiento es multimodal y se localiza en regiones cerebrales diferentes es decir, "las modalidades sensoriales como la visión, el tocar o el oído están en realidad integradas mutuamente con el movimiento motor y la planificación" De este modo, hay una colaboración entre los diferentes sentidos que hace posible la aparición de conceptos abstractos (Radford, Bardini y Sabena, 1997).

Abundando en el procesamiento cerebral de las matemáticas, Serra, J., Adan, A., Pérez, M. Lachica, J. y Membrives, S. (2010) afirman que el conocimiento del sustrato biológico puede facilitar el diseño de un abordaje psicopedagógico más adecuado y eficaz que permita compensar el déficit en el procesamiento aritmético, con la consecuente mejora en el rendimiento académico de individuos con dificultades. El campo neuropsicológico se presenta como una de las áreas de gran utilidad para el aprendizaje de las matemáticas, aunque por el momento sus aplicaciones concretas en la educación son limitadas. En un futuro los avances neuropsicológicos serán de ineludible interés para el docente. Sirva esta breve exposición para ilustrar la complejidad del procesamiento matemático y la influencia en cada individuo de diferentes factores que deberán tenerse en cuenta en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

El profesor de matemáticas

Por otro lado, existe la figura del profesor cuya intervención es clave sobre todo en la enseñanza de las matemáticas. Si bien según proponen las teorías constructivistas del aprendizaje y el Espacio Europeo de Educación superior (EEES), el centro del proceso educativo es el alumno, el profesor resulta decisivo a la hora de guiar este proceso, trasmitir conocimientos, diseñar actividades, favorecer actitudes adecuadas y proporcionar el contexto preciso para favorecer el aprendizaje matemático. Es evidente que la innovación metodológica no es posible sin la participación activa e implicación afectiva del docente y de todos aquellos que participen en un proceso de mejora. El profesor de matemáticas ha recibido en su formación las competencias matemáticas acordes a su nivel educativo pero puede haber carencias en cuanto a las

DECÁLOGO DE PUIG

1. No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en clase en cada caso al alumno, observándole constantemente.

2. No olvidar el origen concreto de la Matemática, ni los procesos históricos de su evolución.

3. Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.

4. Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.

5. Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.

6. Estimular la actividad creadora, despertando el interés directo y funcional hacia el objetivo del conocimiento.

7. Promover en todo lo posible la autocorrección.

8. Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.

competencias pedagógicas. Por ello para poder desarrollar su labor con garantías es preciso que el docente adquiera una completa formación[i] para mejorar y actualizar competencias educativas, metodológicas, habilidades de comunicación, conocimientos pedagógicos, procesamiento cognitivo, el papel de la motivación para la docencia, etc. Para que el profesor introduzca metodologías eficaces es necesario prestar una atención individualizada al alumno, favorecer actividades que faciliten el descubrimiento de las soluciones de forma activa, estimular la motivación, reforzar el éxito educativo etc. Estas ideas que pueden parecer novedosas ya se planteaban en el decálogo de Puig (1955) que suponen un anticipo a las medidas sugeridas por el Espacio Europeo de Educación Superior. Aunque existen métodos estandarizados como el método del caso, el “aprendizaje basado en problemas”, el aprendizaje basado en proyectos, la tormenta de ideas etc., el docente tiene un papel importante para adaptar y diseñar metodologías innovadoras en el aula.

Una de las habilidades importantes para que el docente sea capaz de diseñar actividades variadas y atractivas es la creatividad. La enseñanza tradicional ha otorgado en ocasiones un papel secundario a los procesos creativos, impidiendo el uso de la imaginación y penalizando las equivocaciones. Pero la metodología actual exige profesores que planifiquen actividades innovadoras donde existan variedad de ideas y diferentes alternativas que den respuestas a los problemas o necesidades planteados. Ahora bien, se puede pensar que es una cuestión de talento innato y que no todos los individuos pueden desarrollar ideas creativas. Nada más lejos de la realidad; para Perkins (1990) la creatividad se basa en capacidades psicológicas universalmente compartidas y critica la postura tradicional de plantear tareas que requieren una solución única y de sencilla solución. Una persona creativa se caracteriza por un amplio conocimiento de una determinada materia y una elevada dosis de motivación para “jugar” con esa información. La capacidad creativa se puede potenciar especialmente en el ámbito educativo tanto en el docente como en el alumnado pero para ello es necesaria una actitud positiva hacia estrategias pedagógicas y metodológicas que proporcionen un contexto favorable. Existen técnicas específicas para desarrollar la creatividad de diferentes formas como la toma de decisiones, la solución de problemas, tormenta de ideas[ii], etc.

El alumno

Si hay algo sobre lo que no existe duda es que el alumno es el protagonista principal en el espacio enseñanza-aprendizaje y como tal se debe tener en cuenta sus capacidades lógico-matemáticas, grado de madurez, interés por la asignatura, autoconcepto, grado de inteligencia emocional, experiencias previas y otros factores que afectan al aprendizaje de la asignatura. Las teorías “constructivistas”[iii] explican el aprendizaje del individuo en base al papel activo del alumno y la construcción del conocimiento por sí mismo a partir de enseñanzas anteriores. Por ello es básico, según esta concepción, fomentar actividades coherentes con sus conocimientos previos que resulten intrínsecamente interesantes, significativas para el alumno y relacionadas con la vida real. No se trata de desterrar la metodología tradicional pero si es necesario integrar las nuevas metodologías para proporcionar contextos favorecedores en el espacio enseñanza aprendizaje. La dificultad estriba en que los alumnos muestran diferencias individuales respecto a dimensiones cognitivas, motivacionales, sociales, afectivas, hábitos de estudio, estrategias de aprendizaje etc. que tienen influencia en el rendimiento; en relacióN a las matemáticas resultan especialmente significativas las actitudes hacia las matemáticas adquiridas en las primeras experiencias de aprendizaje.

En el párrafo anterior se mencionaron los aspectos emocionales como uno de los factores que ejercen una gran influencia en el aprendizaje del alumno. Como se comentó anteriormente, Gardner ya hablaba de inteligencia intrapersonal como elemento necesario para conseguir niveles óptimos de autoestima y automotivación; para este autor también era importante la comunicación y capacidad de liderazgo que denominaba inteligencia interpersonal. Estos conceptos han sido tratados por otros autores como Goleman (1996) quien acuñó el término “inteligencia emocional”**.** Goleman afirma que el éxito de las personas no viene determinado solamente por su coeficiente intelectual o por su formación académica, sino que es necesario tener en cuenta el autoconocimiento y control emocional. La inteligencia emocional se puede entender como la capacidad del individuo para identificar su propio estado emocional y entender el de los demás para poder actuar en consecuencia. Esta habilidad puede ser fomentada en todos los individuos ya que su desarrollo aporta muchos beneficios a las personas que son capaces de manejarse eficazmente a nivel emocional. La inteligencia emocional facilita los procesos comunicativos y las relaciones personales, permitiendo a las personas entender y controlar sus impulsos; el espacio enseñanza-aprendizaje no es una excepción y las matemáticas no son ajenas a los beneficios del conocimiento emocional. Sin embargo la falta de la misma puede interferir en los procesos cognitivos deteriorando el rendimiento del individuo en diferentes áreas y por supuesto dificultando el aprendizaje matemático. Ser expertos en inteligencia emocional nos permite tomar conciencia de nuestras emociones y entender las de los alumnos, comprender los sentimientos propios y ajenos, controlar las presiones diarias, tolerar las frustraciones del trabajo, facilitar el trabajo en equipo y en definitiva adoptar una actitud empática que nos permitirá mayores posibilidades de desarrollo personal y social. Para el profesor es muy útil ser consciente de las consecuencias positivas de gestionar adecuadamente las emociones y fomentar en el alumno dicha capacidad. De nuevo todo lo anterior apunta hacia una tutorización académica de todos los alumnos con una atención individualizada al alumno según sus características y necesidades específicas a nivel cognitivo, emocional, sociocultural y familiar.

Otro asunto importante es el descenso de actitudes positivas hacia las matemáticas a medida que aumenta el nivel educativo. En concreto se aprecia este fenómeno en el paso de primaria a secundaria según estudio longitudinal realizado en Centros educativos de Castilla y León (Hidalgo, S., Maroto, A., Ortega, T., y Palacios, A., 2008) a lo largo de tres cursos escolares. En este mismo estudio se observó mejor actitud de los varones hacia las matemáticas destacando más en puntuaciones actitudinales altas. Esto indica que la maduración de los alumnos, el sexo y otros factores influyen en las actitudes hacia las matemáticas por lo que es un aspecto más a tener en cuenta a la hora de valorar el estado motivacional del alumno y su influencia en el rendimiento. De nuevo se plantea la necesidad de la atención individualizada al alumno y adaptar nuestras estrategias metodológicas a las necesidades específicas de los alumnos.

Interacción profesor-alumno

Entre el profesor y el alumnado se dan diferentes interacciones (a nivel colectivo e individual) que deben ser tenidas en cuenta ya que pueden interferir en el rendimiento educativo. La relación profesor alumno ha ido evolucionando desde una posición unidireccional a otra interacción más bidireccional aunque esto no supone simetría en la relación de poder y/o autoridad. Para que las interacciones que se dan en el aula sean adecuadas es esencial una comunicación eficaz entre el alumno y el profesor. Se entiende por comunicación a la relación existente entre un emisor y un receptor, que transmiten señales a través de un código común. Pues bien es deseable que el docente domine los elementos comunicativos (emisor, receptor, código, contexto, etc.) para lograr un intercambio de ideas fluido con los alumnos. Es necesario que el profesor adquiera un conocimiento especializado en la materia ya que la comunicación es una de las herramientas fundamentales en la interacción alumno-profesor. Para desarrollar una adecuada comunicación es interesante conocer las repercusiones de los diferentes contextos[iv] que pueden darse en el proceso comunicativo, la adquisición de habilidades de comunicación verbal y no verbal, el dominio de técnicas de control emocional, fomento de la escucha activa, dominio de estilos expositivos, etc. Se abre un amplio campo en el que el docente puede mejorar sus habilidades mediante una práctica continuada que mejore el "feedback" y la comunicación bidireccional con el alumno. Junto con estas medidas genéricas existen determinadas barreras personales (ansiedad-introversión-miedo a hablar en píblico) que precisan de un enfoque individualizado (Verderber, R., Verderber, K. y Sellnow, D., 2008).

Son numerosos los estudios que hacen referencia a la influencia de factores atribucionales causales externos, internos e interaccionales y su influencia en las actitudes del alumno y rendimiento académico. Silvestri y Flores (2006) al estudiar las atribuciones causales[v] señalan que son adecuadas para la comprensión de los múltiples y variados rasgos que los profesores y estudiantes identifican para explicar el fracaso y el éxito académico. En relación con lo anterior Bertoglia (2005) afirma que una de las interacciones más importantes y significativas que se da en el ámbito educativo es la relación profesor-alumno, proceso que se ve influenciado por diversos factores entre los que se encuentran los procesos atribucionales. Una aportación interesante y novedosa es la propuesta de una nueva categoría dentro de las atribuciones causales que Eberly, Holley, Johnson y Mitchell (2011) denominan atribuciones relacionales. Bajo esta perspectiva establecen la existencia de una categoría distinta a las tradicionales causas externas e internas donde las atribuciones en un contexto relacional no son la mera combinación de atribuciones causales internas o externas sino las resultantes de la interacción entre los participantes en la relación. En esta relación el profesor tiene una posición de poder lo que implica que debe ser responsable y consciente del tipo de interacción que se crea entre el alumno y el profesor, evitando situaciones que perjudiquen el rendimiento del alumno y favoreciendo la participación activa de los estudiantes creando un clima positivo y de respeto mutuo.

La motivación

En este apartado se tratará una de las variables que más influyen en el proceso educativo y que da título a esta comunicación: La motivación; es sin duda uno de los factores más importantes en el ámbito educativo y en concreto en las matemáticas. Por motivación se entiende el proceso que inicia una actividad y mantiene esa actividad o la modifica para conseguir un objetivo o determinadas metas. Una mejora de la metodología para aumentar la motivación tiene que actuar sobre varios factores como el impulso inicial, persistencia, dirección, intensidad y la meta a conseguir. En el ámbito pedagógico, se trata de predisponer al alumno al aprendizaje y realizar un esfuerzo para alcanzar unos objetivos educativos. Se trata de despertar en el alumno el interés por la materia (matemáticas) estimular el deseo de aprender los contenidos, actitudes o procedimientos y dirigir el esfuerzo a la consecución de unas metas. A estas alturas es importante señalar que el aprendizaje generalmente requiere un cierto grado de superación y voluntariedad por parte del alumno ya que no existe aprendizaje en el ámbito académico o escolar que no conlleve esfuerzo. Para ello es importante que el alumno sienta la necesidad de realizar un determinado aprendizaje con el profesor como guía para dirigir e impulsar este proceso eficazmente. Existen diferentes teorías para explicar la motivación; a continuación se hará mención brevemente a algunas de ellas.

Maslow (1968) propuso una ordenación jerárquica de los motivos o necesidades de los individuos, conocida como la pirámide motivacional de Maslow. Para él la persona tiene la capacidad inherente de autorrealizarse, y este crecimiento personal organiza todas las demás necesidades, debiendo satisfacerse las necesidades más básicas antes de abordar las de orden superior. Herzberg (1959), en su teoría de los dos factores propone que las personas estamos influenciadas por factores extrínsecos e intrínsecos cuando debemos realizar una tarea. Los factores extrínsecos a la tarea (premios, felicitaciones, beneficios etc.) evitan la desmotivación y los intrínsecos (logro, responsabilidad tarea en sí etc.) aumentan la motivación para conseguir los objetivos. El autor propone enriquecer la tarea para mejorar la motivación. Locke (1968) reconoce la gran importancia de las intenciones de los sujetos a la hora de motivarse para realizar una tarea. Para este autor los objetivos o metas son los que determinan la dirección del comportamiento del sujeto y contribuyen a la función energizante del esfuerzo. Otro elemento importante son los refuerzos e incentivos que el docente y la institución educativa utilizan para estimular el aprendizaje del alumno. En este campo los trabajos sobre condicionamiento operante son una referencia importante resultando varios tipos de aprendizaje como el aprendizaje por reforzamiento, el aprendizaje por evitación, aprendizaje por castigo, olvido etc.

Otras teorías motivacionales como la Teoría motivacional de las metas de logro (Nicholls, 1984a) plantean la percepción de la persona como un individuo intencional que opera de forma racional dirigido por unos objetivos hacia una meta. Hace referencia a la creencia de que las metas de un individuo consisten en esforzarse para demostrar competencia y habilidad en los contextos de logro. Dweck, (1986) entiende por "contextos de logro" aquellos en los que el alumno participa y de los que puede recibir influencias para la orientación de sus metas. Por lo tanto es una labor del profesor la orientación al alumno para ayudarle a conseguir los objetivos educativos. Existen más enfoques dentro de las teorías de la motivación pero valgan estos ejemplos para mostrar la importancia del componente motivacional como agente activador de determinadas conductas y por supuesto como herramienta educativa.

Otro aspecto importante y más frecuente de lo deseable es la figura del "profesor quemado", desmotivado o con desinterés por su profesión. El "burnout" o síndrome de estar quemado es una pérdida de interés que se da en los profesionales de diferentes colectivos en los que hay un importante componente vocacional y existe trato directo con personas. Este desgaste se produce por un desequilibrio ente las satisfacciones recibidas en el desempeño laboral y el esfuerzo realizado durante un periodo de tiempo prolongado. El profesorado es uno de los colectivos más afectado por este problema, por esta razón es preciso que se dignifique y valore la figura del profesor siendo reconocido su esfuerzo a nivel institucional y social; es una de las deudas que tiene la sociedad actual con los docentes, ya que las exigencias y expectativas hacia este colectivo se han incrementado notablemente y no así su consideración personal y profesional.

En cuanto al alumno, el nivel motivacional es el resultado de la influencia de un conjunto de factores que varían según el individuo (aprobación social, necesidades del alumno, conseguir metas, evitar fracasos, afán de distinción, competición, búsqueda de autoafirmación, competencia en la tarea, etc.). Esto se debe a que la motivación es un proceso interno e individual de cada persona por lo que el papel del profesor es despertar o impulsar la motivación en el alumno creando las actividades y el contexto adecuado para el aprendizaje. Por tanto para poder motivar adecuadamente es necesario que exista una comunicación óptima y conocer las características personales y necesidades[vi] particulares del alumno. La dificultad es identificar lo que estimula a nivel particular y compatibilizarlo con un nivel general de motivación en un aula diversa.

Además el aprendizaje es un proceso con diferentes fases y el impulso motivacional se hace necesario en cada una de ellas (motivación inicial y motivación de mantenimiento). Al inicio hay que crear una situación de necesidad educativa con actividades interesantes para establecer cierta tensión; posteriormente se establece la meta que satisface esa necesidad y se inicia el esfuerzo o actividad para resolver el problema o solucionar la dificultad. Como resultado de ello el alumno disminuye la tensión y aprende un procedimiento válido para aplicar en otra situación similar. El profesor tiene la importante función de despertar el interés del estudiante, guiando el esfuerzo de éste hasta alcanzar el objetivo educativo.

Un papel importante en la falta de motivación hacia el aprendizaje son las creencias negativas que relacionan dificultades de aprendizaje en matemáticas con un bajo nivel de inteligencia; tradicionalmente se han enseñado las matemáticas como un proceso cerrado centrado en reglas mecánicas donde prima la rapidez en la solución de problemas en lugar de educar en la comprensión de los procesos matemáticos. Esta visión lleva a algunos alumnos a asumir una autopercepción negativa de incapacidad provocando un patrón motivacional negativo con sentimientos de frustración, inseguridad y ansiedad. Cuando se instaura este patrón motivacional negativo hacia la asignatura se adoptan estrategias pasivas y defensivas en lugar de buscar actitudes positivas y de superación; en concreto investigaciones realizadas sobre el rechazo de las matemáticas señalan un círculo vicioso *dificultad-aburrimiento-suspenso-fatalismo-bajo autoconcepto-desmotivación-rechazo-dificultad* (Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios A., 2004). En el próximo apartado se ofrecerán una serie de medidas que pueden orientar hacia el diseño de metodologías que motiven al alumno y al profesor.

PROPUESTAS PARA MEJORAR LA MOTIVACIÓN EN LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

En primer lugar es preciso reconocer el compromiso institucional con la innovación y la mejora metodológica, poniendo en marcha diferentes iniciativas[vii] dirigidas a alumnos y profesores. Es un reto importante seguir adaptándose con flexibilidad y eficacia a las nuevas exigencias de la sociedad actual donde se producen cambios con mucha rapidez y que conllevan un enorme incremento de conocimiento en diferentes materias. En la sociedad de la información esta renovación metodológica tiene que ir de la mano de la incorporación progresiva de los avances tecnológicos (TICs) que van surgiendo e integrarlos de forma fluida en el espacio enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. También sería deseable un marco legal y un sistema educativo estables en el tiempo, consensuados políticamente y elaborados bajo el asesoramiento de especialistas en las diferentes áreas, para permitir que se materialicen las reformas en avances educativos y sociales. Los cambios en educación no se observan en pocos años sino que se producen lentamente ya que tiene que cambiar la cultura de la comunidad educativa y llegar estas transformaciones a la sociedad.

Desde las instituciones es necesario un diseño curricular donde se introduzcan módulos que sensibilicen sobre la importancia de las matemáticas para desarrollar procesos de pensamiento, educando no solo en contenidos sino también en actitudes positivas y de superación. Se debe fomentar desde los niveles iniciales un aprendizaje profundo basado en la comprensión de los procesos matemáticos, la formación de conceptos previos y los aprendizajes significativos. Las metodologías utilizadas han de crear un contexto favorable que permita la participación activa del alumno desarrollando patrones motivacionales positivos hacia las matemáticas.

Es deseable que el profesor esté motivado intrínsecamente, es decir que esté satisfecho por la propia actividad docente. Un profesor motivado disfruta con las matemáticas, le gusta la docencia y dedica esfuerzo y tiempo a la enseñanza de las matemáticas. Para conseguir esto la institución debe poner los medios para que el docente se sienta valorado por la comunidad educativa y la sociedad en general. Es conveniente que las instituciones tengan en cuenta las aportaciones de los docentes a la hora de poner en marcha mejoras educativas ya que así se garantiza el compromiso con los cambios a implementar. En relación con el reconocimiento social, sería conveniente una mayor apertura a las familias para que puedan conocer el trabajo del docente y exista difusión de su labor. Igual que se ha comentado la importancia de una adecuada interacción profesor-alumno es preciso mejorar la comunicación con las familias fomentando actividades conjuntas con la comunidad educativa que permitan la participación en el proceso enseñanza-aprendizaje de sus hijos.

Pero también es necesario un adecuado plan de incentivos que favorezca la motivación extrínseca del profesorado. Esos planes deben de hacerse de forma racional para reforzar a los profesionales que se comprometen de forma responsable con la innovación y desarrollan actividades que mejoran el aprendizaje de los alumnos. Se trata de distribuir los incentivos existentes según los objetivos educativos alcanzados y diseñar nuevas medidas que incluyan no sólo recompensas económicas (horas libres, premios, puntos para la trayectoria profesional, etc.). Para desarrollar programas de incentivos eficaces es conveniente que los profesores participen en su elaboración y que conlleven una forma de valorar el rendimiento del profesorado. Pero algunos tipos de incentivos tienen su lado negativo como es favorecer conductas de individualismo, competitividad desleal, desmotivación en los no incentivados, etc.

Es esencial dar opciones a la formación continuada del docente[viii] para poder perfeccionar las competencias profesionales generales y específicamente aquellas relacionadas con el ámbito matemático. Un profesor motivado por la docencia necesita actualizar sus conocimientos (aprendizaje a lo largo de la vida) para mejorar sus competencias personales y académicas en relación con la materia que imparte. Entre estas competencias es interesante que figuren la comunicación eficaz con el alumno, la creatividad en el diseño de actividades, autocontrol e inteligencia emocional, conocimiento de los mecanismos del procesamiento matemático, estrategias de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, innovación metodológica, técnicas de motivación en el aula etc. También es necesario adquirir formación en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TICs) para ponerlas al servicio de la mejora metodológica (pizarra digital, blogs, plataformas educativas, chats, material interactivo, apps etc.).

La meta y el objetivo principal del profesor debe ser el aprendizaje del alumno, por ello el profesor debe tomar una actitud empática, respetuosa e interesarse por él. Su conocimiento individual a nivel cognitivo, personal y académico junto con sus aspiraciones individuales es esencial para poder adaptar la metodología a las diferentes necesidades del alumnado. No sólo son importantes los resultados académicos, es imprescindible valorar el progreso del alumno y grado de maduración a nivel cognitivo para tomar las medidas correctoras necesarias e incentivar adecuadamente la superación personal. Una relación motivadora con los alumnos implica trato justo, respeto mutuo y confianza en el alumno.

Es importante que el profesor eduque de forma integral no sólo a nivel académico, favoreciendo el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas y asegurándose de que el alumno adquiere seguridad en su aprendizaje y confianza en sus posibilidades. En esta educación integral es necesario incluir la educación en valores como el respeto, la tolerancia, honestidad, responsabilidad, justicia etc. La herramienta más eficaz para conseguirlo es crear un contexto en el que se fomenten dichos valores y para ello es fundamental que los estudiantes tengan como principal referencia el ejemplo del docente. También es importante la coordinación del profesor con el resto de la comunidad educativa (Jefatura, servicios de orientación, tutores, etc.) y el contacto con el entorno familiar para trabajar conjuntamente en la educación del alumno. El profesor tiene un papel importante para inculcar en el alumno un estilo atribucional adecuado que mejore su motivación. Es mejor que el alumno atribuya el rendimiento a causas internas, estables y controlables ya que esto evita la disminución de la autoestima e inseguridad del alumno.

En relación con las matemáticas, es fundamental la figura del profesor para diseñar actividades que sean abiertas creativas e interesantes para el alumno. Es decir que impliquen la participación activa de los alumnos y sean ellos los que descubran las leyes subyacentes a los procesos matemáticos. Para ello se debe potenciar una metodología que no penalice los errores sino que fomente la creatividad y el pensamiento del alumno. Todo ello adaptado al nivel educativo del alumno. En los niveles iniciales la metodología puede incorporar actividades más lúdicas (juegos, magia, cuentos, actividades audiovisuales, etc.) para adquirir los conocimientos previos necesarios y las reglas básicas. En niveles educativos superiores las actividades irán dirigidas a que el alumno ponga en marcha competencias de trabajo autónomo, trabajo en equipo, actitudes participativas, análisis crítico, solución de problemas etc. Es necesario el diseño de actividades que relacionen los contenidos matemáticos con situaciones de la vida real y cotidiana; estas actividades deben ser apropiadas para la edad y el desarrollo evolutivo de los alumnos. Para conseguirlo es conveniente ampliar los límites del aula e incluir prácticas en laboratorios, actividades extraescolares, visitas a Centros, actividades transversales, etc. Es necesario despertar la motivación del alumno en todas las fases del proceso motivacional creando interés al inicio y manteniendo el nivel motivacional durante la actividad hasta conseguir las metas educativas propuestas.

CONCLUSIONES

Resumiendo mucho, la situación ideal sería aquella en la que el profesor está adecuadamente motivado y estimula la motivación en el alumno por el aprendizaje de las matemáticas. La innovación y mejora metodológica debe pasar por el diseño de actividades creativas y variadas propiciando la reflexión y el aprendizaje significativo. Para aumentar la motivación es importante que se perciba una utilidad de las matemáticas por lo que los ejercicios planteados deben permitir la conexión del aprendizaje con la realidad del alumno. Las metodologías innovadoras han de estar adaptadas a las circunstancias particulares de cada alumno como su etapa de maduración intelectual, necesidades, expectativas, estrategias de aprendizaje, estilo atribucional, contexto socio-cultural, etc. por lo que es necesario un seguimiento individual compatible con la atención al resto de alumnos del aula. También es preciso el trabajo en grupo y fomentar la participación activa de los alumnos por lo que es interesante potenciar las habilidades de comunicación. Todo lo anterior no significa que haya que prescindir de una metodología más tradicional basada en la exposición del profesor y el modelado de los procesos matemáticos; por el contrario la innovación metodológica debe buscar complementar y enriquecer las actividades más tradicionales. Este salto en la calidad metodológica implica una preparación del profesor de forma multidisciplinar y grupos de alumnos reducidos para poder realizar una atención más personalizada. En nuestra labor docente buscaremos crear un contexto que predisponga positivamente al alumno al aprendizaje de una asignatura que plantea cierta dificultad pero necesaria para un desarrollo integral. Cualquier docente que muestre interés y tenga preocupación por sus alumnos estará en condiciones de proporcionar un espacio educativo donde se favorezcan actitudes favorables para el aprendizaje de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D. (1968). Educational Psychology: A Cognitive View. Holt, R. & Winston. New York.

Bertoglia, L. (2005). La interacción profesor-alumno. Una visión desde los procesos atribucionales. *Revista de la escuela de psicología de la Facultad de filosofía y educación pontificia de la universidad de Valparaiso, 4,* 57-73.

Cole, L.; Nelson, I. (1961) Psychology of adolescence. Rinehart and Winston. New York.

Dehaene, S. y Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of Number Processing. *Mathematical Cognition; 1*, 83-120.

Dweck, C. (1986). Motivational processes affecting learning. *American Psychologist, (41)*, 1040-1048.

Eberly, M., Holley, E., Johnson, M. y Mitchell, T. (2011). Beyond internal and external: a dyadic theory of relational attributions. *Academy of Management Review, 36*(4), 731–753.

Gardner, H. (1983). Frames of mind. The theory of multiple intelligences. Basic Books. New York.

Goleman, D. (1996). Inteligencia emocional. Kairos. Barcelona

Herzberg, F., Mausner, B. y Snyderman, B. (1959). The Motivation to Work. Wiley. New York.

Hidalgo, S., Maroto, A., Ortega, T. y Palacios, A (2008). Estudio longitudinal del componente emocional matemático en el paso de primaria a secundaria. XII Simposio Investigación en educación matemática. Actas SEIEM Badajoz.

Hidalgo, S., Maroto, A., y Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de educación, 334,* 75-95.

Locke, E. (1968). Toward a Theory of Task Motivation and Incentives. Organizational Behavior and Human Performance, (3)2: 157-189.

Maslow, A. (1968). Toward a psychology of being. Van Nostrand. New York.

McCloskey, M, Sokol, S. M. y Goodman, R. A. (1986). Cognitive processes in verbal-number production: Inferences from the performance of brain-damaged subjects. *Journal of Experimental Psychology, 115*, 307-330.

McCloskey, M., Caramazza, A. y Basili, A. (1996). Cognitive mechanisms in number processing an calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain and cognition, 4*, 171-196.

Medina, A. (2009). Innovación de la educación y de la docencia. Editorial universitaria Ramón Areces. Madrid.

Nicholls, J. G. (1984b). Conceptions of ability and achievement motivation. En R. Ames , & C. Ames. *Research on motivation in education: Student* Motivation I, 39-73. Academic Press. New York.

Osborn, A. (1942). Cómo pensar. McGraw-Hill Book Co. Nueva York.

Perkins, David N. (1990). The nature and nurture of creativity. En Beau Fly Jones y Lorna Idol, 1990 Dimensions of Thinking and Cognitive Instruction. Hillsdale, Erlbaum. 415-443.

Piaget, J. (1955). Psicología de la inteligencia. Psique. Buenos Aires.

Puig, P. Decálogo de la didáctica matemática media. *Gaceta matemática,* 1ª serie. Nº 5-6. Madrid

Salguero, A. y Alameda J. (2003). El procesamiento de los números y sus implicaciones educativas. XXI Revista de educación, 5,181-190.

Salguero, A. y Alameda J. (2010). Diferencias neuroanatómicas y funcionales entre razonamiento numérico y cálculo: evidencia de doble disociación. *Análisis y modificación de conducta, 36* 153-154).

Serra, J., Adán, A., Pérez, M., Lachica, J., y Membrives, S. (2010). Bases neurales del procesamiento numérico y del cálculo. *Revista de Neurología, 50* (1), 39-46

Silvestri, L.I. y Flores, F.A. (2006). Profesores y estudiantes. Atribuciones causales del éxito y el fracaso académico. Universidad Nacional del Nordeste. Comunicaciones Científicas y Tecnológicas.

Tapia, J.A. (1992). Motivar en la adolescencia: Teoría, Evaluación e intervención. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid.

Verderber, R., Verderber, K. y Sellnow. D. (2008). The Challenge of Effective Speaking. Wadsworth Publishing Company. Belmont.

Vygotsky, L. S. (1978). Pensamiento y lenguaje. Paidós. Madrid.

Warrington, E. (1982). The fractionation of arithmetical skills: A single case study. Quartterly *Journal of experimental psycology, 34A*, 31-51.

Para hacer referencia al artículo:

García, J.R. (2015). La motivación en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·”*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”.* (pp. 373-383). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

---

[i] El aprendizaje para toda la vida o “Lifelong Learning” es un término que refleja el interés por el aprendizaje y actualización continuados en el ámbito profesional pero que debe integrarse en el proceso vital del individuo

[ii] La tormenta de ideas o “brainstorming”, es una técnica creativa propuesta por Alex Osborn (1942) que trabaja en primer lugar la tolerancia de todo tipo de ideas sin crítica previa seguida de un proceso de análisis y valoración de propuestas de forma racional.

[iii] Las teorías de Piaget (1955) con sus aportaciones sobre los mecanismos de acomodación y asimilación, Vigotsky (1978) con el concepto de “zona de desarrollo próximo” y Ausubel (1968) con su visión cognitiva y significativa del aprendizaje son ejemplos de teorías constructivistas.

[iv] Verderber et al.(2008) distinguen cinco contextos comunicativos: intrapersonal, impersonal, interpersonal, pequeños grupos y comunicación pública.

[v] Según Silvestri y Flores (2006) en lo que respecta a los rasgos destacados por los profesores, las atribuciones de causalidad de carácter endógeno incluyen una única subcategoría relativa a los factores propios del alumno; en tanto las atribuciones causales exógenas se establecen en torno a dos tipos de factores: los factores propios del profesor y los propios de la disciplina. En cuanto a los aspectos afectivo-motivacionales los estudiantes valoran la relación que establecen con los docentes; los profesores no resaltan como un rasgo condicionante del éxito o el fracaso su capacidad para establecer vínculos con el estudiante.

[vi] Luella Cole e Irma Nelsson en su libro “Psychology of adolescence” (1961) proponen una clasificación con los motivos dominantes de los adolescentes norteamericanos según el sexo. En los adolescentes varones los deportes, viajes y televisión aparecen en los primeros puestos, figurando la escuela en 12ª posición. Las adolescentes valoran en primer lugar los viajes, el cine y la ropa quedando la escuela en 10º lugar. En la fecha de la publicación de esta estadística no estaban desarrolladas las TIC,s por lo que es probable que los resultados actuales fueran diferentes.

[vii] A nivel autonómico existen iniciativas de mejora como el bachillerato de excelencia, modernización de las metodologías de la información y comunicación (TICs), página web conserjería de educación dirigida a diferentes colectivos, ayudas a la investigación del profesorado, programas de éxito educativo, contribución en actividades de la excelencia educativa, cursos de formación para profesores, centro de recursos on-line (CROL), etc.

[viii] En este sentido los Centros de formación e innovación del profesorado ofertan cursos para los docentes y en la página web de la Conserjería de educación de la Junta de Castilla y León existe un portal específico para ello: http://www.mecd.gob.es/alv/inicio.html.

UNIDAD DIDÁCTICA: LOS NÚMEROS REALES EN ESO. ELABORACIÓN DE MATERIALES DIDÁCTICOS PARA LA ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD UTILIZANDO UNA METODOLOGÍA COLABORATIVA EN EL AULA

Asunción García Olivares[a], Mª Consuelo Monterrubio Pérez[b], Tomás Ortega del Rincón[c]

[a]Centro de Educación de Adultos de Palencia

[b]IES María de Molina de Zamora

[c]Facultad de Educación. Universidad de Valladolid

Resumen

En este trabajo se presenta una pequeña parte de una unidad didáctica sobre los números reales en Educación Secundaria. En concreto, nos centraremos en el proceso de elaboración de la unidad didáctica que surge de la inquietud de los autores por tratar de mejorar el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, llevando al aula dos trabajos de investigación correspondientes a dos tesis doctorales que considerábamos que no podían quedarse solo en la teoría.

Así, se trabajará siguiendo la Metodología de Educación en la Atención a la Diversidad (MEAD) propuesta por García Olivares en su tesis doctoral y los materiales se elaboran siguiendo los criterios propuestos en la tesis doctoral de Monterrubio.

Palabras clave: *metodología, matemáticas, secundaria, diversidad, número real.*

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El profesor de Matemáticas se encuentra cada día con serias dificultades (sobre todo en Secundaria) para atender las necesidades educativas individuales de alumnos tan diferentes, tanto en actitudes como en aptitudes, dentro de su grupo natural de clase. Esta preocupación por paliar estos problemas detectados, nos llevó a tratar de elaborar una Metodología específica de Educación en la Atención a la Diversidad que permitiera atender a todos los alumnos en el aula, respetando sus ritmos de aprendizaje y sus intereses, y, sobre todo, que los alumnos aprovecharan la totalidad del período lectivo. Esta metodología parte de dos ideas fundamentales: un concepto de diversidad en el sentido más amplio, es decir, entendido como todo el conjunto de diferencias entre el alumnado que confluye en el aula y la idea de que educar en la diversidad es asumir que los alumnos con diferentes características deben educarse juntos. Otras características que se tienen en cuenta son la concurrencia en el aula de diferentes tipos de inteligencia, Gadner (1983) y la perspectiva afectivo emocional.

Para obtener un rendimiento mayor en el aula es necesario intentar mantener la atención de todos los alumnos, proponiendo en primer lugar tareas que les motiven, ya que si el alumno no quiere aprender, por mucho que el profesor explique, no aprenderá a no ser que le haga cambiar de actitud. En segundo lugar, deben ser adecuadas a su nivel, ya que si las tareas son muy difíciles el alumno se desanimará y si son demasiado fáciles, perderán todo el interés. Finalmente, hay que proponer tareas de aula que, basadas en los conceptos que se estén tratando, sean atractivas para los alumnos y cercanas a su contexto. Por esta razón en la elaboración de la unidad didáctica se intenta que haya cuestiones con diferentes niveles de dificultad, incluyendo cuestiones elementales para que todos los alumnos puedan trabajar en el aula y, además, se ha tratado de plantear problemas cercanos al alumno, modificando enunciados que podemos encontrar en cualquier libro de texto con una redacción que haga referencia a contextos próximos a él y a temas que le interesen. Esta tarea no es difícil, ya que la vida misma contiene una fuente inagotable de problemas que, siendo de interés para los alumnos, unas veces, requieren saber usar matemáticas para resolverlos y, otras, sentir la necesidad de aprender nuevos conceptos para poder abordarlos.

Desde otra perspectiva, para favorecer el aprendizaje de los conceptos se tiene que producir una memorización de dichos aprendizajes y, según Baddeley (2003), la instrucción de los alumnos debe contemplar las siguientes pautas: presentación del contenido, práctica, relación de la nueva información con la que ya se sabe y activación de alguna forma de consolidación. Observando estos aspectos, se puede proceder de forma global o pautada: en la primera modalidad, la presentación del contenido forma parte de la práctica y ésta es un elemento motivador, creando un marco de resolución de problemas que relaciona el contenido nuevo con el antiguo y que contiene elementos de consolidación; en la segunda, las cuatro fases transcurren secuencialmente. Con ambas modalidades los procesos de enseñanza-aprendizaje progresan de forma escalonada, respetando los ritmos de aprendizaje de los alumnos: la primera da lugar al modelo de trabajo de aula idealizado y la segunda, más realista, pero que se inspira en la anterior, al modelo pautado. En ambos modelos juegan un papel fundamental el respeto de los ritmos de aprendizaje de todos los alumnos, la organización y el desarrollo de las actividades en grupos de trabajo colaborativo. Este último aspecto juega un papel fundamental en la MEAD ya que el desarrollo de todas las actividades se hace en grupos de trabajo cooperativo, respetando los ritmos de aprendizaje de todos los alumnos.

Para la puesta en práctica de la MEAD, se observan las pautas establecidas por Baddeley, procediéndose del modo siguiente:

Fase de presentación: El profesor presenta los contenidos que van a ser tratados en el período lectivo durante unos cinco minutos. Esta presentación figura impresa en la unidad didáctica que se entrega a los alumnos, para que éstos dispongan de ella antes de la intervención del profesor y para que sea utilizada en todo momento.

Fase práctica: Los alumnos realizan las actividades en grupo, consultando al profesor cuando tienen alguna duda. Éste actúa como mediador, como orientador, y dejará que los alumnos reflexionen, intercambien sus puntos de vista, sus estrategias de resolución, etc., interviniendo únicamente cuando se haya llegado a una situación de bloqueo. También seleccionará aquellas tareas que debe realizar cada grupo (no todos los grupos deben realizar todas las tareas, sino aquellas con las que puedan aprender algo durante la clase y que estén adaptadas a sus características).

Fase de relación de la nueva información con la que ya se sabe: Las propias actividades están propuestas de forma que se relacionen los contenidos nuevos con otros ya desarrollados y que los alumnos debieran conocer, pero que en buena parte de los casos no es así y, por tanto, hay que establecer estas relaciones de forma continua. Con esta perspectiva, las tareas planteadas a partir de un enunciado, no sólo están relacionadas con el tema que están trabajando los alumnos en ese momento, sino que se enlazan con conocimientos desarrollados en cursos anteriores y que tienen que ver con pensamiento numérico y geométrico básicos.

Fase de consolidación: Se propone la resolución de varios problemas generales siguiendo la estructura: enunciado de un problema general, redacción de una historia o leyenda de los datos y propuesta de las tareas apropiadas a todos los grupos de trabajo.

En resumen, partiendo de este modelo, la unidad didáctica constará de dos partes. La primera parte, presentará los contenidos teóricos que serán expuestos por el profesor en los cinco primeros minutos de la clase, seguidos de actividades que el alumno debe realizar relacionadas con esos contenidos y que se correspondería con las dos primeras fases del modelo. La segunda parte, con problemas más largos en los que se plantean muchas cuestiones a partir de un enunciado general en los que se busca que el alumno relacione la nueva información con otros contenidos y consolide los conceptos presentados en la unidad.

Los materiales se elaboran siguiendo el modelo exhaustivo de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas propuesto en la tesis doctoral de Monterrubio y que puede encontrarse en Monterrubio y Ortega (2012). Este modelo está formado por una serie de organizadores: Objetivos, Contenidos, Conexiones, Actividades, Metodología, Lenguaje, Ilustraciones, Motivación, Tecnologías de la Información y de la Comunicación, Evaluación, Enfatización, Aspectos formales, Recursos generales y Entorno. Cada uno de los organizadores incluye un conjunto de indicadores que constituyen una guía para realizar el análisis y valoración de los organizadores anteriormente citados.

Además de poder analizar libros de texto con este modelo, consideramos que es un buen instrumento para la elaboración de materiales curriculares por parte del profesorado ya que, nos garantiza que se está prestando atención a una serie de aspectos que, sin tener un instrumento que guíe este proceso, no serían tenidos en cuenta. Además, constituye un elemento importante para la reflexión del profesorado. Tomando como base este instrumento, un grupo de profesores que deciden elaborar sus propios materiales curriculares pueden utilizarlo como guía para debatir y profundizar sobre determinados aspectos. La riqueza de estas discusiones, propiciadas por la utilización de este instrumento, potenciará la elaboración de materiales adecuados para la práctica docente del contexto en el que se desean aplicar.

Como se ha señalado, tanto la metodología propuesta, como los criterios con los que se elaboran los materiales, han sido sometidos a estudios sobre la validez y la fiabilidad, al tratarse de resultados de tesis doctorales.

Con la elaboración de esta unidad didáctica se pretende contribuir a la adquisición de las competencias básicas. Prestaremos especial atención a la competencia matemática. En el estudio PISA/OCDE (2006, 74) se entiende por competencia matemática *“la capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos”.* En particular, se identifican las siguientes competencias matemáticas incluidas en el proyecto PISA y extraídas de Rico y Lupiáñez (2008, 243): Pensar y razonar, Argumentar, Comunicar, Modelizar, Plantear y resolver problemas, Representar, Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones y Emplear soportes y herramientas tecnológicos.

Además, es interesante prestar atención a la idea de Matematización en dos sentidos:

Matematización horizontal: Consiste en traducir los problemas desde el mundo real al mundo matemático.

Matematización vertical: Se trata de utilizar conceptos y destrezas matemáticas.

Es preciso considerar los contenidos que se van a trabajar desde el punto de vista de la normativa legal. De acuerdo con el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria y su concreción en el Decreto 52/2007, el Número Real se trabaja a lo largo de toda la Educación Secundaria Obligatoria.

PRESENTACIÓN DEL MATERIAL

Para la elaboración de la unidad didáctica se tiene en cuenta el modelo de valoración de textos completo. Como se ha mencionado anteriormente, la unidad consta de dos partes, una que presenta los contenidos teóricos y actividades relacionadas con esos contenidos y otra con actividades de relación con otros contenidos y de consolidación. En esta ocasión, nos centramos en la presentación de una actividad que ponga de manifiesto como se trabaja para su elaboración y cómo se llevaría a la práctica. Se debe tener en cuenta que cada grupo no tiene que resolver todas las cuestiones, solo aquellas que se adapten mejor a sus características, aumentando progresivamente la dificultad de las tareas, siempre que no perciban que la tarea es un reto imposible de conseguir.

Consideramos el organizador Actividades del modelo de valoración de textos escolares de Matemáticas que propone prestar atención a los siguientes aspectos:

Adecuación de las actividades a los objetivos, a los contenidos y al nivel.

Secuenciación de las actividades en orden de dificultad.

Temporalización de la secuenciación de actividades.

Actividades propuestas (de taller, de investigación).

Ejercicios propuestos.

Cantidad de ejercicios diferentes.

Solución de los ejercicios propuestos.

Ejercicios para interiorizar el simbolismo, para trabajar el uso del lenguaje simbólico específico de las Matemáticas.

Ejercicios resueltos.

Cuestiones propuestas: teórica, numérica y gráfica.

Uso de construcciones geométricas.

Razonamiento Matemático en las actividades.

Temas transversales en las actividades.

Educación en la atención a la diversidad en las actividades.

Resolución de problemas como actividad.

Se puede observar la gran cantidad de indicadores que constituyen este organizador y que pone de manifiesto que, si se tiene en cuenta el modelo completo, son muchos los aspectos tratados.

No significa que una actividad contemple todos los aspectos que se proponen en la guía que estamos utilizando para la elaboración del material, sino que se tienen en cuenta en la unidad didáctica completa.

En primer lugar es preciso que la unidad didáctica permita trabajar todos los contenidos incluidos en la normativa legal. En concreto, en la actividad que presentamos se trabajará el contenido de las Fracciones que se desarrolla a lo largo de toda la secundaria de la forma siguiente, de acuerdo con el Decreto 52/2007 anteriormente citado:

Primer Curso

Números fraccionarios y decimales. Relaciones entre fracciones y decimales. Comparación y orden en los números fraccionarios y decimales. Operaciones elementales. Aproximaciones y redondeos.

Segundo Curso

Fracciones equivalentes. Simplificación de fracciones. Obtención de fracciones irreducibles equivalentes a otras dadas. Reducción a común denominador.

Operaciones elementales con fracciones, decimales y números enteros.

Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis.

Tercer Curso

Números racionales. Comparación, ordenación y representación sobre la recta.

Decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Decimales exactos y decimales periódicos. Fracción generatriz.

Operaciones con fracciones y decimales. Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis.

Potencias de base racional y exponente entero.

Cuarto Curso

Operaciones con números enteros, fracciones y decimales.

Actividad Propuesta

En el IES María de Molina de Zamora hay cinco grupos de 1º de ESO. En 1º A, hay 25 alumnos, en 1º B, 28 alumnos, en el 1ºC hay 26, en 1º D están matriculados 20 alumnos y en 1º E, hay 30. El profesor de Naturales se encuentra con los profesores de Sociales y de Inglés y les dice que hoy le han faltado a clase 1/5 en 1º A, 1/7 en 1º B, 2/13 en 1º C, 3/10 en 1º D y 6/20 en 1º E.

1) ¿Cuántos alumnos han faltado en 1º B?

2) ¿Podrías dar fracciones diferentes a las anteriores pero que represente la misma cantidad? Da por lo menos dos de cada una de ellas.

3) ¿En qué clase ha faltado la mayor fracción de alumnos? Justifica la respuesta.

4) Escribe las fracciones anteriores en forma de porcentaje.

5) ¿En qué clase ha faltado el mayor número de alumnos? ¿Cuántos han sido? ¿En qué clase han faltado menos alumnos?

6) El profesor de Sociales dice que a su clase de 1º C han faltado los 8/39, el de Inglés dice que le parece extraño porque en su clase ha faltado 14/91. El profesor de Naturales dice que es imposible porque no se ha marchado ningún alumno en toda la mañana. ¿Quién crees que se ha equivocado? ¿Por qué?

7) De todos los alumnos de 1º, los 4/43 han nacido en otro país, 2/3 han nacido en otra Comunidad Autónoma. ¿Qué fracción de alumnos ha nacido en España? ¿Cuántos alumnos han nacido en otra Comunidad Autónoma?

8) Los alumnos de un grupo dicen que en su clase han aprobado los 4/3. Los alumnos del resto de los grupos se ríen porque dicen que es imposible. ¿Te lo creerías tú? ¿Por qué piensas que el resto de alumnos no se lo ha creído?

9) La realidad es que en la clase, 1/10 ha sacado sobresaliente, 3/10 ha obtenido un notable, 1/6 ha tenido una calificación de bien y suficiente, lo han conseguido 1/3 de los alumnos. ¿Qué fracción de alumnos ha suspendido? Si el grupo es 1º E, ¿Cuántos alumnos han sacado notable?

10) El profesor de Matemáticas les ha propuesto realizar un trabajo para subir nota. Busca la información necesaria para el trabajo.

¿Qué pueblos antiguos tenían desarrollada una notación fraccionaria?

Busca información sobre cómo representaban las fracciones los egipcios, escribe algunos ejemplos de fracciones. ¿Cómo dibujaban la barra de fracción?

¿Cómo han evolucionado las fracciones a lo largo de la Historia.

Investiga sobre el papel de Fibonacci el desarrollo de las fracciones.

11) Los alumnos de 1º A han hecho el trabajo sobre las fracciones. El primer día hicieron ¼ del trabajo, el segundo, 1/3, el tercero 1/6 de lo que faltaba y el último día hicieron 30 folios. ¿Cuántos folios tenía el trabajo? Realiza una representación gráfica del trabajo realizado en los cuatro días.

12) La profesora de Matemáticas ha perdido el enunciado del problema que pensaba poner a los alumnos de 2º A. Sólo tiene la solución que es: 1/3 + 1/5 = 8 /15; 8 /15 de 60 son 32. Ayúdala a escribir el enunciado del problema, para que tenga tiempo de corregir vuestros ejercicios para mañana.

13) Los alumnos de 1º B están realizando el siguiente producto:

(1 - 1/2) ·(1 – 1/3)· (1- ¼) · …· (1 – 1/999) · (1 – 1 /1000)

¿Cuál es la solución? Generaliza el resultado.

14) Un compañero vuestro no sabe cuál de las siguientes fracciones es mayor, 355/113 o 333/106. ¿Cuál es mayor? Escribe la respuesta detallada para que lo pueda entender. ¿Son irreducibles esas fracciones?

Análisis De La Actividad

El carácter mismo de la actividad y de la metodología de trabajo propuesta con llevan que se trate de una actividad adecuada a los objetivos, a los contenidos y al nivel. Además, por la propia consideración de la MEAD, las actividades se secuencian en orden de dificultad. El apartado 10 y el apartado 13 constituyen actividades de investigación. Analizando sólo una actividad no se pueden valorar los aspectos relativos a los ejercicios en cuanto a número, si son repetitivos, etc. Se plantean cuestiones de diferentes tipos: teórica, numérica y gráfica. La actividad permite desarrollar el concepto de fracción y las operaciones, trabajando el Razonamiento Matemático. Es preciso observar que, además de los indicadores que corresponden al organizador de actividades, se tienen en cuenta otros organizadores, como por ejemplo, Conexiones y se presenta la actividad estableciendo conexiones con la vida cotidiana y con la Historia. Como se comentaba con anterioridad, no todos los aspectos están contemplados en cada actividad. Así, por ejemplo, si se quiere tener en cuenta el uso de construcciones geométricas o las conexiones con otras partes de las matemáticas como la Geometría, lo que se hace es cambiar el punto de partida y elaborar de nuevo un amplio conjunto de actividades a partir de este nuevo punto de partida. Por poner algún ejemplo de otras actividades cuya consideración completa excede a lo que se pretende en esta ocasión, podemos citar la actividad propuesta partiendo de la construcción con ellos de un Tangram donde les planteamos: ¿Qué fracción expresa la medida de cada pieza con respecto al total? De esta forma ya estamos contemplando el uso de construcciones geométricas.

Otra de las actividades contiene como punto de partida una noticia de prensa a partir de la cual se proponen una serie de actividades. Análogamente, en otra de las actividades se parte de recursos de la literatura (cuentos, capítulos o fragmentos de libros). A partir de los textos de partida se proponen cuestiones relacionadas con el número real, pero sin olvidar conexiones con otras ramas de las Matemáticas.

CONCLUSIONES

Se trata de un trabajo muy lento para poder desarrollar toda la unidad didáctica relativa a los números reales, pero a la vista de lo que ha supuesto personalmente esta forma de trabajo conjunta y los resultados obtenidos con la puesta en práctica en el aula de alguna de las actividades, consideramos que es un trabajo que merece la pena. Algunas de los resultados son un aumento de la motivación, la participación y la colaboración del alumno. En algunos casos de alumnos que habitualmente no hacen nada en clase, mejora la actitud para al estudio de las Matemáticas, produciéndose mayores aprendizajes. Este tipo de tareas se presenta, según sus propias palabras, como un reto, como un problema que tienen que solucionar con algún fin. De la experiencia en el aula se observa también que son los alumnos que menos trabajan con la docencia tradicional los que aumentan más el aprovechamiento del período lectivo, puesto que no hay ningún alumno que esté durante la clase sin hacer nada. Incluso se da la paradoja de que los alumnos que muestran su preferencia por la docencia tradicional declaran que el tiempo de dedicación (de trabajo en el aula) con esta metodología es superior que con la docencia tradicional. Además, como los grupos cooperativos son homogéneos y los alumnos siempre pueden estar trabajando, y de hecho lo están, porque nunca agotan las actividades propuestas, la gestión de la clase se hace incluso más fácil que con la docencia tradicional. Puede parecer que al tener cada problema de consolidación tantas cuestiones, se deben invertir demasiadas sesiones en la puesta en práctica de la unidad, pero como no todos los alumnos tienen que realizar todas, no se necesita más tiempo que el programado para esa unidad, ya que la finalidad de tantas cuestiones es que ningún alumno esté sin hacer nada porque no tiene nada que hacer o porque termina muy rápido. La finalidad es adaptarnos al ritmo de trabajo de cada alumno y es preferible, que si su ritmo es lento, realice pocas cuestiones a que no haga nada porque no puede seguir el ritmo de la clase y que si tiene capacidad para realizar cuestiones más difíciles, tenga tareas con mayor grado de dificultad que supongan un reto para él.

Referencias Bibliográficas

Baddeley, A. (2003): *Memoria Humana: Teoría y Práctica*. Ed. McGrawHill /Interamericana de España. Madrid.

Consejería de Educación (2007): Decreto 52/2007 de 17 de mayo por el que se establece el Currículo de la Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad de Castilla y León. BOCyL de 23 de mayo.

Gadner, H. (1983): *Frames of mind: The theory of multiple inteligences*. New York: Basic Books.

García Olivares, A. (2007). Educación Matemática atendiendo a la diversidad. Análisis de una metodología específica. Tesis doctoral dirigida por Ortega, T. Universidad de Valladolid.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007): Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE de 5 de enero de 2007.

Monterrubio Pérez, Mª C. (2007). Modelos de valoración de manuales escolares de Matemáticas. Tesis doctoral dirigida por Ortega, T. Universidad de Valladolid.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en educación secundaria. *Revista de Educación, 358*, pp. 471-496. ISSN (en línea): 0034-592-X. DOI: 10-4438/1988-592X-RE-2010-358-087.

OCDE (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación*. Santillana.

Ortega, T. (1999): Educación en la diversidad. Su evaluación. En T. Ortega (editor) *Temas Controvertidos en Educación Matemática. ESO y Bahillerato.* . U. Valladolid.

Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Para hacer referencia al artículo:

García, A., Monterrubio y M.C., Ortega, T. (2015). Unidad didáctica: Los números reales en ESO. Elaboración de materiales didácticos para la atención a la diversidad utilizando una metodología colaborativa en el aula. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas". (pp. 385-392). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

ESTADÍSTICA EN EL ENTORNO

Federico Gómez García

IESO de Puente de Domingo Flórez

Resumen

La utilización de proyectos no es la forma más ortodoxa de enseñar estadística descriptiva, pero sí parece ser una forma eficiente. La metodología descrita, basada en la propuesta de proyectos que responden a cuestiones cercanas al alumnado, apoyados por el aprendizaje colaborativo y la utilización de programas informáticos accesibles, ha supuesto una mejora en la forma de comprender los conceptos propios de estadística descriptiva en educación secundaria obligatoria para un alumnado con pocas motivaciones.

Palabras clave: *metodología, estadística descriptiva, proyectos, aprendizaje colaborativo.*

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA.

La enseñanza de estadística descriptiva en Educación Secundaria Obligatoria en muchas ocasiones se ha convertido en un mero ejercicio de calculadora, en el que se completa una tabla de distribución de frecuencias y se calculan algunas medidas numéricas como la media y la desviación típica pero que, a menudo, se olvida tanto de la interpretación de estas medidas como de la pertinencia de su utilización. Los ejercicios propuestos en los libros de texto habitualmente se refieren a datos que simulan la realidad de una clase de secundaria, siendo habitual que se propongan estudios descriptivos de variables como la nota en Matemáticas de los alumnos de una clase o sus alturas. En este artículo se propone una vía alternativa, que no se olvida de estas cuestiones, pero que tiene en cuenta una visión más extensa de la estadística, en la que se prioriza la interpretación de los resultados sobre los problemas de cálculo.

El Entorno.

La solución de los problemas surge de la necesidad. A mi llegada al IESO de Puente de Domingo Flórez, en la provincia de León, encontré que la forma en que había enfocado la enseñanza de estadística en el pasado no era válida, debido a diferentes factores. Por un lado el bajo número de alumnos por grupo, una ventaja para otras actividades, pero en el caso que nos ocupa era totalmente imposible generar ningún tipo de encuesta con el que contextualizar un estudio descriptivo. Por otro lado, los hábitos de estudio del alumnado, que por diversas razones, eran bastante diferentes a los habituales en los centros educativos de entornos urbanos.

Los Proyectos.

El objetivo prioritario en cuanto a la enseñanza de estadística descriptiva es que el alumnado sea capaz de describir su entorno, interpretando gráficos y tablas estadísticas, extrayendo de ellas la mayor cantidad de información posible.

La forma tradicional de abordar este objetivo en secundaria consiste en resolver ejercicios en los que se proporcionan datos al alumno y este, junto con una calculadora, automatiza una serie de pasos: tabla de distribución de frecuencias, estadísticos de posición y forma, y, en menor medida, gráficos que expliquen esos datos. La cantidad de pasos necesarios para resolver un caso sencillo obliga a subdividir el problema en varios ejercicios, que en la mayor parte de los casos hace que el alumnado pierda el carácter global de estos pasos, como solución conjunta de un problema de estadística descriptiva.

Para conseguir transmitir el carácter de globalidad de todo el proceso no conviene subdividir el problema en ejercicios más pequeños, precisamente porque se pierde el carácter global del mismo. Por otro lado, un planteamiento global puede penalizar al alumnado que tenga un ritmo de trabajo más lento. Por estas dos razones se decidió buscar un proyecto que pudiera ser realizado con diferentes ritmos de aprendizaje, el proyecto debería realizarse de forma conjunta por equipos de alumnos que pudieran avanzar a diferente ritmo y pudieran colaborar en su resolución. Debido al número de matriculados en la materia estos equipos estaban formados por cinco componentes.

Las ventajas que proporciona un proyecto frente al método tradicional de enseñanza son dos: que un proyecto transmite la idea de globalidad de un estudio estadístico y que permite simultanear diferentes ritmos de trabajo.

Atendiendo a estas dos ventajas a la hora de conseguir el objetivo general, junto con el bajo número de alumnado matriculado en la materia y la posibilidad de utilizar el aula de informática con un software básico, se decidieron plantear las siguientes condiciones para que el proyecto fuera viable.

En primer lugar se debía buscar un problema con un enunciado claro y sencillo, que utilizara un volumen de datos lo bastante amplio como para que se pudiera subdividir en tareas que realizaran los alumnos de forma independiente. Por otro lado había que buscar un problema cercano al alumno, para que este lo enfocara con interés.

El proyecto debía realizarse en grupo, a ser posible en el horario de clase, ya que iba a ser difícil motivar al alumnado para el trabajo personal en casa y debía utilizar el currículo de Matemáticas opción A, de 4º de ESO, lo que en este caso se limita al uso de estadística descriptiva univariante.

Por último, priorizando la interpretación de los datos sobre el cálculo de medidas o tablas de distribución de frecuencias, se podían utilizar medios informáticos que además facilitasen la realización de gráficas que acompañasen las medidas numéricas calculadas.

La respuesta habitual a este planteamiento suele ser la realización de una encuesta de opinión (habitualmente de hábitos alimenticios) entre todos los alumnos de un curso. En este caso tampoco era viable debido al pequeño tamaño, tanto del grupo de clase, formado por entre 5 y 7 alumnos durante los tres últimos cursos académicos, como del Instituto, que tiene una matrícula que ronda los 60 alumnos. Por otro lado había que incluir variables de todo tipo: cualitativas, discretas, cuantitativas continuas,… para poder abarcar todos los conceptos del currículo. Para diseñar una encuesta de este tipo el alumnado debía tener unos conocimientos previos de estadística descriptiva de los que, por el momento, carecían. De ahí que se buscaran proyectos a partir de datos obtenidos por otras vías.

Algo más a tener en cuenta eran los recursos informáticos. Por las características del centro se disponía de un aula de informática, accesible a todo el alumnado, que se utilizaría como alternativa a las tediosas operaciones con calculadora.

Se emplearon dos sesiones para transmitir todos los conceptos, que luego serían reforzados durante la realización del proyecto. No es cuestión de enumerar todos los tratados, simplemente nos remitiremos al currículo de la materia. Se completó la explicación de los conceptos teóricos con información sobre la forma de operar con la hoja de cálculo Excel y se explicó la forma de diseñar una plantilla para realizar los cálculos, principalmente de las tablas de distribución de frecuencias. También se indicó la forma de realizar diagramas con el módulo gráfico del programa de Microsoft.

El proyecto debía servir por un lado para reforzar estos conceptos, y por otro, para decidir sobre la correcta aplicación de los mismos. El problema de los cálculos tediosos al que se hacía referencia al comienzo de la comunicación había quedado solucionado por la plantilla de Excel que iba a realizar los cálculos de una forma automática, sólo había que discutir sobre la pertinencia de una u otra forma de agrupar los datos.

DONDE EL BIERZO SE LLAMA CABRERA.

Como se ha indicado, una clave para el éxito del proyecto debía ser la cercanía al alumnado. Para ello hay que describir el contexto geográfico del instituto, que se encuentra en una zona bastante peculiar. El alumnado procede de dos municipios, Puente de Domingo Flórez y Benuza, que a su vez están compuestos por varias localidades. Benuza es un municipio formado por 9 núcleos de población, geográficamente forma parte de la comarca de La Cabrera. Esta comarca está delimitada por el cauce del río Cabrera, que desemboca en Puente de Domingo Flórez. Este municipio comprende 7 localidades, algunas en la cuenca del río Cabrera y otras en la cuenca del Sil, que vertebra la comarca del Bierzo. Esta realidad sirvió de inicio al proyecto.

La pregunta era muy clara *¿de dónde somos?* Se trataba dar respuesta a esta cuestión desde un punto de vista lo más objetivo posible. La respuesta geográfica no era sencilla, pues cada mitad del municipio pertenecía a una comarca. La respuesta administrativa era aún más complicada, puesto que ambos municipios formaban parte del Consejo Comarcal del Bierzo [1]. Había que tener más datos para poder tomar una decisión.

Y sí, disponíamos de esos datos, no iba a ser necesario realizar una encuesta sobre la opinión de los habitantes de cada localidad, sólo teníamos que acceder al módulo de almacén de datos multidimensional de la Junta de Castilla y León[i] y tomar una decisión. En la consulta personalizada seleccionamos los 41 municipios del Bierzo y La Cabrera y encontramos la información de la población necesaria para el trabajo. Seleccionamos las variables, 66 en total, en las que había datos solo de algunos años; población (1981-2012), defunciones, nacimientos, emigración e inmigración (2009-2012), empleo y paro (2009-2012), agrícolas y ganaderos (2009), vehículos (2009-2010), sanitarios y educativos (2009-2010), culturales (2009-2011), …

Cada alumno debía tomar una de esas variables y decidir cuál debía ser el tratamiento estadístico adecuado para la misma, elaborar una tabla de distribución de frecuencias, calcular los parámetros estadísticos que considerara adecuados y realizar gráficas que representaran la información que nos transmitían los datos. Se debía hacer el estudio con los datos correspondientes a los municipios de cada una de las dos comarcas y analizar la similitud de estos con los datos correspondientes a los dos municipios: Benuza y Puente de Domingo Flórez, a los que tratábamos de situar en cada una de las comarcas.

Como norma general, cada alumno repetía el mismo estudio dos veces, una para cada comarca, lo que servía para reforzar el procedimiento utilizado. En algunos casos se realizaba además el estudio para la serie temporal, puesto que se disponían de datos de varios años, lo que servía aún más para el refuerzo de los procedimientos.

Se observó otra ventaja, ya que al haber muchas variables, se debían realizar estudios similares para varias de estas variables. Los alumnos podían hablar entre ellos y consensuar cuál era la mejor forma de tratar esos datos.

Para facilitar el intercambio de información entre los análisis de cada alumno se creó una cuenta compartida en Dropbox, donde se volcaban los resultados analizados por cada uno de ellos. De este modo el trabajo individual era accesible a todos los miembros del proyecto, que podían observar lo que habían hecho sus compañeros con variables similares. El profesor tenía acceso a los análisis individuales y podía supervisar, y por tanto evaluar, el trabajo realizado por cada alumno.

Por último, se debía elaborar una memoria que recogiera toda la información analizada, en la que se diera respuesta a la pregunta que originó el proyecto. Los alumnos debían decidir, a la vista de los datos de cada variable si las dos comarcas eran o no similares en el concepto analizado, si los dos municipios eran o no similares y, en su caso, a cuál de las dos comarcas se parecía cada municipio.

De este modo, atendiendo a los datos demográficos las conclusiones podían ser totalmente distintas a las conclusiones obtenidas según los datos económicos, por ejemplo.

El trabajo resultante se redactó de una forma consensuada, atendiendo al criterio del alumno o alumnos que habían realizado el estudio correspondiente a cada sector. Para ello se les había proporcionado una copia del volumen correspondiente al año 2012 de *España en Cifras* [2] y, siguiendo ese modelo, se redactaron las conclusiones. Había secciones en las que se analizaban datos demográficos, económicos, educativos, agrícolas y ganaderos, industriales, etc. Se elaboraron tablas de distribuciones de frecuencias, se realizaron diferentes pictogramas, pirámides de población, diagramas de barras, de sectores, histogramas e incluso, se representaron series temporales. Se redactaron además las conclusiones que podían aclarar la pertenencia o no de cada municipio a cada una de las dos comarcas.

Todo el proceso llevó un total de 16 periodos lectivos correspondientes a matemáticas, aunque también se emplearon un número indeterminado de periodos correspondientes a la materia de informática puesto que la profesora encargada utilizó también el proyecto para reforzar contenidos de su materia, pues la memoria final se redactó utilizando el procesador de textos Word, las tablas, gráficas y pirámides de población se realizaron con Excel y algunos de los pictogramas se realizaron con Paint.

CON UN SIGLO DE DIFERENCIA.

Dado el buen resultado de la experiencia, para el curso siguiente se realizó otro proyecto. Siguiendo los principios que habían regido *"Donde el Bierzo se llama Cabrera"* se buscó un tema cercano al alumnado. En este caso se utilizó una de las afirmaciones que un profesor de matemáticas más veces ha oído en el aula, esto es *'las matemáticas no sirven para nada'*. Los alumnos estaban convencidos de que era imposible utilizar las matemáticas para algo relacionado con lengua castellana y literatura.

De este modo, aprovechando que se trataba de un grupo de alumnos nacidos en 1998, acudimos a la biblioteca y seleccionamos todos los volúmenes de autores de la Generación del 98 que había en ella. Encontramos 47 ejemplares y seleccionamos, de forma aleatoria, 25 de ellos. Cada alumno debía analizar varias páginas aleatorias de cinco de estos libros y anotar la categoría gramatical de cada palabra de las páginas seleccionadas.

Ya teníamos los datos (Tabla 1), se analizaron unas doce mil palabras y se clasificaron según la obra, el autor y el género literario.

Tabla 8. La Generación del 98. Adjetivos (Adj.), adverbios (Adv.), conjunciones (C.), determinantes (Det.), sustantivos (N.), preposiciones (Pre.), pronombres (Pro.) y verbos (V.)

	Adj.	*Adv.*	*C.*	*Det.*	*N.*	*Pre.*	*Pro.*	*V.*
Azorín	234	61	77	426	494	261	54	353
Pío Baroja	97	84	121	385	494	284	42	291
Jacinto Benavente	2	22	22	40	63	29	4	52
Antonio Machado	97	81	50	220	319	171	28	190
Miguel de Unamuno	226	439	336	786	1146	755	460	856
Valle-Inclán	137	183	141	279	406	225	98	285

De nuevo se realizó un proyecto grupal, cada alumno trabajaba con varias obras, por lo que debía hacer el mismo estudio descriptivo para cada una de ellas. A continuación se agruparon los datos por autor, con idea de comparar el estilo literario de cada uno de ellos atendiendo a la forma de utilizar cada categoría gramatical y finalmente se buscaron las características que permitieran diferenciar las obras de cada uno de los autores.

Por último se presentaron los resultados correspondientes a dos páginas de dos libros que sólo conocía el profesor y se les propuso que, de forma consensuada, determinaran a qué autor pertenecían.

Este nuevo proyecto, algo más complejo que el primero, permitió además introducir conceptos más avanzados de estadística descriptiva, como fueron el análisis de homogeneidad en tablas de contingencia, las nubes de puntos y el análisis discriminante. Estos conceptos, que no se enunciaron formalmente, fueron trabajados a lo largo de todo el proyecto que fue profundizando de forma natural buscando la solución del problema de decidir a qué autor pertenecían las páginas desconocidas.

En este proyecto se emplearon 17 periodos lectivos correspondientes a la materia de matemáticas, y de nuevo se contó con la colaboración de la profesora de informática, que también utilizó varias sesiones que le sirvieron de complemento a su programación.

En este proyecto se observó un mayor grado de implicación por parte del alumnado, aumentando en gran medida el número de horas dedicadas al proyecto en los hogares. La metodología de trabajo empleada era similar al primer proyecto, y en el registro de los archivos se observaba cómo en muchas ocasiones habían sido realizados y grabados en horario de tarde, fuera de las instalaciones del instituto.

EVALUACIÓN DE LOS PROYECTOS.

De forma interna, la evaluación de cada proyecto se realizó dentro de la materia, atendiendo al número de archivos entregados por cada alumno, que quedaban recopilados en la cuenta de Dropbox creada para cada trabajo, así como a la calidad del análisis de cada variable, atendiendo a los criterios de calificación establecidos en la programación del departamento de matemáticas para el bloque de estadística.

Los proyectos también fueron evaluados de forma externa ya que ambos se presentaron a los premios a la realización de trabajos relacionados con la actividad estadística para alumnos de centros docentes no universitarios de Castilla y León, en sus ediciones de 2013 y 2014. Ambos trabajos recibieron el primer premio en la convocatoria correspondiente de cada certamen, en ambos casos quedaron por delante de trabajos realizados incluso por alumnado de Bachillerato y de Ciclos Formativos en centros de todo tipo de la Comunidad de Castilla y León.

Como consecuencia de la concesión del premio se debía participar, representando a la Comunidad de Castilla y León, en la Fase Nacional de los concursos tipo *“Incubadora de sondeos y experimentos”.* El proyecto *“Donde el Bierzo se llama Cabrera”* participó en la tercera fase, que se celebró en Santiago de Compostela, en julio de 2013 mientras que el proyecto *“Con un siglo de diferencia”* participó en la cuarta edición de este concurso, que se celebró en Granada durante los días 2 y 3 de julio de 2014 y obtuvo una Mención Especial del jurado de la competición.

Para defender los proyectos en la fase nacional había que preparar una exposición oral de los mismos, que en ambos casos se realizó fuera del horario lectivo. Participaron de forma voluntaria los alumnos premiados que, además, realizaron una presentación con Power Point de cada uno de los proyectos.

Evaluación positiva.

Atendiendo a los dos proyectos realizados hasta la fecha, se han valorado de forma positiva la realización de los mismos puesto que se ha conseguido el objetivo principal de entender la estadística descriptiva como un proceso global para describir una serie de datos que conducen a una descripción del entorno.

Ambos proyectos, después del estudio estadístico, proponían conclusiones bastante globales, pero ambos colaboraban en la idea de transmitir al alumnado que los problemas de la vida real no son sencillos y que si miramos el problema desde diferentes puntos de vista a veces llegamos a conclusiones diferentes. En el primer proyecto la conclusión era que ningún municipio se parecía en todas las características analizadas a la misma comarca. En el segundo proyecto, aunque era posible diferenciar bien a algunos autores de la Generación del 98, había otros que tenían estilos muy parecidos por el tipo de palabras empleadas.

Por otro lado se comprobó que esta forma de trabajar respondía a los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado, observándose como había alumnos que pudieron trabajar con una mayor cantidad de variables mientras que otros analizaron menos y a un ritmo menor. Además se observó como los propios alumnos adoptaron una metodología colaborativa, analizando el trabajo realizado por sus compañeros y aprovechando la información que estos les daban para avanzar en su propio trabajo.

Se observó también como se percibía la estadística, y también las matemáticas, como un aspecto de una realidad más amplia. Se utilizaron otras materias para ampliar cada proyecto, enfocándose el mismo desde diferentes puntos de vista. El título del primer proyecto surgió de una forma casual gracias a que en la biblioteca había un ejemplar del libro *"Donde Las Hurdes se llaman Cabrera"* [3], de Ramón Carnicer, que una alumna descubrió y tuvo la intuición de modificar para dar título al proyecto.

A consecuencia de los premios, en la preparación de la exposición oral, se obtuvo una total colaboración por parte de las familias, que se implicaban de una forma activa en varias de las tareas necesarias para la exposición, ya sea desplazando a los alumnos para la preparación del concurso, algunos debían realizar un trayecto de 40 minutos para llegar al centro, o respondiendo a otro tipo de demandas, ya que se les necesitaba para que los alumnos perdieran el miedo a hablar en público. Los padres, y sobre todo las madres de los alumnos, acudían al centro a las presentaciones de prueba que se realizaron tanto para profesores como para familias.

El alumnado de otros cursos, principalmente debido a la obtención de los premios, solicita continuamente al profesor la realización de proyectos. En la actualidad se están realizando diferentes tipos de proyectos tanto en segundo como en cuarto curso de educación secundaria obligatoria.

Aspectos de mejora.

En los proyectos futuros, a la vista de los resultados anteriores, además de elaborar una memoria, se tendrá que realizar una presentación oral de los mismos, ya que se ha comprobado que la preparación oral aporta un alto grado de asimilación de los conceptos desarrollado en los proyectos escritos.

La presentación de los proyectos a diferentes concursos puede ser un arma de doble filo, por el momento estamos comprobando la parte positiva, es posible que si no se obtienen premios se produzca cierta desmotivación. Es importante que se deje claro que la participación en los concursos no supone que se vaya a obtener ningún premio, pero sobre todo hay que incidir en la valoración positiva del trabajo realizado, ya que el resto de participantes en cualquier concurso seguro que ha trabajado lo mismo que nosotros en su elaboración.

Conviene no perder de vista el fin de los proyectos, ya que hay una serie de contenidos que se deben trabajar durante el curso y que exigen una metodología que no tiene porqué ser homogénea en todos ellos, se pueden trabajar ciertos contenidos mediante la realización de un proyecto, individual o colectivo, pero otros exigen una metodología que puede ser más tradicional.

Referencias.

[1] Ley 1/1991, de 14 de marzo, por la que se crea y regula la Comarca de El Bierzo. *Boletín Oficial del Estado (22 de abril de 1991), núm. 96*.

[2] España en cifras (2012), *Catálogo de publicaciones de la Administración General del Estado*, Instituto Nacional de Estadística.

[3] Carnicer, R. (2012). Donde las Hurdes se llaman Cabrera, Ed. Gadir.

Para hacer referencia al artículo:

Gómez, F. (2015). Estadística en el entorno. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·"Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas". (pp. 393-398). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

[i] Sistema de Información Estadística. Junta de Castilla y León. www.estadistica.jcyl.es

DISEÑO DE UNA EXPERIENCIA CON FOROS VIRTUALES EN UN CURSO DE MATEMÁTICAS PARA INGENIEROS

Jazmín Juárez Ramírez[a], José María Chamoso Sánchez[b], María Teresa González Astudillo[c], Mercedes Rodríguez Sánchez[d]

[a]Escuela Superior de Cómputo (ESCOM-IPN), [b,c,d]Universidad de Salamanca (USAL)

Resumen

Se presenta el diseño de una experiencia que integra el uso de foros virtuales y el desarrollo del proceso de modelación como parte de una actividad a realizar por estudiantes de primer año de ingeniería. Se describe el desarrollo de un proyecto en un entorno de aprendizaje basado en web con un foro virtual de discusión, estructurado en tres partes, y en las cuales los estudiantes trabajan organizados en grupos pequeños. En la primera parte seleccionan conjuntamente un problema para adaptarlo a una situación de la vida real, en la segunda proponen métodos de solución para el problema, y a partir de sus aportaciones los estudiantes generan un trabajo, que pueden mejorar como consecuencia de las aportaciones en una tercera parte del foro, en dónde los alumnos valoran sus trabajos.

Palabras clave: *Modelación matemática, Ecuaciones Diferenciales, Foros virtuales, Interacción, Educación matemática.*

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los métodos analíticos para resolver una ecuación diferencial han sido, durante mucho tiempo, el pilar de la enseñanza tradicional en los cursos de ecuaciones diferenciales, lo que puede ser la causa de que los estudiantes, con frecuencia, sólo tengan una comprensión limitada sobre lo que representan las soluciones de una ecuación diferencial en una situación aplicada. En algunas investigaciones (por ejemplo Guerra-Cáceres, 2003; Habre, 2000, 2003) se señaló que, un curso de ecuaciones diferenciales en el que no se aprenda la modelación matemática de procesos físicos, mostraría a los estudiantes una imagen distorsionada de la asignatura y que podrían considerarla simplemente como un grupo de técnicas de resolución sin relación con el mundo real. Sin embargo, independientemente del enfoque utilizado en la enseñanza de ecuaciones diferenciales, los estudiantes presentan dificultades al formular modelos matemáticos, resolver las ecuaciones resultantes y predecir cómo se comportan las soluciones (Balderas, 2010; Camacho, Perdomo y Santos, 2007; Martins, 2008).

Por otro lado, el discurso se reconoce como una herramienta importante del aprendizaje. El acto de formular ideas para compartir información y argumentos para convencer a otros es una parte significativa del aprendizaje. Cuando se intercambian las ideas y son sometidas a críticas razonadas, a menudo éstas son perfeccionadas y mejoradas (NCTM, 2000). Que en los cursos de matemáticas los alumnos formulen sus propias ideas para que otros las puedan asimilar, hace que sus pensamientos se manifiesten y sean tangibles para ellos mismos (Lee, 2006). Parece que, en la actualidad, los estudiantes son más capaces de comunicarse, discutir problemas o intercambiar ideas con sus compañeros de clase de manera efectiva a través de las herramientas de comunicación mediada por computadora. Según Silva y Gros (2007) la comunicación a través de foros virtuales tiene un reconocido potencial para transformar los procesos de enseñanza-aprendizaje de manera que sea posible la discusión entre un grupo y el acceso de otros participantes para la socialización y la comunicación. Algunos investigadores (Hara, Bonk y Angeli; 2000) demostraron que la capacidad asincrónica de los foros virtuales permite que los alumnos tengan algún control en la medida en que aumenta el tiempo de respuesta y proporciona oportunidades para un aprendizaje reflexivo.

Todo lo expuesto anteriormente conduce a considerar que, el uso de foros virtuales permitiría a los estudiantes tener tiempo para analizar, reflexionar y negociar mientras se lleva a cabo el debate de un tema y permitiría a los profesores evaluar las habilidades de pensamiento expuestas durante el debate. Sin embargo, se ha observado que existe limitada evidencia de investigaciones sobre el uso de foros virtuales en actividades de aprendizaje en asignaturas de matemáticas con estudiantes universitarios, a pesar de que algunos investigadores han mostrado que los foros son una herramienta que puede utilizarse en diversas disciplinas y además, brindar algunas posibilidades educativas que apoyen al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Ante tales evidencias se propone diseñar un proyecto de modelación matemática que incluye el desarrollo de un foro virtual para un curso de ecuaciones diferenciales con estudiantes de ingeniería.

ANTECEDENTES

La noción de modelo en Educación Matemática no surge de la matemática misma, sino que se trata de una relación entre un fenómeno, material o esquema y un concepto, estructura o procedimiento matemático (Castro y Castro, 2000). En otras palabras, existe una relación directa entre realidad y modelo mediada por conceptos matemáticos.

Las ecuaciones diferenciales han sido, desde hace siglos, parte importante del cálculo y han desempeñado un importante papel en las matemáticas. Algunos autores (Habre, 2000; Hubbard, 1994) señalaron que los cursos de ecuaciones diferenciales consisten, principalmente, en una secuencia de técnicas para encontrar fórmulas de su solución, y que la mayoría de los ejercicios en los libros de texto han sido adaptados con la intención de que las soluciones puedan determinarse con algunos de los métodos estudiados y para que la variable dependiente se exprese de manera explícita o implícita en términos de variable independiente.

En este sentido Boyce (1994) señaló que un curso elemental de ecuaciones diferenciales presenta multitud de oportunidades para trasladar problemas reales a símbolos matemáticos, para que los estudiantes puedan aplicar operaciones y procedimientos matemáticos. Y enfatizó que los estudiantes suelen encontrar esta tarea notoriamente difícil ya que, por lo general, han tenido relativamente pocas oportunidades para practicar la modelación pues sus cursos anteriores se centran en destrezas algebraicas.

Algunas investigaciones se han centrado en estudiar el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en un contexto de modelación. Uno de los primeros trabajos en esta línea, en el que se propuso usar las ecuaciones diferenciales, fue realizado por Camarena (1987), para construir modelos matemáticos de distintos temas de circuitos eléctricos en un curso de matemáticas para ingenieros en una universidad mexicana. Durante el curso se explotaron los fenómenos sobre circuitos eléctricos, para propiciar una motivación en el estudiante. En este trabajo se realiza un importante tratamiento didáctico en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Los resultados de las investigaciones que estudiaron el proceso de modelado con EDO con alumnos universitarios de primer año (Balderas, 2001; Camarena, 2004; Chaachoua y Saglam, 2006; Hernández, 2009; Klymchuk, Zverkova, Gruenwald y Sauerbier, 2008; Rowland, 2006) revelaron dificultades en la comprensión de los estudiantes tanto del concepto de ecuación diferencial y su solución. Es importante que los estudiantes interpreten físicamente los términos de una ecuación diferencial y puedan traducirlos a una expresión matemática y que, al desarrollar actividades relacionadas con la modelación, los estudiantes puedan comprender e interpretar el concepto de ecuación diferencial y su soluciones (Rasmussen y Whitehead, 2003; Rowland y Jovanoski, 2004).

Por otro lado, Engelbrecht y Harding (2005) señalaron que un componente importante en el crecimiento y la evolución de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, a nivel universitario, ha sido la aparición de algunas aplicaciones basadas en tecnología web, específicamente diseñadas para la creación de espacios de enseñanza-aprendizaje.

Sin embargo, se ha observado que existe limitada evidencia de experiencias sobre el uso de foros virtuales en actividades de aprendizaje en asignaturas de matemáticas con estudiantes universitarios, a pesar de que algunos investigadores han mostrado que los foros son una herramienta que puede utilizarse en diversas disciplinas y, además brindar algunas posibilidades educativas que apoyan al proceso de enseñanza-aprendizaje.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La comunicación a través de foros virtuales

La comunicación mediada por computadora (CMC) normalmente es el medio más utilizado para desarrollar colaboración en un entorno de aprendizaje virtual. Si los objetivos se prestan para que el profesor estimule la comunicación por medio de preguntas adecuadas, en lugar de sólo dar las respuesta correctas, la CMC es un medio eficaz para la comunicación dentro del sistema instruccional que se trate (Silva y Gros, 2007). Una de las características de los entornos constructivistas es facilitar el aprendizaje cooperativo y colaborativo, aspectos que son favorecidos por el uso de la CMC, y en particular por el uso de foros virtuales aspecto que se basa en el hecho de que es posible emplear los medios electrónicos para permitir a los grupos coordinar y organizar el material de una manera apropiada a sus objetivos (Harasim, 2000). Además, permite que los estudiantes presenten ideas, clarifiquen dudas, obtengan información, participen en debates y tengan la posibilidad de compartir sus trabajos.

Las interacciones a través de foros virtuales desarrollan muchas funciones fundamentales en el proceso educativo. Una de las características más significativas de los textos escritos en debates asíncronos, y que influyen en la construcción de conocimiento de los participantes, es que los mensajes electrónicos están a la vista de todos los participantes del debate, lo cual provoca que los textos de los mensajes pueden buscarse, sus contenidos se pueden visualizar y examinar varias veces (Schrire, 2006).

La modelación matemática en los cursos de ingeniería

La matemática en contexto es un medio ideal para la enseñanza de las matemáticas en una facultad de ingeniería, más precisamente en escuelas donde la matemática no es una meta por sí misma, sino una herramienta de apoyo al área de conocimiento que sustenta, favoreciendo, con esto, el proceso de enseñanza-aprendizaje (Camarena, 2009). El supuesto filosófico educativo en esta teoría es que el estudiante está capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a otras áreas del conocimiento y, con ello, las competencias profesionales y laborales se ven favorecidas. La matemática en contexto es la fase didáctica de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, y contempla nueve etapas que constituyen el proceso de modelación matemática: 1) Identificar los eventos contextualizados, 2) Plantear el evento contextualizado, 3) Determinar las variables y las constantes del evento, 4) Incluir los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelo matemático y solución del evento, 5) Determinar el modelo matemático, 6) Dar la solución matemática del evento, 7) Determinar la solución requerida por el evento, 8) Interpretar la solución en términos del evento y disciplinas del contexto, 9) Presentar una matemática descontextualizada.

DISEÑO DE LA EXPERIENCIA

A continuación se describe la forma en que se diseñó el proyecto para integrar el uso de foros, al desarrollo de actividades de modelación matemática.

Contexto y participantes

La experiencia se planteó para la asignatura Ecuaciones Diferenciales, uno de los primeros cursos que deben cursar los estudiantes en las escuelas de ingeniería. En donde el objetivo es que el alumno aprenda a formular modelos matemáticos de problemas de ingeniería con ecuaciones diferenciales. La asignatura Ecuaciones Diferenciales se organiza a través de una plataforma web en el sistema gestor de contenidos educativos de libre acceso MOODLE, donde el acceso se restringe a los estudiantes inscritos en el curso y que participan en la experiencia. Para apoyar el desarrollo de la asignatura, la plataforma web del curso cumple los siguientes objetivos: 1) Informar de cuestiones generales y de organización del curso, 2) Gestionar los contenidos del curso, 3) Ampliar las vías de comunicación de los estudiantes con el profesor y entre los estudiantes, y 4) Fomentar el trabajo colaborativo.

Desarrollo

Los estudiantes deben llevar a cabo un *Proyecto* usando un entorno de aprendizaje basado en web a través de la plataforma del curso, con los objetivos de formular, resolver, interpretar, justificar y analizar modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), considerando un proceso de modelación matemática con nueve etapas (Tabla 1):

Tabla 1: Proceso de modelación matemática

Etapa	Descripción
1. Identificar variables y leyes por aplicar	Determinar las variables responsables del cambio que se produce en el sistema. Formular un conjunto de hipótesis o premisas del sistema por describir.
2. Plantear la EDO	Escribir la EDO correspondiente.
3. Establecer condiciones	Determinar las condiciones del problema.
4. Resolver la EDO	Aplicar los métodos estudiados para obtener la resolución general.
5. Aplicar condiciones	Aplicar las condiciones para determinar la resolución particular.
6. Graficar resolución	Expresar la resolución particular con un gráfico.
7. Contestar pregunta original	Explicar el resultado en el contexto de la situación real.
8. Analizar resultado	Validar el resultado contrastándolo con datos conocidos.
9. Identificar el modelo	Explicar si son posibles otras aplicaciones del sistema.

Este modelo se propone a partir de: 1) La revisión de algunos libros de texto universitarios de Ecuaciones Diferenciales, realizada con el propósito de analizar la forma en que tratan el concepto de modelo matemático y el proceso de modelación matemática; y 2) El ciclo de modelado de Camarena (2009), como parte de la fase didáctica de su teoría de la Matematica en el Contexto de las Ciencias. Además en su planteamiento se considera que la enseñanza de las EDO no solamente se debe llevar a cabo desde el enfoque analítico, sino también se deben considerar los enfoques geométrico y numérico. En el aula se trabajan algunos problemas de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en la vida real para que los estudiantes los resuelvan aplicando este proceso de modelación matemática.

Una vez que en el curso se concluya la unidad de aprendizaje Ecuaciones Diferenciales de segundo orden y orden superior, se implementa un entorno de aprendizaje basado en web en la plataforma de la asignatura para que los estudiantes desarrollen el *Proyecto* de modelación matemática. Para ello, además de utilizar foros virtuales como instrumentos de comunicación para trabajar en grupo, también deben usar el software PowerPoint. En el diseño de este *Proyecto* se considera, por un lado, la necesidad que existe en los cursos de ecuaciones diferenciales en las escuelas de ingeniería de presentar el proceso de modelación matemática que los estudiantes deben aprender como parte de su formación y, por otro, se tiene en cuenta que los grupos de aprendizaje colaborativo fomentan el desarrollo de habilidades que facilitan la interacción entre sus miembros, a la vez que posibilitan el desarrollo de destrezas para construir, descubrir, transformar y acrecentar los contenidos conceptuales, así como que permiten socializarse con las personas de su entorno (Vinagre, 2010).

Los estudiantes deben desarrollar el *Proyecto* de la siguiente forma:

- Cada estudiante del curso debe seleccionar un problema que utiliza valores iniciales (PVI) de segundo orden, de una colección de ejercicios y problemas del curso.
- Los estudiantes se organizan en grupos de trabajo de unos 5 integrantes, donde cada uno aporta su problema seleccionado.
- Se establece en la plataforma web de la asignatura una sección F1 de un foro de discusión general en cada grupo para que, conjuntamente, se elija un problema entre los propuestos por cada integrante y que pueda adaptarse a una situación de la vida real.
- Se establece un foro de discusión (sección F2) en cada grupo para resolver el problema propuesto y elaborar, de forma conjunta, un trabajo inicial consistente en una presentación en PowerPoint (presentación inicial PI), teniendo en cuenta las etapas del proceso de modelación matemática con EDO, que se presentara en el aula. Después de finalizar la sección F2, los trabajos se expondrán en el aula y quedaran a disposición de todos los estudiantes en la plataforma de la asignatura.
- Se establece una tercera sección F3 del foro en cada grupo para valorar en conjunto una de las presentaciones (PI) que se expongan en el aula, de manera que todas sean seleccionadas. Los estudiantes deben discutir con sus compañeros del grupo de trabajo sobre los elementos del trabajo que consideren deben revisar para favorecer la comprensión del proceso de modelación matemática.
- Cada grupo de trabajo tiene acceso a los mensajes de la sección F3 del foro en el que se valoró su presentación inicial (PI) y, tras revisar los comentarios sobre su trabajo, elaborarán una presentación final (PF).

CONCLUSIONES

Se ha presentado el diseño de una experiencia articulada en torno a la implementación de foros virtuales y al desarrollo del proceso de modelación matemática de los estudiantes de ingeniería. El proceso de modelación para esta experiencia se propone a partir de un análisis de textos de ecuaciones diferenciales, que permitió identificar la forma en que se presenta la modelación matemática a los estudiantes de ingeniería. Esta experiencia permitiría entender si los foros virtuales pueden cambiar la forma en que los estudiantes acceden, perciben y comunican los conceptos matemáticos, a partir de sus aportaciones. De esta manera se puede abrir camino para implementar esta forma de trabajar en los cursos de matemáticas en ingenierías, así como en otras asignaturas.

Las implicaciones educativas que se derivan de esta experiencia podrían orientarse tanto a la enseñanza y aprendizaje de la modelación matemática como al análisis del uso de foros virtuales en asignaturas de matemática. Esto también permitiría identificar las dificultades de los estudiantes para utilizar sus conocimientos en una situación concreta cercana a la realidad, y podría considerarse para otros cursos de matemáticas de la misma especialidad o en otras.

En relación a las perspectivas de futuro, podemos decir que a partir del diseño de esta experiencia, se plantea analizar las interacciones de los estudiantes en el foro virtual al desarrollar el *Proyecto* de modelación matemática. También se podría analizar la profundidad de las interacciones, así como analizar las modificaciones que los estudiantes realizan a sus trabajos generados en el proyecto como resultado de interaccionar en el foro.

Referencias

Balderas, A. (2001). Integration of CAS in the Didactics of Differential Equations. *Proceeding of the International Conference in New Ideas in Mathematics Education*. Palm Cove, Queensland, Australia. Documento ERIC 468 390.

Balderas, A. (2010). Modelación matemática en un curso introductorio de ecuaciones diferenciales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *23*, 409-418.

Boyce, W. (1994). New Directions in Elementary Differential Equations. *The College Mathematics Journal*, *5*(25), 364-371.

Camacho, M., Perdomo, J. y Santos, M. (2007). La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo, y M. T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 87-106). XI SEIEM (Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática). Tenerife: Universidad de la Laguna.

Camarena, P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV), México.

Camarena, P. (2004). La matemática en el contexto de las ciencias. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*(I), 57-61.

Camarena, P. (2009). Mathematical models in the context of sciences. En M. Blomhøj, y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp. 117-131). Denmark: Roskilde University.

Castro, E. y Castro E. (2000). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Universidad de Barcelona e Instituto de Ciencias de la Educación.

Chaachoua, H., y Saglam, A. (2006). Modelling by differential equations. *Teaching Mathematics and its Applications*, *25*(1), 15-22.

Engelbrecht, J. y Harding, A. (2005). Teaching undergraduate mathematics on the internet. Part 2: Attributes and Possibilities. *Educational Studies in Mathematics, 58*, 253-276.

Guerra-Cáceres, M. E. (2003). Esquemas del Concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en un Contexto Curricular Tradicional. *Matemática, Educación e Internet* , *4*(1). Recuperado de http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/index.htm.

Habre, S. (2000). Exploring Students' Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(4), 455-472.

Habre, S. (2003). Investigating Students' Approval of a Geometric Approach to Differential Equations and Their Solutions. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(5), 651-662.

Hara, N., Bonk, C. y Angeli, C. (2000). Content Analysis of online discussion in an applied educational psychology course. *Instructional Science, 28*, 115-152.

Harasim, L. (2000). Shift happens: Online education as a new paradigm in learning. *The Internet and Higher Education*, *2*(1-2), 41-61.

Hernández, M. A. (2009). *Las Ecuaciones Diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme*. Tesis de maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), México.

Hubbard, J. (1994). What It Means to Understand a Differential Equation? *The College Mathematics Journal*, *25*(5), 372-384.

Klymchuk, S., Zverkova, T., Gruenwald, N. y Sauerbier, G. (2008). Increasing engineering student's awareness to environment through innovative teaching of mathematical modelling. *Teaching Mathematics and its Applications*, *27*(3), 123-130.

Lee, C. (2006). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Martins, M. (2008). *Las dimensiones algorítmica y cualitativa del aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias*. Tesis de maestría. Universidad de San Andrés, Buenos Aires.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

Rasmussen, C., y Whitehead, K. (2003). Learning and Teaching Ordinary Differential Equations. En A. Selden, y J. Selden, (Eds.), *MAA Online Research Sampler* [en línea]. Recuperado de http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_7.html.

Rowland, D. R. (2006). Student difficulties with units in differential equations in modelling contexts, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(5), 553-558.

Rowland, D. R. y Jovanoski, Z. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(4), 503-516.

Schrire, S. (2006). Knowledge building in asynchronous discussion groups: Going beyond quantitative analysis, *Computers y Education, 46*, 49-70.

Silva, J. y Gros, B. (2007). Una propuesta para el análisis de interacciones en un espacio virtual de aprendizaje para la formación continua de los docentes. *Revista Electrónica Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, *8*(1), 81-105.

Vinagre, M. (2010). *Teoría y práctica del aprendizaje colaborativo asistido por ordenador*. Madrid: Síntesis.

Para hacer referencia al artículo:

Juárez, J., Chamoso, J.M., González, M.T. y Rodríguez, M. (2015). Diseño de una experiencia con foros virtuales en un curso de matemáticas para ingenieros. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·"Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas". (pp. 399-405). Lugar: Academia de Artillería de Segovia

APRENDIZAJE AUTÓNOMO DE ALUMNOS DE INGENIERÍA MEDIANTE UNA WEB DE VÍDEOS

Álvaro Lozano Rojo[a,b], Antonio M. Oller Marcén[a,b], Jorge Ortigas Galindo[a,b]

[a] Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, [b] IUMA-Universidad de Zaragoza

Resumen

Dentro del Espacio Europeo de Educación Superior cobra cada vez más importancia el aprendizaje basado en competencias, que hace énfasis en la autonomía del alumno. Parece evidente que el uso de las TIC tiene mucho que decir en lo que respecta a este cambio de paradigma. Una de las dificultades que encuentran tanto docentes como alumnos al inicio de los estudios universitarios es la disparidad en la formación inicial de estos últimos. Esta dificultad puede suponer una oportunidad para fomentar el aprendizaje autónomo del estudiante. Presentamos en este trabajo un proyecto, desarrollado dentro del Grado en Ingeniería de Organización Industrial impartido en el Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, cuyo objetivo es crear una web con vídeos explicativos y otros recursos multimedia mediante los cuales los alumnos puedan repasar de forma autónoma conceptos matemáticos básicos necesarios para abordar con éxito sus estudios de grado.

Palabras clave: *vídeo, web, matemáticas básicas, universidad.*

INTRODUCCIÓN

Dentro del marco del Espacio Europeo de Educación Superior está cobrando cada vez más importancia el aprendizaje basado en competencias. En ese sentido, la Unión Europea (DOUE, 2006) determinó las competencias clave para el aprendizaje permanente entendidas como "aquéllas que todas las personas precisan para su realización y desarrollo personales". Entre dichas competencias clave (un total de ocho[i]) se incluye una competencia denominada "aprender a aprender" que se define como "la habilidad para iniciar el aprendizaje y persistir en él, para organizar su propio aprendizaje y gestionar el tiempo y la información eficazmente".

El aprendizaje basado en competencias pone su énfasis en la autonomía del alumno y supone un cambio de paradigma en el que el uso de las TIC tiene mucho que decir[ii]. Este cambio de paradigma debe suponer un cambio en los papeles del docente y del estudiante (Figueras, 2005) que implique un cambio en el modo de organizar los procesos de enseñanza-aprendizaje, pasando de un aprendizaje por transmisión a un aprendizaje interactivo (García-Valcárcel, 2008).

En consecuencia, se abre un amplio abanico de posibilidades para abordar procesos innovadores que faciliten la anterior transición y mejoren el aprendizaje de los alumnos. Las instituciones han respondido a ello de distintas formas (Salinas, 2004, p.3): desarrollando programas de innovación docente, modificando en cierto modo algunas estructuras universitarias e impulsando experiencias innovadoras relacionadas con el uso de las TIC.

La evolución actual de la sociedad, en la que la ciudadanía prefiere jugar un papel más activo en los procesos de aprendizaje (Tapscott, 1998), determina que, dentro de las TIC, internet juegue un papel destacado. En particular, las redes sociales y YouTube deben ser elementos esenciales a la hora de diseñar planes de comunicación científica (Ocaña, 2013).

En lo que respecta a YouTube, el uso educativo de los vídeos en el aula está ampliamente implantado y analizado (De Pablos & Cabero, 1990; Cebrián de la Serna, 2005). En el caso de las Matemáticas, su utilidad y diversidad de enfoques, también ha sido puesta de manifiesto en una reciente monografía de la revista UNO (Muñoz, 2012).

CONTEXTO, MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS

El proyecto que describimos se viene realizando en el Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza. Este centro, creado en 2009 y adscrito a la Universidad de Zaragoza, está encargado de la formación de los futuros oficiales del Ejército de Tierra y de la Guardia Civil. La titulación impartida es el grado en Ingeniería de Organización Industrial, en el que existen cinco asignaturas de matemáticas dedicadas al cálculo, al álgebra lineal, a las ecuaciones diferenciales, a la estadística y a la investigación operativa.

Los alumnos que acceden a este centro son, en su mayor parte, alumnos de bachillerato que ingresan tras realizar las P.A.U. en cualquier zona de España. También existe un número limitado de plazas destinadas a la promoción interna de suboficiales y tropa.

En definitiva, el alumnado del centro presenta una gran heterogeneidad en cuanto a su origen y formación inicial. En consecuencia, la disparidad en la formación inicial de los alumnos, que suele ser una de las dificultades que encuentran tanto docentes como alumnos al inicio de los estudios universitarios, se produce de forma especialmente acusada en nuestro centro. Las dificultades son, además, mayores en asignaturas que suponen una continuación natural de los conocimientos adquiridos por el alumno en la Secundaria; siendo las Matemáticas un ejemplo paradigmático.

Así pues, es habitual encontrar a alumnos que, pese a haber superado con buenas calificaciones las P.A.U. o haber realizado una oposición para acceder a una plaza de promoción interna, tienen dificultades a la hora de manejar conceptos matemáticos básicos o al realizar procedimientos instrumentales que resultan imprescindibles a la hora de abordar nuevos conocimientos.

Algunas dificultades y carencias (ya sean conceptuales o procedimentales) que, por experiencia, hemos detectado son, por citar unos pocos ejemplos:

- Operaciones con expresiones algebraicas.
- Factorización de polinomios.
- Representación gráfica y reconocimiento de curvas sencillas: cónicas, funciones elementales, etc.
- Propiedades de logaritmos y exponenciales.
- Concepto de factorial de un número natural.

La carencia de estos y otros conocimientos se puede deber a un aprendizaje superficial o apresurado en su momento, al olvido natural de lo que no se utiliza durante un tiempo (especialmente si se trata de alumnos de promoción interna), a que el alumno efectivamente nunca aprendió dichos contenidos (si proviene del Bachillerato de Ciencias Sociales, por ejemplo), etc. En definitiva, y sea cual sea su causa, parece claro que estas carencias van a repercutir negativamente en el rendimiento del alumno, especialmente en un grado técnico.

Si bien es cierto que el alumno puede recuperar estas capacidades mediante el autoestudio, sin duda ejemplos claros, sencillos y bien dirigidos hacia las posibles dificultades concretas de cada concepto pueden ayudar al estudiante en este proceso. En este punto aparece la necesidad de dotar al alumno de esas herramientas y recursos, fomentando así en él la reflexión, la autoevaluación de sus propios conocimientos y el trabajo autónomo.

De toda la problemática anterior, surge el principal objetivo de este proyecto: crear recursos multimedia, en especial vídeos, sobre diferentes conceptos matemáticos básicos. En particular aquellos que, a juicio del profesorado del centro, los estudiantes debieran conocer al comenzar los estudios del grado en Ingeniería de Organización Industrial y que se hayan detectado como fuente de dificultades para los alumnos.

El número de recursos disponibles en Internet sobre un tema determinado es muy elevado. No obstante, en algunos casos la calidad y el enfoque de los mismos no se adapta a las necesidades del alumno de grado. Esto es un grave problema para el estudiante, dado que no tiene herramientas para discernir unos contenidos de otros. Por ello, disponer de una web universitaria con los materiales de estudio necesarios garantiza la calidad de los mismos.

La utilización de vídeos permite que una explicación, por compleja que resulte, sea visualizada por el alumno tantas veces como estime conveniente y con la pausa necesaria hasta su correcta asimilación. Este interés y utilidad ya fue puesto de manifiesto en una experiencia anterior. En el curso 2011/12 se llevó a cabo un proyecto (dentro del Programa de Incentivación de la Innovación Docente en la Universidad de Zaragoza) cuyo objetivo era crear vídeos de soluciones de problemas de la asignatura Investigación Operativa y que tuvo una buena acogida entre el alumnado que accedía al contenido a través de la plataforma Moodle de la Universidad de Zaragoza.

Además, el hecho de poder recordar conceptos olvidados de una manera sencilla e independiente mejora la disposición del alumno para afrontar los retos que le presentan las asignaturas del grado.

DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

Como ya se ha dicho, el objetivo es crear recursos multimedia, en especial vídeos, sobre diferentes conceptos matemáticos básicos. Para la consecución de este objetivo, el proyecto abordado consta de las siguientes fases:

1. Diseño y creación de la web.
2. Identificación, por parte del profesorado, de aquellos contenidos en los que los alumnos muestran mayores carencias o dificultades.
3. Grabación y edición de los vídeos.
4. Evaluación de los resultados y valoración.

En la actualidad el proyecto se encuentra sólo parcialmente desarrollado en sus fases 2, 3 y 4.

La fase 1 se ha realizado completamente (Figura 1). La web diseñada se ha incorporado dentro de la web del Centro Universitario de la Defensa (cud.unizar.es/matematicasbasicas) y se ha optado por clasificar los vídeos según los cuatro bloques de contenidos que vertebran el currículo de Bachillerato: Álgebra, Análisis, Geometría y Probabilidad y Estadística. Los vídeos que se enlazan en la web se encuentran almacenados en el servicio web YouTube, por lo que también son accesibles públicamente desde fuera de la web principal destinada a los alumnos.

Las fases 2 y 3, cuyo avance debe ser necesariamente paralelo, están todavía en sus inicios y se han editado once vídeos de diversas temáticas: 5 relacionados con el Álgebra, 2 con el Análisis, 1 con la Geometría y 3 con la Probabilidad y Estadística. Evidentemente, estas dos fases deben permanecer “abiertas” en el sentido de que pueden detectarse nuevas carencias y necesidades de los alumnos en cualquier momento. Además

Figura 1. Apariencia de la web principal.

de la identificación de aspectos a tratar por parte del profesorado, el alumnado podrá también sugerir conceptos que le gustaría que se tratasen en los vídeos, integrándose en el propio diseño del proyecto.

Como consecuencia, la última fase de evaluación está también incompleta. En cualquier caso se dispone, por un lado, de comentarios de los alumnos y, por otro, de los datos sobre reproducciones de los vídeos que proporciona YouTube; si bien estos últimos no nos permiten contabilizar las visitas de nuestros alumnos.

ASPECTOS TÉCNICOS

En esta sección detallamos los aspectos técnicos más relevantes de las fases 1 y 3. Los recursos se preparan con diferentes métodos, según la naturaleza de la exposición. Desde la grabación de la resolución de un problema concreto a explicaciones más “teóricas” que requieren otro tipo de esquema o modelos interactivos.

Creación de la web

Las tecnologías para crear la web y alguno de los contenidos han sido HTML5/CSS3 y JavaScript, los estándares actuales para la creación de páginas web. Dentro de la programación en JavaScript se usa la librería jQuery, que simplifica notablemente la programación. Estas tecnologías permiten obtener un diseño optimizado para dispositivos móviles y tabletas de última generación.

Por otro lado, la flexibilidad de contar con un lenguaje de programación general permite realizar contenido interactivo más allá de los vídeos, como por ejemplo, la actividad en torno al problema de Monty Hall que se muestra en la Figura 2.

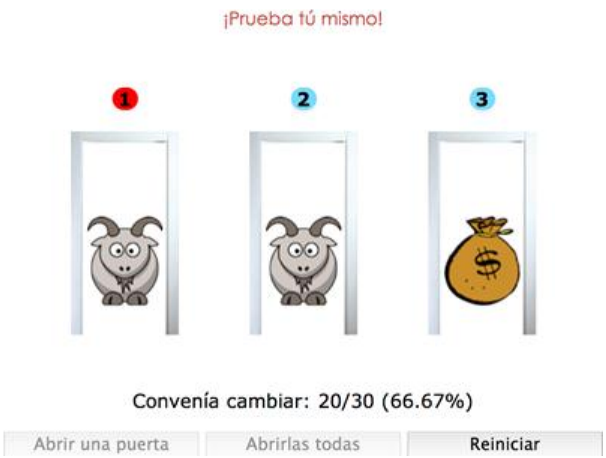


Figura 2. Actividad interactiva sobre el problema de Monty Hall.

Grabación y edición de los vídeos

La grabación de los vídeos se llevó a cabo mediante una cámara fija de pie multiClass visor (Figura 3, izquierda).

Además, se ha utilizado Automator para realizar acciones automáticas que fueron capturadas mediante Quicktime X. En cualquier caso, los vídeos se editaron en iMovie y Kdenlive (Figura 3, derecha), además de CamTwist para algunos efectos especiales.

Figura 3. Cámara para la grabación de vídeos (izda.) y editor de vídeo (dcha.).

Otros recursos

En la realización de algunos vídeos y actividades han sido necesarios ilustraciones y sonidos. Éstos se obtuvieron de las webs OpenClipArt y FreeSound respectivamente, que son repositorios de imágenes y sonidos con licencias libres.

ALGUNOS RESULTADOS Y VALORACIONES

El proyecto no está dirigido exclusivamente a los alumnos de nuestro centro, si no que está abierto a cualquier alumno de un grado científico-técnico. Por este motivo, para analizar el impacto del proyecto usamos las herramientas de análisis proporcionadas por YouTube que registran diferentes métricas sobre la difusión del contenido.

En los primeros 26 meses de la página de vídeos, contamos con más de 14500 visualizaciones. En la Figura 4 se muestra el número de visitas mensuales desde el inicio del proyecto hasta el 20 de octubre de 2014. Se observa una tendencia al alza con picos en periodos de evaluación.

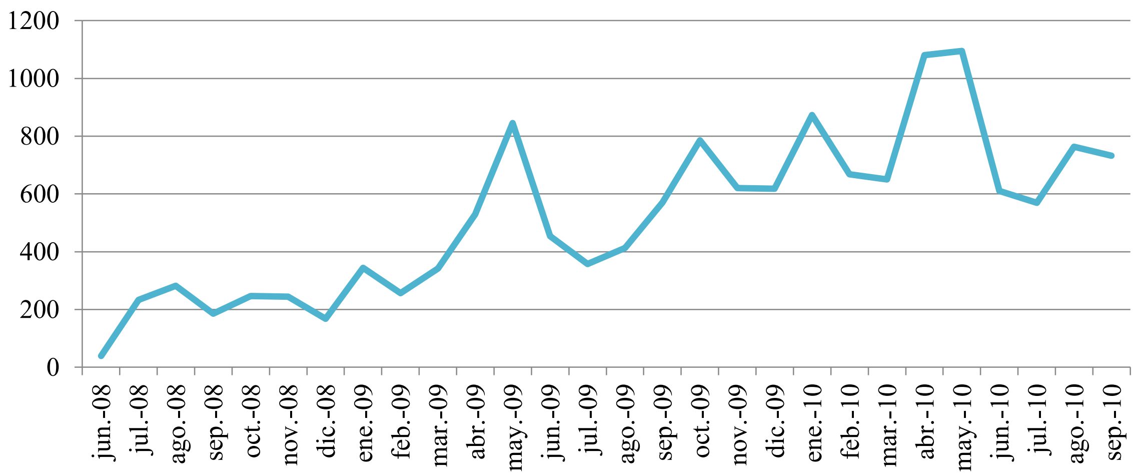


Figura 4. Número de visitas por mes.

A continuación, en la Figura 5, se desglosa el número de visitas recibidas por cada vídeo.

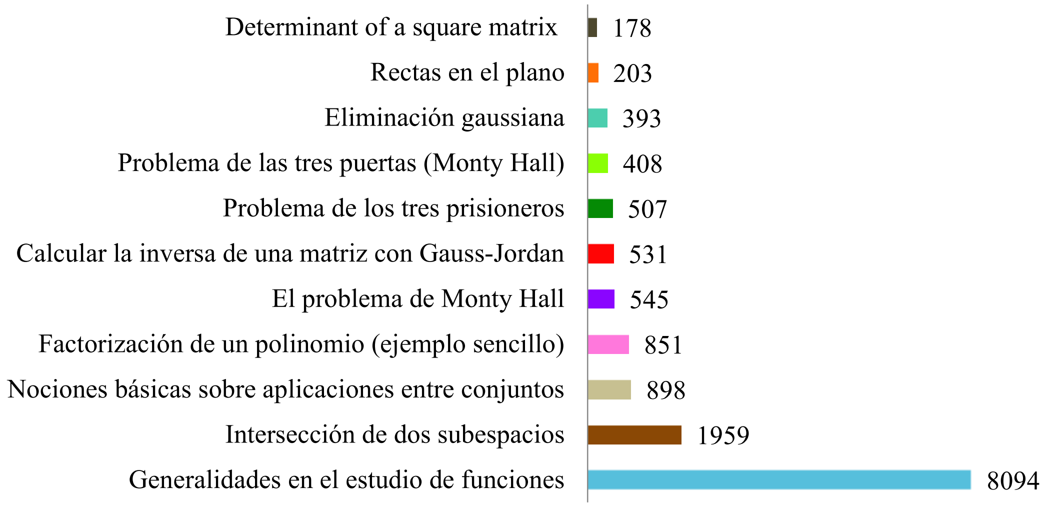


Figura 5. Número de visitas por cada vídeo desde su publicación.

En el diagrama de dispersión de la Figura 6 podemos ver que el porcentaje de vídeo visionado por el usuario es típicamente mayor en los vídeos cortos y no técnicos (marcador cuadrado). En los más técnicos (marcador circular) y de mayor extensión (en los que se tratan más de un concepto) podemos intuir que el usuario tiende a seleccionar lo que desea visionar, descartando el resto. De hecho, parece que el usuario ve aproximadamente el mismo porcentaje de los vídeos técnicos. Por otro lado, el vídeo que más conceptos trata (y consecuentemente el de mayor longitud) es el más visitado (véase la Figura 5).

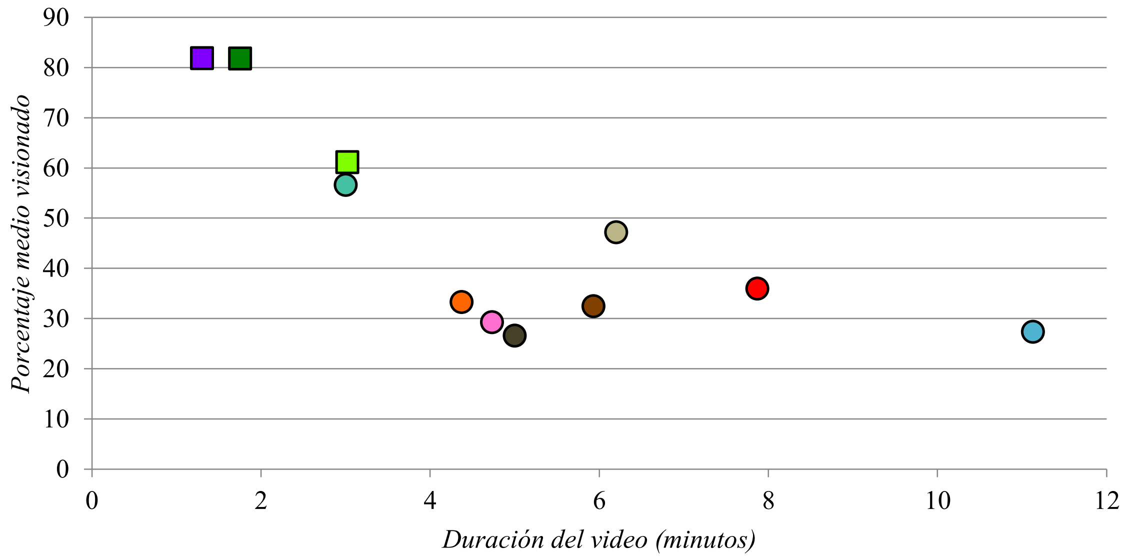


Figura 6. Duración del vídeo contra porcentaje de visionado.
El código de colores corresponde con el de la Figura 5.

Nos ha sorprendido la acogida de los vídeos en países latinoamericanos de habla hispana. De hecho, más de la mitad de las visitas provienen de estos países. Por otro lado España es el país con mayor número de visitas (véase la Figura 7).

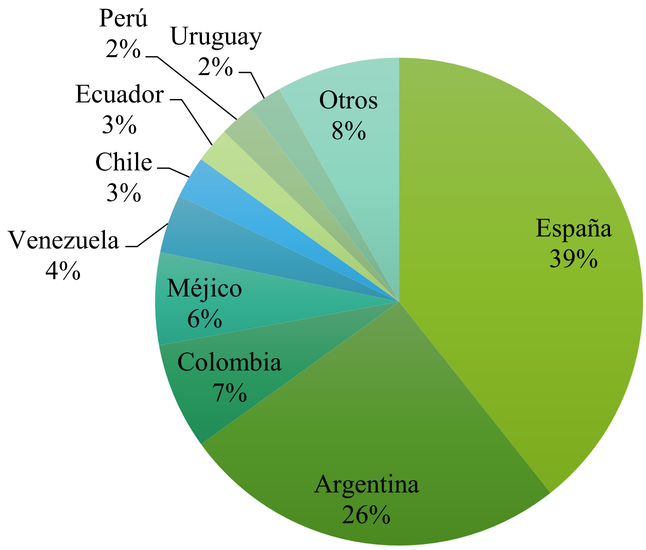


Figura 7. Visitas por países.

En un futuro cercano pretendemos ampliar la base de vídeos disponibles con otros temas que puedan ser de interés en primeros cursos de grados científico-técnicos e incluso en últimos cursos de bachillerato.

Por otro lado, buscamos un *feedback activo* por parte del alumnado, de manera que propongan temas de interés para ellos así como mejoras en la presentación de los mismos. De esta manera, pretendemos analizar el uso que hacen los alumnos de las TIC en su proceso de estudio autónomo.

Referencias.

Cebrián de la Serna, M. (2005). Vídeo y educación I: vídeos educativos versus vídeos didácticos. En: Cebrián de la Serna, M. (coord.). *Tecnologías de la Información y la Comunicación para la formación de docentes.* Madrid: Pirámide.

De Pablos, J. & Cabero, J. (1990). El video en el aula I. El video como mediador del aprendizaje. *Revista de Educación*, *291*, 351-370.

DOUE. (2006). Recomendación del Parlamento europeo y del Consejo de 18 de diciembre de 2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente (2006/962/CE). *Diario Oficial de la Unión Europea*, *L 394*, 10-18.

Figueras, O. (2005). Atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 5-16). Córdoba, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.

García-Valcárcel, A. (2008). Investigación y Tecnologías de la Información y Comunicación al servicio de la innovación educativa. Salamanca: Universidad de Salamanca.

Muñoz, J. (2012). Videoclips y matemáticas. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *60*, 5-8.

Ocaña, R. (2013). Divestadítica: un proyecto educativo para la divulgación de las ciencias estadísticas. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *64*, 77-90.

Salinas, J. (2004). Innovación docente y uso de las TIC en la enseñanza universitaria. *Revista Universidad y Sociedad del Conocimiento*, *1*(1), 1-16.

Tapscott, D. (1998). *Growing-up digital: The rise of the next generation*. Nueva York: McGraw-Hill.

Para hacer referencia al artículo:

Lozano, A., Oller A.M. y Ortigas, J. (2015). Aprendizaje autónomo de alumnos de ingeniería mediante una web de vídeos. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: *"Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 407-414). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

[i] Competencia de comunicación en la lengua materna, de comunicación en lenguas extranjeras, competencia matemática, competencia digital, aprender a aprender, competencias sociales y cívicas, sentido de la iniciativa y espíritu de empresa y conciencia y expresión culturales.

[ii] El propio documento citado señala: "aprender a prender exige la adquisición de las capacidades básicas fundamentales necesarias para el aprendizaje complementario, como […] las TIC".

FLEXIBILIDAD EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UNA EXPERIENCIA EN EL AULA

Antonio Manzano[a], Mónica Sobrado[b]

[a]Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de Burgos

[b]Departamento de Matemáticas. I.E.S. La Cabrera (La Cabrera, Madrid)

Resumen

Presentamos una experiencia, realizada de manera independiente con estudiantes de Bachillerato y de un Grado en ingeniería, que utiliza la flexibilidad en la resolución de ciertos problemas como metodología de enseñanza y aprendizaje. La actividad ha consistido en plantear a los alumnos problemas de matemáticas que tienen como característica común la posibilidad de ser resueltos de diferentes formas. Entre estos posibles modos de resolver cada problema están los que se basan en conceptos y resultados estudiados en la materia correspondiente, pero también otros métodos que no requieren tales conocimientos, sino razonamientos sencillos o conocimientos de cursos anteriores. A partir de esta experiencia, hemos obtenido información sobre el nivel de adquisición que los estudiantes tenían de los contenidos de la materia, pero también acerca de su percepción sobre la utilidad y aplicación de contenidos estudiados en asignaturas anteriores.

Palabras clave: *metodología docente, resolución de problemas, flexibilidad, competencia.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años es habitual trabajar en el ámbito educativo con competencias, entendidas como habilidades, destrezas o capacidades. En este sentido, especialmente en el campo de las matemáticas, la resolución de problemas o ejercicios resulta fundamental dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje.

En esta comunicación estamos interesados en presentar una experiencia que utiliza la flexibilidad en la resolución de ciertos problemas como metodología docente. Nuestra experiencia ha consistido en plantear a los alumnos problemas de matemáticas que tienen como característica común la posibilidad de ser resueltos de diferentes formas. Entre estos posibles modos de resolver cada problema están los que se basan en conceptos y resultados estudiados en la materia correspondiente, pero también otros métodos que no requieren tales conocimientos, sino razonamientos sencillos o conocimientos adquiridos en cursos anteriores.

La actividad ha sido desarrollada de manera independiente con estudiantes de la asignatura Matemáticas II de 2º curso de Bachillerato de la opción de Ciencias, del I.E.S. La Cabrera (La Cabrera, Madrid), y con alumnos de la asignatura Teoría de Campos de 2º curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Caminos, impartido en la Universidad de Burgos.

Para que la realización de operaciones o cálculos no fuese un impedimento o una restricción a la hora de elegir una u otra forma de resolver un problema, la actividad ha sido realizada en aula de informática. De este modo, los alumnos han contado con programas informáticos como Wiris, Derive o Maple, según el caso, como instrumentos de ayuda en la resolución de los problemas.

Por un lado, debido a que los problemas considerados se podían resolver utilizando nociones o resultados matemáticos estudiados en la asignatura que cursaba cada alumno, hemos podido valorar el nivel de comprensión y correcto uso que los estudiantes tenían de los contenidos de la materia. Además, especialmente en el caso de los alumnos de Universidad, los problemas nos han permitido en muchas ocasiones repasar nociones o teoremas relacionados con contenidos estudiados previamente en la asignatura, o incluso en cursos anteriores.

Por otra parte, como entre las distintas maneras de obtener la solución estaban también aquellas que eran casi inmediatas o no requerían la utilización de contenidos propios de la asignatura, esto nos ha permitido poner de manifiesto en clase que, en determinadas situaciones, para resolver un problema o ejercicio no siempre es necesario conocer y aplicar resultados de cierta dificultad o "potencia" matemática, sino que basta con recurrir a conceptos anteriores más sencillos que deben pertenecer al "equipaje" matemático de cada alumno. Algo que hemos intentado remarcar ante nuestros alumnos, teniendo en cuenta la respuesta mostrada por un buen número de ellos ante los problemas mencionados.

En definitiva, gracias a esta experiencia educativa, hemos obtenido información sobre la destreza del alumno en la resolución de problemas y ejercicios, y el nivel de comprensión y correcto uso que los estudiantes tenían de los contenidos de la materia, pero también acerca de su percepción sobre la utilidad de contenidos estudiados en asignaturas de cursos anteriores y el nivel de aplicación de los mismos. Todo ello ha resultado interesante en nuestra labor como docentes, ya que nos ha servido para detectar posibles "lagunas", o carencias, en el aprendizaje del alumno y en la forma que éste tiene de utilizar aquello que debería saber porque pertenece a su "cultura matemática". Ha servido, por tanto, para orientar nuestro esfuerzo y dedicación en intentar subsanar tales carencias.

CONTEXTO

Hemos desarrollado la actividad con estudiantes de dos niveles educativos. En concreto, los problemas han sido planteados el curso pasado, de manera independiente, a alumnos de la asignatura Matemáticas II de 2º curso de Bachillerato de la opción de Ciencias, del I.E.S. La Cabrera (La Cabrera) de la Comunidad de Madrid, y a estudiantes de la asignatura Teoría de Campos de 2º curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Caminos de la Universidad de Burgos. En la Tabla 1, que aparece seguidamente, se indican algunos datos sobre el número de alumnos en cada una de las asignaturas, las horas de clase semanales de la materia o el intervalo de edad de los alumnos.

Tabla 1

	Matemáticas II	*Teoría de Campos*
Número de alumnos	16	30
Horas de clase semanales	4	4
Intervalo de edad	17-19	19-22

Es evidente que las dos asignaturas mencionadas tienen contenidos diferentes, pero también cuentan con partes comunes en sus programas. Es precisamente acerca de algunos de esos contenidos comunes sobre los que se han basado los problemas elegidos, aunque la finalidad de la experiencia que hemos llevado a cabo no ha sido contrastar la respuesta mostrada por los alumnos de una y otra etapa.

A continuación se presentan sendas tablas en las que se recogen, de forma sucinta, los grandes bloques de contenidos de cada una de las materias. La primera de ellas (Tabla 2) se refiere a la asignatura Matemáticas II, impartida en el Bachillerato de Ciencias:

Tabla 2

Matemáticas II	
Álgebra	*Sistemas de ecuaciones* Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas compatibles e incompatibles. Método de Gauss. Discusión de sistemas de ecuaciones. *Álgebra de matrices* Definiciones básicas. Operaciones con matrices. Matriz cuadrada. Matriz inversa. Rango de una matriz. *Determinantes* Definición y propiedades. Cálculo del rango de una matriz. Cálculo de la inversa de una matriz. *Resolución de sistemas de ecuaciones mediante determinantes* Forma matricial de un sistema de ecuaciones. Regla de Cramer. Sistemas homogéneos. Discusión de sistemas mediante determinantes. Teorema de Rouché-Frobenius.
Análisis	*Límites y continuidad* Definición de límite de una función en un punto. Propiedades. Límite de una función en el infinito. Indeterminaciones. Funciones continuas. *Derivadas* Derivada de una función en un punto. Función derivada. Derivadas sucesivas. Técnicas de derivación. Regla de la cadena. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio. Crecimiento de una función. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión. Optimización de funciones. Regla de L'Hôpital. Representación de funciones.

	Integrales Integral indefinida. Propiedades. Técnicas de integración. Método de sustitución. Integración por partes. Integración de algunas funciones racionales. Integral definida y área bajo una curva. Teorema del valor medio. Teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow. Cálculo de áreas.
Geometría	*Vectores en el espacio* Vectores. Operaciones con vectores. Base. Producto escalar de vectores. Aplicaciones. Producto vectorial. Aplicaciones. Producto mixto de vectores. *Puntos, rectas y planos en el espacio* Sistemas de referencia en el espacio. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de dos rectas. Ecuaciones del plano. Posiciones relativas entre planos y rectas. *Problemas métricos* Ángulos entre rectas, entre planos y entre rectas y planos. Distancias entre puntos, rectas y planos. Áreas y volúmenes. Lugares geométricos. Ecuación de la superficie esférica.

En relación con la asignatura Teoría de Campos, de 2º curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Caminos de la Universidad de Burgos, los contenidos principales se indican en la Tabla 3.

Tabla 3

Teoría de Campos	
Cálculo diferencial e integral en varias variables	*Cálculo diferencial en varias variables* El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Función real de varias variables. Límite y continuidad. Derivadas parciales y direccionales. Diferencial. Regla de la cadena. Teorema de la función implícita. Teorema de la función inversa. Extremos de una función real de varias variables. Método de los multiplicadores de Lagrange. *Cálculo integral en varias variables*

	Integrales dobles y triples. Interpretación geométrica. Teorema de Fubini. Teorema del cambio de variable. Cambio de coordenadas: polares, cilíndricas y esféricas. Centro de masa y momentos de inercia de regiones del plano y del espacio.
Cálculo vectorial	*Integrales de línea* Definiciones básicas sobre curvas. Integración sobre curvas. Independencia del camino. Campos conservativos. Teorema de Green. Área de una región plana encerrada por una curva y otras aplicaciones. *Integrales de superficie* Definiciones básicas sobre superficies. Parametrización de superficies. Orientación de una superficie. Integración sobre superficies. Teorema de Stokes. Teorema de Gauss. Área de una superficie y otras aplicaciones.
Variable compleja	*Funciones de variable compleja* El conjunto de los números complejos. Propiedades. Función de variable compleja. Límite y continuidad. Teoremas sobre límites y continuidad. Derivada de una función de variable compleja. Funciones analíticas. Ecuaciones de Cauchy-Riemann. Funciones elementales de variable compleja. Transformaciones conformes.

Como ya se ha mencionado, en ambas asignaturas nos ha parecido conveniente plantear los problemas en el aula de informática, con el fin de que la realización de operaciones o cálculos no fuese un obstáculo o una restricción a la hora de elegir uno u otro modo de resolver un problema. Así, los alumnos han contado con un ordenador como herramienta para la resolución de los problemas. En concreto, los estudiantes de Bachillerato tenían a su disposición el programa Wiris en red (en la plataforma de EducaMadrid), y los de ingeniería los programas de cálculo Derive o Maple. Cada alumno ha podido utilizar de forma individual un ordenador.

EXPERIENCIA DESARROLLADA

Vamos a ilustrar la actividad que hemos desarrollado en clase con algún ejemplo concreto de los problemas propuestos a los alumnos. Previamente, nos gustaría indicar ciertos aspectos generales sobre la realización de esta experiencia. El procedimiento ha sido el mismo para las dos asignaturas. A los estudiantes se les entregaba en el aula de informática uno o dos problemas, según su dificultad, y se les dejaba un tiempo razonable para que trabajasen individualmente. Para cada problema se les pedía que obtuviesen su solución de forma razonada y que, si era posible, comprobasen de algún otro modo (por ejemplo, resolviendo el problema de otra forma) la validez de la solución obtenida. Antes de finalizar la clase, durante los diez o quince últimos minutos, se les comentaba los posibles métodos de resolución de cada problema. Para compensar la escasez de tiempo, a los alumnos se les facilitaba previamente unos apuntes donde estaban recogidos detalladamente los pasos a seguir para obtener la solución usando uno u otro camino.

Los alumnos se han servido del ordenador como herramienta de trabajo, lo que les ha resultado especialmente útil para representar funciones o regiones del plano, o para realizar cálculos que podían resultar laboriosos (como la obtención de una determinada integral definida, la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas o la obtención de una matriz concreta). Esto nos ha permitido valorar, como parte complementaria del aprendizaje de la materia, el nivel de destreza o capacidad de cada alumno en el manejo de los programas de cálculo mencionados anteriormente en la resolución de un problema. Por supuesto, los alumnos conocían los fundamentos básicos del manejo de tales programas, y habían tenido ocasión de practicar con ellos, antes de la realización de la actividad. Por otra parte, en ningún caso la utilización del ordenador ha servido para que los estudiantes dejasen de conocer, o aplicar "manualmente", las técnicas o reglas de cálculo fundamentales contenidas en el temario de la asignatura.

A continuación, describimos uno de los problemas propuestos y algunas de las formas de resolverlo más empleadas por los alumnos. El problema consiste en calcular el área de una región del plano.

<u>Problema</u>. Determinar el área de la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Comprobar, si es posible, de algún otro modo, la validez de la solución obtenida.

La representación de la región D (ver Figuras 1 y 2), aunque no se pedía de forma explícita, fue realizada por casi todos los estudiantes de Bachillerato y de ingeniería.

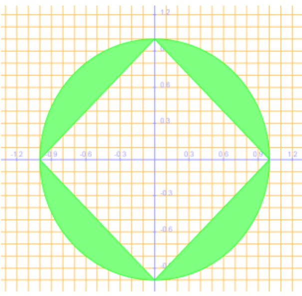


Figura 1. Representación de la región D con Wiris

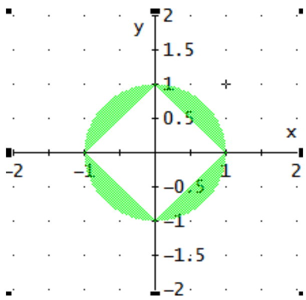


Figura 2. Representación de la región D con Derive

La mayoría de los alumnos de 2º de Bachillerato resolvieron el problema, cuya solución es:

$$\text{Área}(D) = \pi - 2.$$

Esencialmente, obtuvieron la solución de alguna de las dos maneras siguientes.

Primer método. Utilizando exclusivamente resultados triviales que conocían antes de cursar la asignatura, como el área de un círculo y el área de un cuadrado.

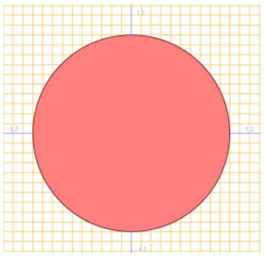


Figura 3. Círculo de radio 1, representado con Wiris. Su área es π

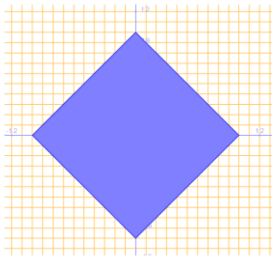


Figura 4. Cuadrado de lado $\sqrt{2}$, representado con Wiris. Su área es 2

El área de la región D es igual al área de un círculo de radio uno, menos el área de un cuadrado de lado $\sqrt{2}$. Es decir,

$$\text{Área}(D) = \pi - 2.$$

Segundo método. Usando la integral definida.

El razonamiento empleado comenzaba usando la simetría de la región D. En concreto, consistía en calcular el área de D como cuatro veces el área de la parte de D que está situada en el primer cuadrante del plano. Es decir, el área de D como cuatro veces el área de la región

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, |x| + |y| \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

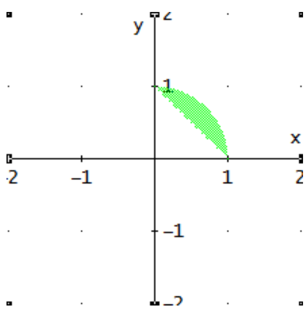


Figura 5. Región K representada con Derive

El área de la región K fue calculada mediante la integral definida

$$\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} - (1-x) \right) dx = \cdots = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

En consecuencia,

$$\text{Área}(D) = 4 \cdot \text{Área de } K = \pi - 2.$$

En el caso de los alumnos de 2º curso del Grado en ingeniería, solamente dos alumnos no fueron capaces de llegar correctamente a la solución del problema de algún modo. Además de los dos métodos descritos anteriormente, los estudiantes de ingeniería utilizaron otros dos métodos alternativos para resolver el problema, basados en contenidos específicos de la asignatura Teoría de Campos, que indicamos seguidamente.

Tercer método. Usando la integral doble.

De nuevo el razonamiento utilizaba la simetría de la región D para calcular su área como cuatro veces el área de la región $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, |x| + |y| \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

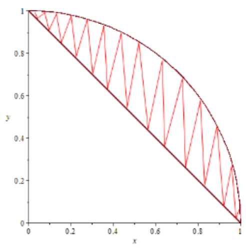


Figura 6. Región K representada con Maple

El modo habitual de obtener el área de K, en este caso, fue como una integral doble en coordenadas cartesianas, calculada como iteración de dos integrales simples:

$$\int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} - (1-x) \right) dx = \cdots = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2};$$

o bien, utilizando el teorema del cambio de variable, como una integral doble en coordenadas polares:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}}^1 \rho \, d\rho \right) d\theta = \cdots = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{1 + 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta} \right) d\theta = \cdots = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Así,

$$\text{Área}(D) = 4 \cdot \text{Área de } K = \pi - 2.$$

Cuarto método. Mediante el teorema de Green.

También en este caso se partía de la simetría de D para hallar su área como cuatro veces el área de la porción de D situada en el primer cuadrante; esto es, cuatro veces el área de

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, |x| + |y| \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Los alumnos utilizaron el teorema de Green para determinar el área de K como una integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada. Concretamente, usaron que

$$\text{Área de } K = \int_C F d\gamma = \int_\Gamma F d\gamma + \int_\Upsilon F d\gamma$$

,

donde $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es el campo vectorial $F(x,y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$, y C es la curva cerrada formada por la unión de la porción de circunferencia

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

y el segmento

$$\Upsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = 1 - x\},$$

con la orientación que da el recorrido contrario al sentido de las agujas del reloj (ver Figura 7).

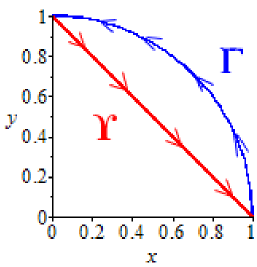


Figura 7. Curvas Γ y Υ, en azul y rojo respectivamente, representadas con Maple

Para calcular del valor de la integral de F a lo largo de Γ usaron, en general, las siguientes ecuaciones paramétricas de la curva: $x(t) = \cos t, y(t) = \text{sen} t,\ t \in [0, \pi/2]$. Así,

$$\int_\Gamma F d\gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\cos t, \text{sen} t) \cdot \left(\frac{d(\cos t)}{dt}, \frac{d(\text{sen} t)}{dt} \right) dt = \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

En el caso del segmento Υ utilizaron las ecuaciones paramétricas $x(t) = t, y(t) = 1 - t,\ t \in [0,1]$, obteniendo

$$\int_\Upsilon F d\gamma = \int_0^1 F(t, 1-t) \cdot \left(\frac{d(t)}{dt}, \frac{d(1-t)}{dt} \right) dt = \cdots = -\frac{1}{2}.$$

Y por tanto,

$$\text{Área de } K = \int_C F d\gamma = \int_\Gamma F d\gamma + \int_\Upsilon F d\gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Así,

$$\text{Área}(D) = 4 \cdot \text{Área de } K = \pi - 2.$$

Otro ejemplo de problema propuesto, con los métodos más usados por los alumnos para obtener la solución, se menciona seguidamente.

Problema. Encontrar aquellos puntos del conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ tales que la distancia al origen es máxima o mínima. Comprobar, si es posible, de alguna otra forma, la validez de la solución obtenida. (Sugerencia: Maximizar o minimizar la restricción de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ al conjunto S).

Para ayudar a los alumnos de Bachillerato, que no están muy familiarizados con enunciados de este tipo, antes de que comenzasen a trabajar el problema, se les recordó que la distancia de un punto del plano (x, y) viene dada por la función $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Asimismo, siguiendo la sugerencia indicada en el enunciado del problema, se les comentó que el problema de determinar los máximos o mínimos de dicha función, restringida a S , es equivalente al de encontrar los máximos y mínimos de $f(x, y) = x^2 + y^2$, sabiendo que $xy = 1$.

La gráfica del conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ (ver Figura 8), que es precisamente la gráfica de la curva $g(x, y) = 0$, donde $g(x, y) = xy - 1$, fue representada por todos los estudiantes de Bachillerato y de ingeniería, a partir de la expresión $y = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

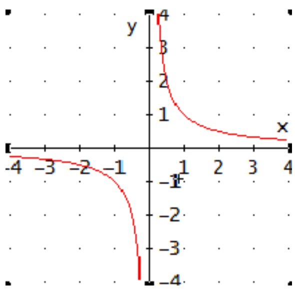


Figura 8. Representación del conjunto S con Derive

Los alumnos emplearon fundamentalmente alguno de los tres métodos que se indican a continuación para llegar a la solución del problema:

Puntos de S con distancia mínima al origen: $(-1,-1)$ y $(1,1)$, con distancia $\sqrt{2}$. Puntos de S con distancia máxima al origen: Ninguno.

Primer método. Basado en consideraciones geométricas.

El razonamiento que siguieron los alumnos que se decantaron por este método fue esencialmente el siguiente:

Como la gráfica de la curva $g(x,y)=0$ no está acotada, no existe un punto de S que tenga distancia máxima al origen.

Por otra parte, un punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ está a distancia $r>0$ del origen si y solamente si pertenece a la circunferencia de centro el origen y radio r; es decir, si y sólo si se cumple $x^2+y^2=r^2$, y en ese caso $h(x,y)=r$. Así, cada punto de S que proporcione un "primer contacto" con la familia de circunferencias $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$, será un punto de S donde la distancia al origen es mínima. A la vista de la representación de S es evidente (ver Figuras 9 y 10) que la primera circunferencia que "toca" a S es $x^2+y^2=2$, y que lo hace en los puntos $(-1,-1)$ y $(1,1)$.

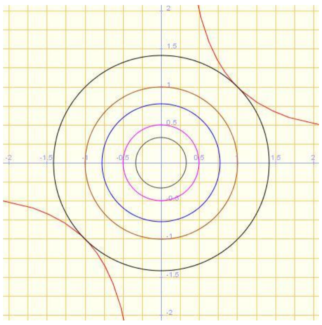


Figura 9. Conjunto S y algunas circunferencias $x^2+y^2=r^2$, representados con Wiris

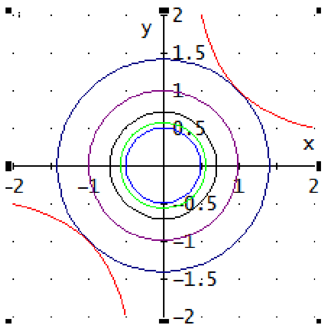


Figura 10. Conjunto S y algunas circunferencias $x^2+y^2=r^2$, representados con Derive

Esta forma de resolver el problema, basada en argumentos geométricos, fue realizada por algunos alumnos, tanto de Bachillerato como de ingeniería. No obstante, a pesar de haber llegado a la respuesta correcta, bastantes de estos alumnos no fueron capaces de exponer con claridad el razonamiento que habían seguido.

Segundo método. Como un problema de máximos y mínimos de una función real de una variable.

Los alumnos se plantearon obtener los máximos y mínimos de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ al restringirla a puntos del conjunto S. Para ello, a partir de la ecuación $xy=1$, sustituyeron en $f(x,y)$ la expresión $y=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$, obteniendo la función de una variable $k(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$.

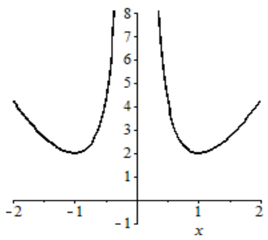


Figura 11. Gráfica de la función k, representada con Maple

Comprobaron fácilmente que los puntos críticos de k son $x=-1$ y $x=1$, resolviendo

$$0=k´(x)=2x-\frac{2}{x^3} \iff x^4=1.$$

Utilizando que la segunda derivada en $x=-1$ y $x=1$ verifica, respectivamente, que

$$k´´(-1)=2+\left.\frac{6}{x^4}\right|_{x=-1}=8>0 \text{ y } k´´(1)=2+\left.\frac{6}{x^4}\right|_{x=1}=8>0,$$

concluyeron que la función k presenta en $x=-1$ y $x=1$ sendos mínimos relativos, en ambos casos de valor 2. De esta forma, mostraron que k tiene un mínimo absoluto de valor 2 en $x=-1$ y $x=1$, y ningún máximo absoluto.

En otras palabras, obtuvieron que la restricción de la función $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ al conjunto S alcanza un mínimo absoluto de valor $\sqrt{2}$ en $(-1,-1)$ y en $(1,1)$, pero no tiene un máximo absoluto.

Seguidamente presentamos un tercer método empleado por algunos estudiantes de 2º curso del Grado en ingeniería, basado en el método de los multiplicadores de Lagrange. Esta forma de obtener la solución del problema estaba fuera del alcance de los alumnos de 2º de Bachillerato, ya que en la asignatura Matemáticas II no se estudia dicho método.

<u>Tercer método</u>. Mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

Los estudiantes consideraron la función (auxiliar) de Lagrange

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=x^2+y^2+\lambda(xy-1)\ (\lambda\in\mathbb{R}),$$

y resolvieron el sistema:

$$0=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x+\lambda y\,,$$

$$0=\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y+\lambda x\,,$$

$$0=g(x,y)=xy-1\,,$$

cuyas soluciones son:

$$x=-1,\ y=-1\ (\lambda=-2)\quad \text{y}\quad x=1,\ y=1\ (\lambda=-2)\,.$$

Para determinar el carácter de tales puntos, tuvieron en cuenta que para los vectores no nulos del núcleo de la aplicación lineal dada por la diferencial de g en $(-1,-1)$,

$$\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\alpha\frac{\partial g}{\partial x}(-1,-1)+\beta\frac{\partial g}{\partial y}(-1,-1)=0\right\}=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\beta=-\alpha\},$$

la forma cuadrática Q asociada a la matriz hessiana de F en $x=-1,\ y=-1\ (\lambda=-2)$ verifica

$$Q(\alpha,-\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{pmatrix}=8\alpha^2>0\,.$$

Y en consecuencia, en $(-1,-1)$ la función f alcanza un mínimo relativo condicionado de valor 2.

Análogamente, para los vectores no nulos del núcleo de la aplicación lineal dada por la diferencial de g en $(1,1)$,

$$\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\alpha\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)+\beta\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)=0\right\}=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\beta=-\alpha\},$$

obtuvieron que la forma cuadrática Q asociada a la matriz hessiana de F en $x=1,\ y=1\ (\lambda=-2)$ es

$$Q(\alpha,-\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{pmatrix}=8\alpha^2>0\,.$$

Y por tanto que en $(1,1)$ la función f alcanza un mínimo relativo condicionado de valor 2.

Concluyeron, entonces, que la restricción de la función $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ al conjunto S alcanza un mínimo absoluto de valor $\sqrt{2}$ en los puntos $(-1,-1)$ y $(1,1)$, pero no tiene un máximo absoluto.

REFLEXIONES

En este apartado únicamente queremos recoger algunas reflexiones motivadas como consecuencia de la realización de la experiencia educativa descrita. Aunque nos parece interesante, el objetivo de la actividad no fue realizar un estudio estadístico acerca de las respuestas o las distintas formas empleadas en obtener la solución de cada problema por parte de los estudiantes de una misma clase, ni comparar los resultados obtenidos entre los dos niveles educativos.

En primer lugar, creemos que es conveniente resaltar que la disposición de los alumnos, en términos generales, ha sido muy buena. La experiencia de utilizar, como metodología de aprendizaje, problemas o ejercicios cuya resolución fuese abierta, de modo que se pudiese llegar a la solución aplicando conceptos y resultados propios de la materia, pero también mediante argumentos basados en contenidos ya estudiados previamente, les ha parecido interesante y positiva. Asimismo, pudimos constatar que la percepción de la dificultad de los problemas fue pequeña para muchos de los estudiantes, precisamente por la flexibilidad en la resolución de los mismos. Esto contribuyó a que percibiesen cada asignatura como una materia a su alcance.

Como ya hemos comentado, a los profesores nos ha permitido obtener información sobre posibles carencias en el grado de adquisición de conocimientos por parte del alumnado, tanto en la asignatura impartida por cada uno de nosotros como en asignaturas cursadas anteriormente por los estudiantes. Evidentemente, esta información nos ha ayudado a concentrarnos en aquellos “puntos débiles” del aprendizaje del alumno que debían ser mejorados.

La actividad también nos ha parecido útil en sí misma como experiencia relacionada con el aprendizaje basado en problemas. Aunque, en general, la respuesta de los alumnos no fue uniforme a la hora de obtener la solución de un problema, es cierto que la mayoría de los alumnos tendía a escoger (como primera opción) normalmente el modo de resolver el ejercicio que involucraba nociones o teoremas relacionados con el tema de la asignatura tratado en ese momento, a pesar de que dicho procedimiento fuese más laborioso o requiriese un bagaje matemático mayor. Esto nos ha resultado bastante llamativo. Por ejemplo, en el caso del problema del cálculo del área de la región plana que acabamos de describir, los alumnos de Bachillerato obtuvieron casi de forma mayoritaria su solución utilizando la integral definida, en lugar de usar el primer método, más sencillo y rápido, basado en el área de un círculo y de un cuadrado. Algo similar sucedió en el caso de los estudiantes de ingeniería, que optaron casi unánimemente por utilizar el cuarto método, basado en el teorema de Green. La constatación de este hecho nos ha hecho reflexionar con los alumnos sobre qué método es más eficiente, si de lo que se trata es de resolver un problema del modo más simple, rápido o con el menor número de cálculos.

Otro aspecto que nos parece interesante comentar es que, aunque una buena parte de los estudiantes llegaba a obtener la solución de un problema de alguna manera (el porcentaje dependía de la dificultad del ejercicio), el número de ellos que podía comprobar por otro método si la solución obtenida tenía sentido disminuía bastante. Es decir, en algunos de los problemas propuestos la mayor parte de los alumnos sabía resolverlos, pero conocía una sola manera de hacerlo o se equivocaba al intentarlo de otro modo.

Como aspecto negativo a la hora de llevar a cabo la actividad destacamos la limitación de tiempo con la que se suele contar en una asignatura de matemáticas de 2º de Bachillerato o de 2º curso de un Grado en ingeniería. Las razones principales son la amplitud del temario a desarrollar y el número de horas semanales para impartir la materia, que resulta especialmente escaso en el caso de clases en aula de informática.

Referencias y recursos electrónicos

Abia, J. A.; García, J; Marijuán, C. (1998). Cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$. Teoría y ejercicios. *Editado por los autores*.

Colera, J.; Oliveira, M. J. (2009). Matemáticas II. Bachillerato 2. *Anaya*.

García, F; Gutiérrez, A (1992). Cálculo infinitesimal II. Volúmenes 1 y 2. *Pirámide*.

Guzmán, M de. (2006). Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos. *Pirámide*.

Larson, R.; Hostetler, R. P.; Edwards, B. H. (2006). Cálculo I y II. *McGraw-Hill*.

Marsden, J. E.; Tromba, A. J. (2010). Cálculo Vectorial. *Addison Wesley Longman*.

Monteagudo, M. F.; Paz, J. (2009). Matemáticas 2º Bachillerato: ciencias y tecnología. *Edelvives*.

Polya, G. (2001). Cómo plantear y resolver problemas. *Trillas*.

Rittle-Johnson, B.; Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99* (3), 561-574.

Salas, S. L.; Hille, G; Etgen, G. J. (2003). Calculus. Una y varias variables. Volúmenes I y II. *Reverté*.

Star, J. R.; Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: the case of equation solving. *Learning and Instruction, 18*, 565-579.

Vizmanos, J. R.; Hernández, J.; Alcaide, F. (2009). Matemáticas 2: ciencias y tecnología. *SM*.

http://www.maplesoft.com/contact/webforms/maple_evaluation.aspx

http://www.mecd.gob.es/inee/portada.html

http://www.wiris.com/es/

http://www.wiris.net/educa.madrid.org/wiris/es/index.html

Para hacer referencia al artículo:

Manzano, A. y Sobrado, M. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas: Una experiencia en el aula. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 415-429). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

INNOVACIÓN METODOLÓGICA EN EL PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN EL COLEGIO MONTESSORI DE ZARAGOZA. IMPLEMENTACIÓN DEL PEIM

Pilar Ester Mariñoso[a], Vicente Bermejo[b], Margarita Blanco[c]

[a]Colegio Montessori. Zaragoza, [b]Universidad Complutense. [c]IES "Vega del Prado"

Resumen:

El PEIM es un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático, que surgió desde el Departamento de Psicología evolutiva de la Universidad Complutense de Madrid. En él se aboga por un cambio metodológico en la enseñanza de las matemáticas donde los alumnos pasan a ser losagentes principales de su aprendizaje, el profesor, el cual debe ser el guía, la selección de contendidos debe secuenciarse en función de su complejidad y significatividad para el alumno y el aula debe tener un clima constructivista destacando la cooperación entre los alumnos. Recogemos la implementación del Peim en el primer ciclo de Primaria del Colegio Montessori de Zaragoza, así como el análisis de las estrategias que los alumnos realizaban en la resolución de los PV.

Palabras clave: *constructivismo, problemas verbales, estrategias, cooperación.*

INTRODUCCIÓN

Ante los resultados que se estaban obteniendo en nuestro centro, en las pruebas de diagnóstico realizadas en los últimos años pensamos que era necesario realizar algún cambio sustantivo que nos permitiese mejorar la competencia matemática de nuestros alumnos.

Por competencia matemática no entendíamos que realizasen cálculos más veloces, ni que solamente hubiera una mejor resolución en actividades que se les presentaban de manera más o menos asidua, sino que éramos conscientes de la importancia que nuestros alumnos aprendan de forma significativa, construyendo su propio conocimiento, que les permitiese una aplicación directa de lo aprendido en su vida diaria, partiendo siempre de sus conocimientos anteriores.

Para ello introdujimos en nuestras aulas, talleres los cuales nos permitieron poner en marcha un cambio metodológico. Este cambio venía impulsado por un programa, PEIM: Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático, el cual se asienta sobre unas bases constructivistas, lo cual nos facilitaba realizar esos cambios siguiendo la línea deseada.

PRINCIPIOS METODOLÓGICOS DEL PEIM

El PEIM es un programa creado por un equipo de investigadores de Psicología evolutiva de la Universidad Complutense de Madrid, este programa pretende ser una respuesta a las altas cuotas de fracaso escolar que los alumnos tienen en matemáticas.

El marco teórico en el cual se enmarca el PEIM, como hemos especificado, es el constructivismo, el cual aboga por la construcción del conocimiento por el propio alumno.

Tal como expone Cobb (1998), hay dos razones fundamentales por las que el constructivismo puede ser una alternativa a metodologías más tradicionales, una de ellas es que los alumnos son capaces de resolver una gran variedad de problemas matemáticos debido a que desarrollan estructuras más complejas y abstractas. Por otra parte, por medio de la construcción de su propio conocimiento cambia su perspectiva y los alumnos consideran que son capaces de crear y controlar las matemáticas.

Como hemos expuesto los alumnos no reciben de manera pasiva el conocimiento matemático sino que es creado por ellos, hay que tener en cuenta que el alumno viene a las aulas ya con conocimientos que han ido originándose en el contexto de su vida diaria tal como exponen las investigaciones de (Resnick, 1992). Desde su nacimiento cualquier niño, de cualquier cultura, crece en un ambiente con multitud de estímulos que inician su aprendizaje matemático (Ginsburg & Seo, 1999).

Por ello es fundamental que el niño incorpore lo que se le proporcione en el colegio a sus conocimientos previos dotándolos de significación para él, para esto es necesario que alumno sea sujeto activo en el aprendizaje. Asumir esta premisa nos permitirá evitar un aprendizaje memorístico y descontextualizado, ya que si proporcionamos una enseñanza directiva de la matemáticas formales olvidando el conocimiento informal del niño no conseguiremos nuestro principal objetivo, que el alumno construya un aprendizaje significativo que le permita ser más competente matemáticamente hablando en su día a día.

De esta manera el rol del profesor cambia sustancialmente del modelo que nos presenta la escuela tradicional.

El profesor deja de ser un instructor para ser un guía que ayude a los alumnos a buscar su propia forma resolver las distintas actividades propuestas. Para ello debe presentarse situaciones en las que alumno pueda contemplar distintos métodos de resolución, sometiéndolos a análisis críticos siendo capaz de justificar el cómo y por qué lo ha realizado así.

Por ejemplo, tal como exponía (Groen & Resnick, 1977), los niños son capaces de inventar sus propios métodos de suma en ausencia de la instrucción de un adulto.

El rol del docente pasa a ser un guía que por medio de su intervención modela las explicaciones de los alumnos en términos más adecuados, para ello debe distanciarse de modelos en los que el docente premia las respuestas adecuadas y corrige las incorrectas.

Para ello hay que resaltar la importancia de la formación del docente.

“El PEIM requiere que el profesorado tenga una formación psicopedagógica actualizada y un conocimiento exhaustivo del desarrollo aprendizaje de los contenido matemáticos específicos. Actualmente, el marco teórico general más ampliamente aceptado para fundamentar el proceso de enseñanza – aprendizaje en el aula, es sin duda alguna, el constructivismo”. Bermejo (2002)

La formación del docente es uno de los pilares fundamentales ya que el docente actuará dependiendo de sus creencias, así un profesor que conoce cómo se desarrolla el proceso de enseñanza aprendizaje matemático en sus alumnos podrá secuenciar de manera apropiada los contenidos que deben trabajar los alumnos, de esta forma desde el `programa PEIM, toma especial relevancia el rol del docente como facilitador del aprendizaje frente al instructor y transmisor de conocimientos.

Matos (2000, p.25) considera: “El docente es un mediador no de manera declarativa, de hecho debe asumir el reto de involucrarse en la construcción del conocimiento en el aula. Dentro de la praxis pedagógica integradora, el rol del docente debe ser percibido como promotor del aprendizaje, motivador y sensible”.

Podríamos decir que el proceso de aprendizaje pasa a ser un proceso comunicativo, en el cual el docente escucha a sus alumnos, comprendiendo sus metas y asume sus razonamientos lógicos.

Otro de los pilares fundamentales del PEIM es que la instrucción de las matemáticas tenga como objetivo la comprensión, tal como expone (Fennema y Romberg , 1999).Para conseguir que el alumno construya aprendizajes significativos es esencial que el docente sea conocedor del desarrollo evolutivo que los niños tienen acerca de las estrategias que utilizan para resolver las distintas actividades propuestas, los errores más frecuentes que comente , el grado de dificultad con el que se encuentran los alumnos a la hora de resolver los problemas etc.

Sin que esto signifique olvidarnos del conocimiento informal matemático con el que los niños vienen al aula, así como presentarles los contenidos de forma similar a cómo ellos se lo plantearían en su vida diaria, por ello es necesario que se realice a través de la resolución de problemas verbales.

Por ello el PEIM propone la selección de contenidos curriculares, teniendo en cuenta la importancia de realizar actividades que impliquen razonamiento, comprensión, así como su estructuración dependiendo del grado de dificultad para el alumno.

El profesor debería utilizar el curriculum como algo más que una colección de actividades debería de ser coherente, resaltando lo más importante en matemáticas y bien organizado a través de los distintos cursos (National Association for the Education of Young Children and National Council of Teachers of Mathematics, 2002, p. 2).

De ahí la importancia que el programa pone al trabajo del docente antes de entrar en el aula, porque de éste, entre otras variables, dependerá la efectividad del mismo.

Pensamos tal como propone el PEIM, que los problemas verbales de adicción y sustracción, en el primer ciclo de Primaria, son el mejor medio para introducir los distintos conceptos matemáticos, ya que proporciona a los alumnos situaciones que ellos mismos se encuentran en su vida diaria y que deben resolver, tal como hemos expuesto anteriormente, por lo que nos permite por medio del conteo y la manipulación de los objetos llegar resolver situaciones que de manera algorítmica resolverían, pero no lo harían de una manera significativa para ellos.

Esta introducción debe realizarse de una manera gradual atendiendo a su dificultad donde los problemas. Pero de qué depende la dificultad de los problemas verbales a la hora de resolverlos.

Esta pregunta ha sido estudiada en múltiples investigaciones. En las primeras de ellas se comprobó que la dificultad de los problemas matemáticos se debía a diversas variables lingüísticas como por ejemplo las estructuras sintácticas por las que se expresa el problema, la longitud del enunciado, el vocabulario etc.

Podríamos decir que hay muchas variables que influyen en la dificultad de los problemas como por ejemplo, la estructura semántica, el tamaño de las cantidades propuestas, el nivel de abstracción de los sumandos, la ubicación de la incógnita o el tipo de sentencia, es decir, canónica o no canónica y la presencia o no de ayudas, el lugar de la incógnita. Bermejo (2002, pg 51).

Podemos encontrarnos muchas investigaciones en las cuales estudian los distintos problemas atendiendo a su estructura semántica, estas clasificaciones difieren en las distintas formas que muestran aunque no en su contenido. Vergnaud (1982),Carpenter y Moser (1982), Riley et al. (1983) y Bermejo (1998, 2002) son algunas de las clasificaciones que podríamos destacar.

Vergnaud (1982) atiende a los criterios de medida, transformación y relación estática a la hora de clasificar los problemas.

Carpenter y Moser (1982) realizan distintos análisis que les permiten llegar a distintas características de los problemas verbales.

Una de ellas realiza una aproximación de los problemas verbales dependiendo de la sintaxis, vocabulario, número de palabras etc. (Jerman, 1973), en otra de ellas distingue los problemas verbales respecto a las sentencias que representan (Lindvall e Ibarra, 1980; Rosenthal y Resnick, 1974) y otra realiza la aproximación dependiendo de las características semánticas de los problemas (Gibb, 1956;Vergnaud, 1982).

Atendiendo a estas últimas realizan una clasificación dependiendo de cuatro dimensiones:

a) Carácter dinámico vs estático de la relación entre los conjuntos del problema.

b) Tipo de relación entre un conjunto y sus subconjuntos.

c) Si la acción implica un incremento o un decremento de la cantidad inicial.

d) Naturaleza de la incógnita.

Establecen un total de 17 clases de problemas atendiendo a estas dimensiones.

Por otra parte, Riley et al. (1983, 1988) clasifican los problemas en estas tres categorías: Combinación, Cambio y Comparación. Esta clasificación es similar a la de Carpenter y Moser (1982), Vergnaud (1982).

Bermejo y otros (1998, 2002) presentan una clasificación similar a las expuestas anteriormente, aunque debido a las distintas aportaciones se podría decir que es más completa cada uno de los problemas se divide dependiendo del lugar donde se encuentra la incógnita.

Bermejo y otros (1998) propone estas categorías: Cambio, Combinación, Comparación e Igualación.

Los problemas de **Cambio e Igualación** muestran a la adición y sustracción como acciones, siendo esta acción la causante de una modificación de una cantidad bien aumentándola o disminuyéndola.

En **Combinación y Comparación** la relación entre ambas cantidades es estática.

En los problemas de **Cambio** el lugar de la incógnita nos va a dar lugar a seis tipos de problemas diferentes, dependiendo si la magnitud que no conocemos es el punto de partida, el resultado o el cambio en sí.

En los problemas de **Combinación** se da la relación entre un conjunto y dos subconjuntos, por lo que la resolución irá encaminada en conocer el resultado de la unión de ambos subconjuntos, o por el contrario saber cuál es uno de los subconjuntos.

En los problemas de **Comparación** nos encontramos dos conjuntos disjuntos, en los que uno es el conjunto de referencia y el otro es el conjunto que se compara, habiendo un tercer conjunto que es la diferencia entre ambos. En estos problemas cualquiera de los tres conjuntos puede ser la parte desconocida. Podemos encontrarnos que el conjunto mayor puede ser el conjunto referente o por el contrario el conjunto de comparación. Por ello, existen seis tipos distintos de problemas de comparación.

Los problemas de **Igualación** nos plantean dos conjuntos separados, para plantearnos qué debemos hacer para igualar ambos conjuntos, es decir, que debemos hacer en un conjunto para que sea igual que el otro. Si la acción debe realizarse en el conjunto menor se dice que son problemas de igualación- añadir, si por el contrario se realiza en el conjunto mayor se denominan problemas de igualación- separar, por lo que dependiendo de dónde se sitúe la incógnita podemos encontrar tres problemas de cada tipo.

Tabla 1. Problemas verbales de adición según Bermejo y otros.

TIPO	EJEMPLO	INCOGNITA
Cambio 1	Mario tenía unos cuantos lápices. Elena le da 3 lápices más. Ahora Mario tiene 7 lápices. ¿Cuántos lápices tenía al principio?	Comienzo
Cambio 2	Mario tenía 3 lápices. Elena le dio unos cuantos más. Si Mario ahora tiene 7 lápices ¿Cuántos lápices le dio Elena?	Cambio
Cambio 3	Mario tenía 4 lápices. Elena le dio 3 lápices más ¿Cuántos lápices tiene ahora Mario?	Resultado

Combinación 1	En un prado hay 6 vacas pastando, 4 son negras y el resto blancas ¿Cuántas vacas hay?	Parte
Combinación 2	En una clase hay 7 escolares esperando al profesor. Algunos son chicos y 3 son chicas ¿Cuántos chicos hay?	Parte
Combinación 3	María tiene 4 caramelos y Juan tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen entre los dos?	Conjunto total
Comparación 1	Ana tiene 6 lápices .Tiene 2 más que Pedro ¿Cuántos lápices tiene Pedro?	Referente
Comparación 2	Ana tiene 5 lápices y Pedro tiene 3 lápices ¿Cuántos lápices tiene Ana más que Pedro?	Diferencia
Comparación 3	Ana tiene 4 lápices. Pedro tiene 3 lápices más que Ana. ¿Cuántos lápices tiene Pedro?	Comparación
Igualación 1	Ángel tiene 8 cromos. Si a Luis le diese 3 cromos tendría los mismos que Ángel. ¿Cuántos cromos tiene Luis?	Igualar conjunto desconocido
Igualación 2	Luis tiene 7 cromos y Ángel tiene 4 cromos. ¿Cuántos cromos necesita Ángel para tener los mismos que Luis?	Igualación desconocida
Igualación 3	Luis tiene 4 cromos. Si le dan 3 cromos más tendría los mismos que Ángel. ¿Cuántos cromos tiene Ángel?	Igualar conjunto conocido
Relacional 1	Al principio Ester tenía algunos cromos más que su amiga. Ester encuentra 3 cromos. Ahora Ester tiene 9 cromos más que su amiga ¿Cuántos cromos tenía al principio Ester más que su amiga?	Comparación inicial desconocida
Relacional 2	Camilo tiene 5 reglas más que Rodrigo. Camilo se compra alguna más. Ahora Camilo tiene 13 reglas más que Rodrigo. ¿Cuántas reglas se ha comprado Camilo?	Cambio desconocido
Relacional 3	Al principio Salomé tenía 10 lápices más que Jaime. Salomé se ha comprado 4 lápices. ¿Cuántos lápices tiene ahora Salomé más que Jaime?	Comparación final desconocida

(Bermejo y otros 2012, pg 59)

Tabla 2. Problemas verbales de sustracción según Bermejo y otros.

TIPO	EJEMPLO	INCOGNITA
Cambio 4	Mario tenía una caja de lápices. Dio 3 lápices a Elena. Ahora le quedan 4 lápices. ¿Cuántos lápices había en la caja?	Comienzo
Cambio 5	Mario tenía 7 lápices y da algunos a Elena. Ahora le quedan 3 lápices ¿Cuántos lápices le dio a Elena?	Cambio
Cambio 6	Mario tiene 7 lápices y da 3 a Elena. ¿Cuántos lápices le quedan a Mario?	Resultado
Comparación 4	Ana tiene 5 globos .Tiene 2 menos que Pedro ¿Cuántos globos tiene Pedro?	Referente
Comparación 5	Ana tiene 3 globos. Pedro tiene 7 globos. ¿Cuántos globos tiene Ana menos que Pedro?	Diferencia
Comparación 6	Ana tiene 8 globos. Pedro tiene 3 lápices menos que Ana. ¿Cuántos globos tiene Pedro?	Comparación
Igualación 4	Ángel tiene 4 cromos. Si a Luis le diese 5 cromos tendría los mismos que Ángel. ¿Cuántos cromos tiene Luis?	Igualar conjunto desconocido
Igualación 5	Ángel tiene 7 cromos y Luis tiene 4 cromos. ¿Cuántos cromos debería perder Ángel para tener los mismos que Luis?	Igualación desconocida
Igualación 6	Ángel tiene 7 cromos. Si perdiesen 3 cromos tendría los mismos que Luis. ¿Cuántos cromos tiene Luis?	Igualar conjunto conocido
Relacional 4	Al principio Fran tenía algunas canicas más que Eduardo. Fran pierde 3 canicas. Ahora Fran tiene 12 canicas más que Eduardo. ¿Cuántas canicas tenía al principio Fran más que Eduardo?	Comparación inicial desconocida
Relacional 5	Jesús tiene 15 soldados más que Javi. Jesús regala algunos soldados. Ahora Jesús tiene 7 soldados más que Javi. ¿Cuántos soldados ha regalado Jesús?	Cambio desconocido
Relacional 6	Al principio Cesar tenía 11 juguetes más que Tamara. Cesar ha roto 3. ¿Cuántos juguetes tiene ahora Cesar más que Tamara?	Comparación final desconocida

(Bermejo y otros 2012, pg 59)

IMPLEMENTACIÓN DEL PEIM EN LAS AULAS

El programa de intervención se llevó en el centro en el Primer Ciclo de Primaria, nuestro centro cuenta con dos vías por curso, por lo que se llevó en total en cuatro cursos, dos de primero y dos de segundo.

Cada clase se dividió en dos grupos de forma aleatoria siendo uno el grupo control y el otro el grupo experimental.

El grupo experimental trabajó conmigo dos días a la semana realizando una implementación del PEIM, mientras que el grupo control lo hizo con una metodología tradicional.

Trabajamos los contenidos seleccionados por medio de problemas verbales. La secuenciación de éstos respondió, tal como propone el PEIM, partiendo de la clasificación que se realiza desde las distintas investigaciones (Bermejo y Rodriguez , 1990 ay b ; Carpenter y Moser , 1984), basadas en el escalograma de Guttman, apareciendo en siguiente orden de menos dificultad a más:

Tabla 3. Orden de dificultad de los problemas verbales

Combinación con conjunto total desconocido
Cambio con el resultado desconocido
Igualación en el conjunto desconocido
Cambio con conjunto de cambio desconocido
Igualación en el conjunto conocido
Combinación con parte inicial desconocida
Cambio con comienzo desconocido
Comparación con referente desconocido
Comparación con diferencia desconocida
Igualación con cantidad comparada desconocida
Combinación con parte desconocida en el segundo sumando
Comparación con el conjunto de comparación desconocido
Relacional con sumando inicial desconocido
Relacional con resultado desconocido

Estos problemas planteaban situaciones de la vida diaria de los alumnos, se contextualizaron a diversas situaciones del centro o de su entorno más inmediato.

Al inicio del curso, tal como propone el PEIM, se llevó a cabo una evaluación inicial de todos alumnos en el mes de Octubre, ésta se realizó de manera individual donde se les realizó un perfil individual a cada uno de los alumnos, conociendo así sus conocimientos previos, así como las distintas estrategias que utilizaban para resolver los distintos problemas.

Las pruebas que se les aplicaron fueron la prueba baremada TEDI-MATH y también les solicitó que resolvieran PV.

Hubo un total de 18 problemas verbales, que respondían a las distintas categorías, cuatro de cada una de ellas.

Concretamente presentamos: cambio con resultado desconocido, cambio con comienzo desconocido, combinación con parte inicial desconocida, combinación con conjunto total desconocido, igualación con conjunto desconocido, igualación desconocida, comparación con diferencia desconocida , comparación con comparación desconocida, relaciones con resultado desconocido, relaciones con sumando inicial desconocido.

Todos ellos se formularon de manera aditiva y sustractiva a excepción de los problemas de combinación.

También se presentaron expresiones numéricas de adición y sustracción con la incógnita en el primer término, segundo término y al final, de forma aditiva y sustractiva.

En el mes de Marzo el grupo experimental volvió a resolver la tarea de resolución de problemas para realizar un control sobre el uso de estrategias en la resolución de problemas. Al final de curso en Junio a todos los grupos tanto experimental como control se les volvió a aplicar el TEDI-MATH y la resolución de PV.

Se elaboró una hoja de registro donde se recogieron las distintas estrategias que usaban los alumnos para resolver los distintos PV, con el fin de conocer si estás eran cambiaban o eran más desarrolladas con una u otra metodología.

Para elaborar el registro nos guiamos por los distintos procedimientos que los niños llevan a cabo para buscar una solución al problema planteado, estas estrategias fueron expuestas por Carpenter y Moser (1982): podemos distinguir entre estrategias de modelado directo, de conteo y de hechos numéricos:

Estrategias de modelado directo

Respecto a la suma

Contar todo, (counting all), sería una de ellas, el niño cuenta todos los objetos de un sumando, realiza lo mismo lo mismo para el segundo sumando y después vuelve a contar todos los objetos unidos empezando por el primero.

Respecto a esta estrategia Bermejo y Rodríguez (1993) proponen 4 niveles evolutivos:

N1: Se representa cada uno de los sumandos con los dedos realizando un conteo en cada uno de ellos y posteriormente se cuentan todos los dedos conjuntamente.

N2: Se representa cada uno de los sumandos con los dedos sin necesidad de contarlos, contando todo a continuación.

N3: Se van contando los sumando a la vez que se representan con los dedos.

N4: Expresa uno de los sumandos y añade el otro representándolo con los dedos y contándolo a la vez.

Contar a partir del primer sumando, supone un adelanto de la estrategia anterior ya que el niño no tiene que contar todos los sumandos sino que comienza a partir del primero.

Contar a partir del sumando mayor. Esta estrategia es más evolucionada que las anteriores, la diferencia es que el alumno parte del sumando mayor independientemente de donde se sitúe para contar el sumando menor.

Carpenter y Moser (1984), proponen la evolución de las estrategias como: *contar todo con modelos → contar a partir del primer sumando → contar a partir del sumando mayor*.

La ventaja de la segunda sobre la primera es que se debe contar un sumando menos y sobre la tercera es que el recuento es menor.

Respecto a la resta

Separar de (separating from). En esta estrategia los niños representan bien por objetos o mediante sus dedos el conjunto mayor "a" y posteriormente quitan el conjunto menor "b" siendo la respuesta el número de objetos que no se han quitado.

Separa a (separating to). Al igual que en la estrategia anterior se forma el conjunto con mayor número de objetos"a". De este conjunto se quitan objetos hasta que queden el conjunto el número de objetos "b" siendo la respuesta el número de objetos quitados.

Contar hacia delante (adding on) Se realiza formando el grupo pequeño de objetos “b” y se van añadiendo hasta llegar al número de objetos del conjunto mayor “a” , siendo el resultado el número de elementos añadidos.

Conteo de secuencias

Contar hacia atrás desde (counting down from) Se comienza el conteo desde el número mayor “a” y se cuenta tantos elementos como el número menor “b”, la respuesta es el último número de la secuencia. Por ejemplo 8-3 se comenzaría por 7, 6, 5. Diversos autores, Baroody (1984); Carpenter y Moser (1984); Fuson (1984) han señalado dos formas de llevar a cabo esta estrategia, bieniniciando la cuenta en el número del minuendo bien en el del númerosiguiente. Si el niño realiza la resta 8 - 3, puede empezar, en el primer caso, en 8, sigue 7, 6, y diría como resultado 5. En el segundo caso comenzaría la cuenta en 7, 6, 5,. El resultado sería 5.

Contar hacia atrás hasta (counting down to). Se comienza a contar desde el número mayor “a” hasta que se llega al número menor “b” siendo la respuesta el número de elementos contados en la secuencia.

Contar hacia adelante a partir de un número dado (counting up from

given). Se comienza el conteo con el número menor “b” contando hacia delante hasta el número mayor “a”, la respuesta es el número de elementos contados.

Selección (choice) se utilizan las estrategias “contar a partir de un número dado” o “contar hacia atrás” dependiendo de cuál de las dos es más efectiva, para ello el niño evalúa cuál de las dos le va a permitir realizar un conteo menor y la pone en práctica.

En el caso de que el sustraendo sea un número grande o si el sustraendo y el minuendo están próximos, contar a partir del número dado requiere menos exigencias para el alumno que contar hacia atrás.

Podemos decir que se pueden establecer ciertas relaciones a nivel de procesos cognitivos que el niño debe realizar entre las estrategias de conteo y de modelado directo.

Por ejemplo:

Separar de (modelado directo) → contar hacia atrás desde (conteo)

Separar a (modelado directo) → contar hacia atrás hasta (conteo)

En ambas los procesos cognitivos son similares pero se diferencian en que las estrategias de modelado directo necesitan de la manipulación de objetos mientras se realizan.

Estrategias de hechos conocidos

Esta estrategia se utiliza tanto para la adición como para la sustracción. En este nivel los niños abandonan el conteo de secuencias para llegar establecer procedimiento en el que la memorización y uso de reglas está presente.

Estas estrategias tienen su base en el cálculo mental, se memorizan a través de la realización repetidamente de la misma secuencia. Según Ginsburg, Posner y Russell, (1981) hay alumnos que en educación infantil ya han memorizado algunas combinaciones.

La recuperación de estas secuencias suele ser rápida y automática. Por ejemplo 2+2=4 o 5+5=10.

Estrategias de hechos derivados

Esta estrategia la lleva a cabo el alumno para poder dar respuesta a combinaciones que no conoce de memoria pero que recuperando alguna que conoce puede resolverlas con facilidad, es decir, da solución a nuevas combinaciones partiendo de las que sabe.

Por ejemplo cuando el niño memoriza resultados concretos como que 3+3 =6. En este momento si se le plantea al niño que tiene que resolver un problema donde debe resolver 3+4. El niño recupera que 3+3 son 6, por lo que el resultado es 7 ya que suma 1 al resultado recuperado porque que 3+1 = 4.

Una vez recogidos los datos se procedió a analizar las estrategias que los alumnos emplean para resolver los distintos tipos de problemas.

Este análisis se ha realizado tomando como referencia cada uno de los distintos tipos de problemas medidos en los distintos grupos, sin hacer distinción del grupo control del experimental.

RESULTADOS OBTENIDOS. ANÁLISIS DE ESTRATEGIAS.

En este apartado vamos a hacer un recorrido sobre los diferentes tipos de estrategias utilizadas por los niños a la hora de resolver los diferentes problemas verbales.

Problemas de cambio

En los problemas de adición con la incógnita en el conjunto inicial la estrategia más utilizada en el grupo de 1º fue la “contar hacia atrás “en un 33,33% y “contar atrás” en un 27, 7% de los ensayos. En el grupo de 2º la estrategia más utilizada es “contar hacia atrás” en un 43.75% de los casos y la estrategia “memorística” apareciendo también en un 43.75% de las veces.

Cuando estos problemas se plantean de forma sustractiva, es decir sustracción con la incógnita en el término inicial, el grupo de alumnos de 1º utiliza la estrategia de “contar a partir de uno de los sumando “en un 40% y el grupo de 2º también utiliza esta estrategia pero esta vez en un 51.21% seguida de la estrategia memorística en un 33% de los casos.

En los problemas de adición con la incógnita en el resultado los niños de 1º utilizan para su resolución la estrategia de “contar a partir de uno de los sumandos” en un 59.37% de los ensayos. En cambio, en el grupo de 2º supera la regla “memorística” ya aparece en un 48.88%.

En los problemas de sustracción con la incógnita en el resultado en el grupo de 1º lo resuelven mediante la estrategia de “quitar de” en 50% mientras en el grupo de 2º se utilizan más la estrategia “memorística” en un 45%.

Problemas de Combinación

En los problemas de combinación los grupos utilizan estrategias parecidas. en el grupo de 1º la estrategia “contar hasta” aparece en un 59.37%, en el grupo de 2º aparece en un 46, 6% de los casos mientras que dan paso a estrategias más variadas y avanzadas como la “memorística” en un 40%

Cuando la incógnita se sitúa en un tercer término, es decir, incógnita en el resultado la estrategia más utilizada es “contar a partir de un término” en el grupo de 1º 47.5% y en el de 2º 42.22% apareciendo también estrategias más avanzadas como la memorística en 37.77% de los casos.

Problemas de Comparación

En los problemas de comparación de adición con la entidad desconocida en el referente el 50% de los niños de 1º utilizan la estrategia de “quitar a “, por el contrario los de 2º suelen emplear “contar hacia atrás” la utilizaron el 41.6%.

Cuando los problemas son de sustracción con la incógnita en el referente en el caso de 1º la estrategia más utilizada es la memorística en un 50% de los casos, en el grupo de 2º es la de “contar hacia atrás” en un 40.9% y la “memorística” en un 31.81%.

En los problemas de comparación de adición cuando el término desconocido es la comparación la estrategia más utilizada es la de “contar a partir de uno de los sumandos” tanto en 1º como en 2º siendo el 42.85% y el 34.78% respectivamente.

En los problemas de sustracción con la incógnita en la comparación, la estrategia es la misma en 1º y 2º siendo la “memorística” produciéndose el cambio fundamental en el porcentaje de aparición. En 1º hablaríamos de un 40% mientras que en 2º sería de un 85%

Problemas de Igualación

En los problemas de igualar en el conjunto desconocido la estrategia más utilizada es la de “memorística” en ambos cursos siendo en 1º en un 46.15% y en 2º. Cuando el problema es de igualar en el conjunto desconocido de sustracción los niños de 1º cuentan “a partir de uno de los sumandos” en un 44.4% mientras que los de 2º utilizan “contar hacia atrás a hasta” en un 30%.

En los problemas de adición cuando se trata de igualar en el conjunto conocido los alumnos de 1º y 2º utilizan “contar a partir de uno de los sumandos” en un 54.54%.y un 54.28% respectivamente.

Cuando el problema es de sustracción igualando en el conjunto conocido los alumnos de 1º “cuentas a partir de uno de los sumandos “en concreto el 42.85%. Los alumnos de 2º utilizan la estrategia memorística en un 16.6%.

Problemas Relacionales

Estos problemas son los que presentan más dificultad a los alumnos a la hora de resolverlos por lo que el nivel de aciertos ha sido menor que otro tipo de problemas. En los problemas de adición con la comparación inicial desconocida en el grupo de 1º lo ha resuelto utilizando la “cuenta hacia atrás “en un 80%, en 2º en un 50%.

En los problemas de sustracción con la comparación inicial desconocida tanto en 1º como en 2º la estrategia utilizada es la “memorística “un 100% y un 63.3% respectivamente, habiendo únicamente dos únicos aciertos en 1º.

En los problemas de adición con la incógnita en la comparación final la estrategia utilizada vuelve a ser la “memorística” con un 50% en 1º y un 42.85% en 2º.

Por último en los problemas relacionales de sustracción cuando se desconoce la comparación final vuelve a repetirse la estrategia “memorística” como la más empleada en un 50% en 1º y 2º.

CONCLUSIONES

Una vez analizadas las estrategias anteriormente presentadas, actualmente se está investigando sobre la repercusión del programa PEIM sobre los alumnos, intentado buscar relaciones directas entre la primera evaluación y la última. Decir, que aunque por el momento no tenemos datos cuantitativos para poder exponer se detecta un incremento significativo de estrategias más avanzadas en los alumnos del grupo experimental. Estas estrategias como la memorística y la de reglas aparece en la última medición con una mayor incidencia entre este último grupo.

Esto significa que el PEIM no solo ha mejorado el rendimiento de los alumnos en la resolución de problemas sino que también mejora los procedimientos de resolución.

Por ello pensamos que debemos de seguir en esta línea de trabajo en el centro, donde la formación de los docentes, el trabajo cooperativo de los alumnos así como metodologías constructivistas van a ser los pilares del cambio en la enseñanza de las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bermejo, V. (1993). Perspectivas innovadoras en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Investigación cognitiva y práctica educativa. En J. Beltrán, V. Bermejo, M. D. Prieto, y D. Vence (Eds.),

Intervención psicopedagógica (pp. 169-85). Madrid: Pirámide.

Bermejo, V. (1998). Fracaso escolar en matemáticas. *Tribuna*, 20 de julio

Bermejo, V. y Rodríguez .P (1990 a). Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. *Investigaciones psicológicas*, 8, 23-41.

Bermejo, V. y Rodríguez .P (1990 b). La operación de sumar. En V. Bermejo, El niño y la aritmética(pp 107-140). Barcelona. Paidos.

Bermejo, V., Lago, M. O., Rodríguez, P., Dopico, C. y Lozano, J. M. (2002) PEI Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático. Madrid: Editorial Complutense.

Bermejo, V (coord.) (2004). Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor. Madrid. CCS.

Carpenter , T y Moser, J. (1982). The delovepment of addition and subtraction problema solving skills. En T. Carpenter, J. Monser y T. Romberg (Eds) Addition and subtraction: A cognitive perspective(pp. 9-24) Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter , T y Moser, J. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. Journal for Research in Ma of addition and subtraction problema solving skills. En T. Carpenter, J. Monser y T. Romberg (Eds) Addition and subtraction: A cognitive perspective(pp. 9-24) Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cobb, P. (1998). Learning from distributed theories of intelligence. *Mind, Culture, and Activity*, 5, 187-204.

Fennema, E., Sowder, J. y Carpenter, T. P. (1999). Creating classroom

s that promote understanding. En E. Fennema y Th. Romberg (Eds.),

Mathematics classrooms that promote understanding. Studies in mathematical thinking and learning series (pp. 185-199). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Gibb, E. G. (1956). Children´s thinking in the process of subtraction.

Journal of Experimental Education, 25, 71-80.

Ginsburg, H. P., & Seo, K. H. (1999). The mathematics in children's thinking. Mathematical Thinking and Learning, 1(2), 113-129.

Groen, G., & Resnick, L. B. (1977). Can preschool children invent addition algorithms? Journal of Educational Psychology, 69, 645-652

Jerman, M. (1973). Problem length as a structural variable in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics*, 5, 109-123.

Lindvall, C. M. e Ibarra, C. G. (1980). Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11, 50-62.

National Association for the Education of Young Children and National Council of Teachers of Mathematics. (2002). Position statement. Early childhood mathematics: Promoting good beginnings., from http://www.naeyc.org/about/positions/psmath.asp

Resnick, L. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 275-323). Hillsdale, NJ. Erlbaum.

Riley, M. S. y Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems.

Cognition and Instruction,5, 49-101.

Riley, M. S., Greeno, J. G. y Heller, J. I. (1983). Development of children´s problem solving ability in arithmetic. En H. P. Ginsburg (Ed.),

The development of mathematical thinking (pp. 153-196). New York: Academic Press.

Rosenthal, D. J. y Resnick, L. B. (1974). Children´s solution processes in arithmetic Word problems. *Journal of Educational Psychology*,

66, 812-825.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A.Romberg (Eds.),*Addition and subtraction: A cognitive perspective*(pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Para hacer referencia al artículo:

Mariñoso, P.E., Bermejo, V., Blanco, M. (2015). Innovación metodológica en el primer ciclo de Educación Primaria en el Colegio Montessori de Zaragoza. Implementación del PEIM. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 431-443). Lugar: Academia de Artillería de Segovia

TEDS-M Y TALIS: ALGUNOS ASPECTOS DE LA FORMACIÓN Y EL DESARROLLO PROFESIONAL DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Ruth Martín Escanilla

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE)

Resumen

España ha participado en el estudio de evaluación internacional TEDS-M de la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement y en la encuesta TALIS (Teaching and Learning International Survey), de la OCDE. El primero ha sido el primer estudio internacional comparativo sobre el conocimiento de matemáticas de los futuros maestros al acabar su formación inicial. En él se analizaron las políticas educativas que sirven de marco a los programas de formación, los propios programas, la organización de las prácticas, etc. además de evaluar el conocimiento en matemáticas su didáctica de los futuros profesores. Por su parte TALIS, entre otros, analiza aspectos de la docencia relacionados con la metodología y el desarrollo profesional de los profesores de educación secundaria. En esta comunicación se recogen las conclusiones principales de estos estudios que ayudan a configurar el perfil del docente de matemáticas en España.

Palabras clave: *TALIS, TEDS-M, formación del profesorado, desarrollo profesional, evaluación internacional.*

EL PAPEL DEL PROFESORADO EN EL RENDIMIENTO EDUCATIVO

La investigación reciente centra la atención en los factores que pueden contribuir a mejorar la calidad de la educación, entendida esta como unos indicadores positivos sobre su funcionamiento, por ejemplo, la combinación de buenos resultados de los alumnos y la equidad del sistema. Entre ellos, la calidad del profesorado se ha mostrado como una de las variables más influyentes (Chetty, R. *et al. 2011*; Hanushek, E. y Rivkin, S. G, 2006; OCDE, 2005).

Los profesores son los principales actores dentro del sistema educativo con la capacidad de involucrar al alumnado en las tareas de aprendizaje y promoverlo. Por este motivo, resulta de interés conocer las características de los planes de formación inicial de los futuros profesores así como las condiciones en las que se desarrolla la labor profesional de los docentes con el objetivo de mejorarlos. La visión internacional resulta de especial interés, ya que permite detectar similitudes y discrepancias entre países y analizar factores, metodologías y prácticas innovadoras que pueden estar contribuyendo a los buenos resultados educativos de algunos países. En esta comunicación se analizan los resultados de los estudios TEDS-M, *Teacher Education and Development Study in Mathematics* de la IEA y TALIS (*Teaching and Learning Internacional Survey*). La coordinación de la participación española en estos dos estudios internacionales se ha realizado en el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE), organismo del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte encargado de la evaluación del sistema educativo español.

El informe de TEDS-M se publicó en 2012. Este es un estudio comparativo internacional centrado en la formación de los profesores de matemáticas y primer ciclo de secundaria. Además, analiza las políticas educativas dirigidas a esta preparación, las prácticas y los resultados en matemáticas. El trabajo de campo de este estudio se realizó en primavera de 2008, por los que los resultados españoles se refieren al programa de formación de la diplomatura en magisterio de Educación Primaria, vigente en ese año académico.

Para completar el perfil del docente español de enseñanza obligatoria, resultan de interés los resultados descritos en la encuesta TALIS, realizada a directores y profesores de Enseñanza Secundaria en 2013. Este estudio analiza aspectos de política educativa como son, la creación y apoyo de un liderazgo escolar eficaz, la cantidad y tipo de desarrollo profesional disponible en los países para el profesorado, la evaluación y valoración del trabajo del profesorado así como sus consecuencias, las prácticas docentes, actividades y actitudes y la auto-eficacia y satisfacción en el trabajo.

PRINCIPALES CONCLUSIONES

El plan de estudios analizado por TEDS-M era un programa con escaso contenido matemático y que no trataba de forma independiente la didáctica de esta materia. Los alumnos que decidíanen estudiar esta titulación, en España, no eran aquellos con mejores resultados en las pruebas de acceso. Sus conocimientos en matemáticas venían determinados, en gran parte, por las etapas educativas previas a los estudios universitarios, de forma que los estudiantes que cursaron la opción de Bachillerato Científico-Tecnológico y la asignatura Matemáticas II obtuvieron puntuación significativamente superior a la media. Este resultado es válido tanto para la prueba de conocimientos matemáticos como en la de didáctica de las matemáticas. La vocación por esta profesión también fue una variable con influencia en los resultados, de forma que los estudiantes que aspiraban a desarrollar toda su vida en la enseñanza obtuvieron mejores resultados.

Se mostraron más efectivos los modelos progresivos de realización del prácticum obligatorio, que distribuyen el periodo de prácticas a lo largo de la carrera. El alumnado encuentra más sentido a los contenidos tratados si se intercalan con prácticas en el aula, tomando un papel activo en el centro. Es importante que, durante este periodo de prácticas, el alumno esté acompañado por su tutor así como que se realice una evaluación adecuada de este periodo formativo. El análisis de los datos recogidos en este estudio mostró que apenas existían diferencias entre los centros de formación en España (Facultades de Educación y Escuelas de Magisterio) en cuanto a la variabilidad de los resultados.

Algunas conclusiones de TALIS 2013 muestran que el perfil demográfico medio del profesorado español y de los centros docentes de Educación Secundaria es bastante similar al promedio de la OCDE. El resultado en el que se aprecia mayor discrepancia es la ratio de profesores por personal de apoyo pedagógico (19 en España frente a 12 en la OCDE). Los profesores españoles, en su mayoría, declaran haber recibido formación en pedagogía y práctica en menor medida que el promedio OCDE, sin embargo, en general, se sienten bien preparados para ejercer su labor profesional. En España, menos profesores trabajan en centros de más difícil desempeño que en el promedio OCDE, y los profesores con más experiencia trabajan en mayor proporción en centros educativos de menos difícil desempeño.

La participación en actividades de desarrollo profesional en España es algo inferior a la del promedio de países OCDE. Aproximadamente el 10% de los profesores no recibe ayuda para estas actividades frente al 6% en la OCDE. La tasa de participación en las actividades de desarrollo profesional ha bajado de forma significativa desde 2008 a 2013. La participación en estas actividades depende de su naturaleza, participando más en cursos y talleres que en otro tipo de actividades. Los profesores señalan la enseñanza de alumnos con necesidades específicas de apoyo educativo como el área de mayor necesidad de formación. Declaran que la falta de incentivos es el principal obstáculo para no participar en actividades de formación permanente: el 80% de los profesores españoles declaran que no hay incentivos para participar en actividades de formación (frente al 48% en OCDE).

En relación con las prácticas de enseñanza, en España, una mayor proporción de profesores dedica el tiempo de clase a la resolución de problemas de la vida cotidiana y a la revisión de tareas realizadas en casa. Las prácticas activas de enseñanza, como son el trabajo en grupos pequeños, la realización de proyectos o el uso de las TICS, se practican con menos frecuencia que en la media OCDE. Para las tareas de evaluación, una proporción alta de profesores afirma que utiliza con frecuencia exámenes elaborados por ellos mismos. Solo uno de cada diez profesores españoles utiliza con frecuencia exámenes estandarizados. En España y en la media de países OCDE, los profesores aseguran trabajar 38 horas semanales en promedio. De ellas 19 horas las dedican a la docencia. La distribución horaria del trabajo de los profesores españoles es similar a la media de la OCDE (extraescolares, padres o tutores, gestión del centro, etc.). En España, los docentes dedican el 7%

de su tiempo al trabajo administrativo (pasar lista, realizar informes, etc.) y el 15% a mantener el orden en clase.

Un aspecto destacado del informe se refiere a la colaboración entre docentes. La disponibilidad de programas de iniciación formal o informal en los centros es bastante menor en España que en el promedio OCDE y en otros muchos países. Un elevado porcentaje (59%) de profesores españoles no tiene acceso a programas de tutoría y muy pocos profesores han sido tutores de otros compañeros en sus centros de trabajo. Solo un 4% dice que ha tenido un tutor en su iniciación a la profesión. Los profesores españoles no suelen observar el trabajo docente de otros colegas ni imparten clase en equipo. Casi la mitad de ellos nunca participa en actividades conjuntas con distintas clases y grupos de edades. Sin embargo, son pocos los que dicen no participar en actividades conjuntas de aprendizaje profesional.

Por último, en relación con la evaluación del profesorado, según los directores, España es de los países con mayor proporción de profesores que nunca han sido evaluados. En general, la evaluación formal del profesorado no se utiliza en España para distinguir a los buenos profesores de aquellos cuyo desempeño es peor. Los directores españoles señalan que la evaluación del profesorado apenas tiene repercusión, ni en su práctica docente ni en su carrera profesional. La percepción sobre el sistema de evaluación y comunicación en su centro educativo que tiene el profesorado es que este no tiene consecuencias.

Referencias

Chetty, R. Friedman, J.N. y Rockoff, J.E. (2011). *The Long-Term Impacts of Teachers: Teacher Value Added and Student Outcomes in Adulthood*. NBER Working Papers

Hanushek E. A., Rivkin, S. G. (2006) Teacher Quality. *Handbook of the Economics of Education, Volume 2, Amsterdam: North Holland,* pp. 1052-1078.

INEE (2012). TEDS-M, Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe Español. Madrid, MECD. http://www.mecd.gob.es/inee/portada.html

INEE (2014). TALIS 2013, Estudio Internacional de la Enseñanza y el Aprendizaje. Informe Español. Madrid, MECD. http://www.mecd.gob.es/inee/portada.html

Tatto T. et al. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. IEA

OECD (2005). *Teachers matter: Attracting, developing and retaining effective teachers*. Paris, Autor

OCDE (2014). *TALIS 2013 Results. An International Perspective on Teaching and Learning*. TALIS, OECD Publishing.

Para hacer referencia al artículo:

Martín, R. (2015). TEDS-M y TALIS: Algunos aspectos de la formación y el desarrollo profesional de los profesores de Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 445-447). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

DISEÑO DE APLICACIONES ANDROID PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Ernesto Martín Hernández[a], Mª Teresa González Astudillo[b]

[a]CEPA F. Giner de los Ríos, [b]Universidad de Salamanca

Resumen

La incorporación de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas es uno de los aspectos más consensuados en los currículos de todos los países y una de las necesidades que se perciben en las aulas, en este caso por la proliferación en el uso de los móviles y Tablet en nuestra sociedad. Las posibilidades que brindan estos instrumentos son innumerables tanto desde el punto de vista motivacional como del enlace que pueden suponer al acercar algunos aspectos de la realidad a los conceptos abstractos propios de las matemáticas. La simulación de procedimientos resulta de esta forma un medio para la adquisición del conocimiento de los alumnos.

Palabras clave: *enseñanza, matemáticas, tecnología, móviles, simulación*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza en general y, la de las matemáticas en particular, demanda cada vez una mayor adaptación a la sociedad en la que se realiza la instrucción. Esto implica incorporar en las escuelas tanto situaciones actuales a las que debe enfrentarse el ciudadano en su vida diaria como recursos y medios más adecuados que motiven a los alumnos al mismo tiempo que facilitan el desarrollo de tareas que de otra forma serían ciertamente complicadas.

En este sentido, ya en el currículo establecido tanto por la LOE como por la LOMCE se hace cada vez más énfasis en la incorporación de diferentes medios tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas. Esto no sólo debería referirse al uso de calculadoras y ordenadores con software informático específico de matemáticas. También han de contemplarse otros medios más actuales como el uso de móviles (Smartphone) o Tablet. Hemos de reconocer que, como adultos, sentimos una cierta envidia o admiración ante la facilidad que tienen los niños para utilizar estos medios mientras que para nosotros su uso ha supuesto un auténtico aprendizaje y, a veces, hasta un reto. La amplia difusión que han tenido los móviles entre los jóvenes se ha basado precisamente en su habilidad para el manejo de los aparatos, su disponibilidad y flexibilidad en el uso y la apropiación en función de sus intereses. Así "esta mayor capacidad para usar las nuevas tecnologías se ha convertido en un factor de superioridad respecto a sus mayores, así como en un símbolo de reconocimiento entre iguales" (Castells y otros, 2007, p. 207). La idea, por lo tanto, es la de aprovechar la facilidad que tienen los alumnos para usarlos, al mismo tiempo que las posibilidades que nos ofrecen estos medios para plantear tareas variadas, atractivas, estimulantes y novedosas.

Las características técnicas de estos instrumentos permiten el acceso a recursos educativos de diferente índole para leer, jugar, ver vídeos, interactuar con el dispositivo, comparar imágenes… El sistema operativo los convierte en aparatos intuitivos con los que se accede fácilmente a imágenes, textos, vídeos, audio,… Por tanto, son instrumentos intuitivos, por medio de los cuáles, sin necesidad de una instrucción previa, los alumnos aprenden matemáticas utilizando las capacidades desarrolladas por los jóvenes.

Al ser dispositivos táctiles no requieren un aprendizaje exhaustivo previo. Los alumnos se sienten desde el primer momento tentados a "tocar" para observar qué es lo que ocurre. De una forma simple los alumnos pueden realizar experiencias enriquecedoras al mismo tiempo que están adquiriendo conocimientos matemáticos.

Otro aspecto que justificaría el uso de estos dispositivos en el aula es que puede estimular el aprendizaje cooperativo mediante la interacción entre los alumnos al usar de forma conjunta estos instrumentos en el aula.

En la actualidad se pueden encontrar fácilmente aplicaciones diseñadas con fines educativos tanto en lo que se refiere a las matemáticas como en relación con otras áreas de conocimiento. El desarrollo del pensamiento lógico, el entrenamiento de la memoria, la agilidad en las operaciones aritméticas, son capacidades que se pueden desarrollar a partir de aplicaciones expresamente desarrolladas. También se pueden encontrar algunas aplicaciones para la auto-evaluación y diagnóstico de habilidades o conocimientos específicos. Sin embargo, la mayor parte de estas aplicaciones están diseñadas para contextos en las que no es necesaria la mediación de un profesor. En esta comunicación planteamos el diseño de dos aplicaciones expresamente pensadas para el trabajo con conceptos de probabilidad y estadística y para las que es necesaria la interacción o intervención del profesor.

Para ambas aplicaciones el protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje es el alumno, puesto que se le irá guiando para construir su conocimiento. Por otro lado, como se puede deducir de lo anterior, el profesor deberá asumir un papel de guía más que de trasmisor de conocimientos. El nexo de unión entre ambos serán las hojas de trabajo diseñadas para el aula, que permitirán un aprendizaje por descubrimiento.

MOBILE LEARNING

El uso generalizado de dispositivos móviles entre los jóvenes es, actualmente, un hecho por lo que como señala Naismith y otros (2004, p.7) “no tiene sentido, que un sistema educativo con recursos limitados de tecnologías de la información y de la comunicación (TICs), no intente sacar el máximo partido de lo que los niños traen a las aulas”. En este sentido hay que aprovechar las características de estas herramientas para la enseñanza dada la facilidad que presentan estos medios de utilizar aplicaciones situadas.

Se entiende por Mobile learning aquel e-learning realizado con el apoyo de dispositivos móviles de comunicación. Mobile learning es por ello la modalidad educativa que facilita la construcción del conocimiento, la resolución de problemas de aprendizaje y el desarrollo de destrezas o habilidades diversas de forma autónoma y ubicua gracias a la mediación de dispositivos móviles portables (Brazuelo y Gallego, 2011). Según Chang, Sheu y Chan (2003) posee tres elementos esenciales: el dispositivo, la infraestructura de comunicación y el modelo de aprendizaje.

Una de las características más distintivas de esta forma de aprendizaje es la relativa a la movilidad. Según Vavoula y Sharples (2002) existen tres formas de movilidad: “el aprendizaje es móvil en términos de espacio, es decir, ocurre en el lugar de trabajo, en casa y en los lugares de ocio; es móvil en distintas áreas de la vida, es decir, puede estar relacionado con requisitos del trabajo, la auto mejora o el ocio; y es móvil en cuanto al tiempo, es decir ocurre en distintos momentos a lo largo del día, en días laborables o el fin de semana” (Vavoula y Sharples, 2002, p.152). Esto significa que se puede aprender en cualquier tiempo y en cualquier lugar (any time, any where) y de esta manera se diluye la frontera entre el contexto formal, el contexto no formal y el contexto informal. En definitiva sin darnos cuenta de que con lo que estamos haciendo, estamos aprendiendo. Pero hay que procurar que el aprendizaje sea significativo, de ahí la importancia que tiene la selección de situaciones de aprendizaje, aplicaciones móviles u otro tipo de herramientas que guíen dicho aprendizaje.

Para Ibañez, Correa y Asensio (2011, p. 5) existen cuatro perspectivas de esta forma de aprendizaje: “la tecnológica que se centra en la movilidad del dispositivo, la que lo relaciona con el e-learning como una extensión del mismo, la que lo relaciona con la enseñanza formal en su característica “face to face”, y finalmente la centrada en el aprendiz, que se focaliza en la movilidad de este”.

Existe un gran número de dispositivos móviles. Tal es el caso de los portátiles, netbooks, Tablet, cámaras de fotos, cámaras de vídeo,… Pero quizás el más versátil sea el teléfono móvil. Dicho dispositivo tienen gran potencial educativo puesto que posee conectividad, geolocalización, apps, y permite el recurso a múltiples formatos: imágenes, sonido, texto, vídeo,…

Quizá, el profesor todavía se encuentre encorsetado en cuanto a la incorporación de móviles y de otros dispositivos en el aula. Hemos de pensar que nuestros alumnos tienen esta tecnología ya prácticamente incorporada a sus hábitos cada vez desde una edad más temprana. Es imprescindible por ello perder el miedo a probar cosas nuevas aunque no sepamos suficientemente de ellas. La experimentación, el ensayo y error y la producción de situaciones y de actividades cada vez más adecuadas ayudarán a la acercar la enseñanza a las necesidades, intereses y motivaciones de nuestros alumnos.

Por tanto, desde el punto de vista educativo no se trata tan solo de ser consumidores sino de ejercer una actividad creadora que permita diseñar aplicaciones adaptadas a las necesidades de los alumnos y a los objetivos de la enseñanza.

DISEÑO DE APLICACIONES ANDROID

Se han diseñado dos aplicaciones Android centradas en aspectos relativos a la probabilidad y que permite a los alumnos adquirir conceptos de Estadística y Probabilidad. Las aplicaciones están pensadas a modo de simulaciones para experimentar y obtener datos dado que “La modelización de situaciones concretas es un paso obligatorio en el aprendizaje del conocimiento científico y además en la enseñanza de la probabilidad puede ser un poderoso instrumento” (Serrano, Ortiz y Rodríguez, 2009).

Una de ellas se denominó *Colores* y la otra, *Pingüinos* . Cada una de ellas tiene un logo identificativo que permite reconocerla fácilmente.

El entorno elegido para hacer el desarrollo de las aplicaciones es Eclipse por su facilidad de uso y su versatilidad a la hora de probar la aplicación con diferentes configuraciones.

```
public class MainActivity extends Activity {

    MiSurfaceView miVista;

    public void onCreate(Bundle savedInstanceState) {
        super.onCreate(savedInstanceState);
        requestWindowFeature(Window.FEATURE_NO_TITLE);
        getWindow().setFlags(WindowManager.LayoutParams.FLAG_FULLSCREEN,
                WindowManager.LayoutParams.FLAG_FULLSCREEN);
        miVista = new MiSurfaceView(this);
        setContentView(miVista);
    }

```

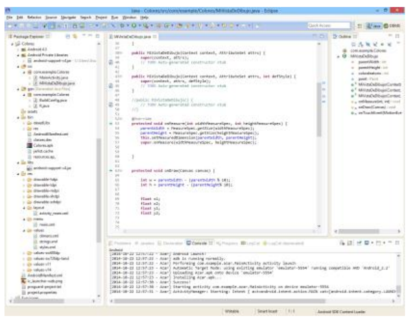


Figura 1: Vista general de Eclipse y parte de un código

La primera aplicación a la que haremos mención se llama *Colores* y consiste en la iluminación de la pantalla del dispositivo con un color de los seis que han sido predeterminados para la aplicación. Con una pulsación sobre la pantalla el color de ésta cambia de forma aleatoria. El alumno debe efectuar el recuento y control de los colores que han aparecido para su posterior análisis.

Para la configuración de la pantalla se ha utilizado el método requestWindowFeature y getWindow().setFlags para que la imagen se muestre a pantalla completa, sin barra de título ni cualquier otra información adicional en pantalla (fig. 1).

Por tratarse de una secuencia aleatoria de seis colores puede ocurrir que un color se repita con lo que el alumno siempre tendrá la duda de saber si habrá pulsado bien o será el dispositivo que no ha captado la pulsación; para evitar estos casos se ha escogido el color blanco como color neutro de transición entre cada color y el siguiente lo que es apenas perceptible pero que produce un efecto de parpadeo que informa de manera visual de que el color se ha actualizado con la última pulsación.

La gestión de los colores se ha programado con el operador matemático random que hay que utilizar desde la librería Math de java que es quien implementa dicha función, así el código (**int**)(Math.*random*()*(6))+1; nos devuelve un número aleatorio entero entre 1 y 6. La función primitiva Math.random() devuelve un valor del tipo floating point (coma flotante) en el intervalo [0,1) que al ir precedida de la instrucción (**int**) es transformado en un numero entero.

Para el cambio de color se ha utilizado el método OnTouchEvent que pone a la aplicación en el modo de alerta ante cualquier pulsación que se efectúe en el dispositivo y para esta ocasión en concreto se han utilizado los modificadores Action_Down y Action_Up que detectan cuando y donde se efectúa una pulsación (down) o donde se suelta una pulsación (up).

Un bucle posterior al método onTouchEvent nos resuelve el cambio de color. Se cambia a color blanco al pulsar la pantalla y a color aleatorio al soltar la pulsación. Según el numero aleatorio generado se elige uno de los colores primitivos en la programación de Android: Color.BLUE, Color.RED, Color.YELLOW, Color.GREEN, Color.MAGENTA, Color.CYAN. Estos colores son fácilmente identificables, aunque la resolución y la calidad de la pantalla del smartphone o tablet empleado no sean las más adecuadas.

En una revisión posterior de la aplicación se da la opción de mostrar el recuento en pantalla de los colores aparecidos y la diferencia con su esperanza matemática y también la posibilidad de diferenciar cada color con un nota acústica diferente que suena al aparecer el color en pantalla. Esta última opción puede ser útil cuando se tienen dificultades visuales o el alumno está en su propia casa ya que en el aula la "*sinfonía al azar*" no suele ser muy agradable.

La otra de las aplicaciones es la denominada *Pingüinos*. En ella se trata de simular (raíz del planteamiento) una distribución de 10x10 cartulinas blancas en las que hay anotados una serie de puntos en su reverso. El alumno debe voltear una cartulina para observar el número de puntos y proceder a una estimación del número de puntos totales en todo el tablero.

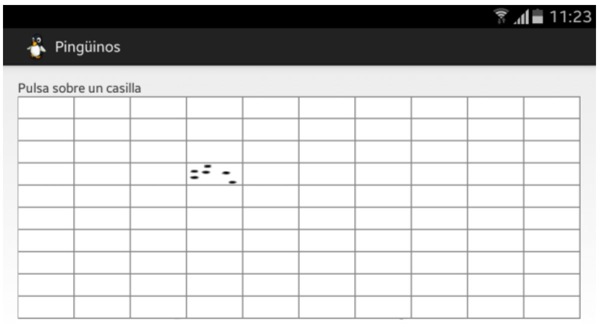


Figura 2: Captura de pantalla de la App Pingüinos

En cuanto al diseño de la aplicación la mayor dificultad consiste en cómo simular el tablero y hacer visible una única zona de entre las 100 posibles. El diseño final elegido consiste en tener una cuadricula 10x10 en la pantalla con todos los puntos y sobre este tablero dibujar una nueva cuadricula con todos los puntos ocultos.

Al ejecutar la aplicación el alumno debe tocar la pantalla en algún lugar del tablero y ese momento se hace transparente la cuadricula mostrando los puntos sobre los cuales debe efectuar el recuento y la estimación. Este planteamiento de la aplicación conlleva varias cuestiones que hay que resolver a la hora de hacer la programación: dibujo del tablero a pantalla completa sea cual sea el dispositivo empleado, localización del pixel sobre el que se efectúa la pulsación y conversión de la cuadricula opaca en transparente.

Para la primera cuestión la solución elegida consiste en definir un canvas (lienzo) cargando una imagen del tablero con todas las cuadriculas visibles como fondo. Por lo que respecta a construir la imagen a pantalla completa se ha optado por la utilización como parámetro dentro de la zona de dibujo de las dimensiones reales de la pantalla de cada dispositivo. Las medidas se toman con el método measure: "Measure the view and its content to determine the measured width and the measured height. This method is invoked by measure(int, int) and should be overriden by subclasses to provide accurate and efficient measurement of their contents" (dado que el entorno de programación se desarrolla en inglés, lo anterior es la información que aparece de manera contextual al utilizar el método measure) que nos indica que se mide el ancho y el largo de la zona de dibujo. Una vez iniciado el método se definen los parámetros:

parentWidth = MeasureSpec.*getSize*(widthMeasureSpec);

parentHeight = MeasureSpec.*getSize*(heightMeasureSpec);

donde se definen las variables que almacenarán las dimensiones de la pantalla de dibujo para su posterior utilización.

Para la segunda cuestión se ha utilizado el método OnTouchEvent como forma de reacción a la manipulación del terminal por parte del alumno y en concreto los modificadores Action_Down y Action_Up que localizan el pixel donde se efectúa una pulsación (down) o donde se suelta una pulsación (up). Lo más habitual es que las coordenadas devueltas coincidan con el lugar de la pulsación, pero no conviene olvidar lo imprevisible de la actuación de un alumno; este puede pulsar en un punto y sin soltar desplazarse por la pantalla hasta que decide soltar la pulsación. Para evitar errores, la acción se ejecuta con las coordenadas obtenidas al soltar (up) la pulsación, esto evita que se muestren los contenidos de las zonas por las que se pueda hacer un recorrido con el dedo.

Una vez capturadas las coordenadas de la pulsación en pantalla, mediante un bucle sencillo se localiza cual es la cuadricula más idónea para mostrar según la distribución del tablero.

Por último, la facilidad de modificar objetos que nos ofrece Android simplemente indicando un atributo en su construcción (fill o stroke) nos dibuja el objeto relleno (de color blanco) o solo el contorno (que permite ver cualquier objeto situado debajo) soluciona la tarea de mostrar la cuadricula elegida por el alumno para hacer el recuento.

El entorno de desarrollo Eclipse facilita la depuración y la prueba de las aplicaciones en diferentes dispositivos virtuales pudiendo elegir distintos modelos de terminal así como diferentes versiones de Android. Las diferentes versiones del sistema operativo no tienen retro compatibilidad, de manera que, al diseñar las aplicaciones, se debe pensar en qué versión de Android se quiere trabajar. Las últimas versiones son muy vistosas y ofrecen multitud de posibilidades gráficas pero si una aplicación diseñada para estas versiones se instala en un dispositivo con una versión anterior del sistema operativo se corre el riesgo que se muestre incorrectamente o que no funcione.

Mención especial merece la distribución de las aplicaciones creadas y su instalación. Al no pertenecer al grupo de desarrolladores de google, los dispositivos no permiten la instalación inmediata de las aplicaciones. En el menú de configuración del dispositivo se debe activar la casilla de "fuentes desconocidas" en el submenú de seguridad para proceder a la instalación. No se requieren permisos especiales con lo que no hay que hacer "*autorizaciones temerarias"* para que las aplicaciones se ejecuten correctamente.

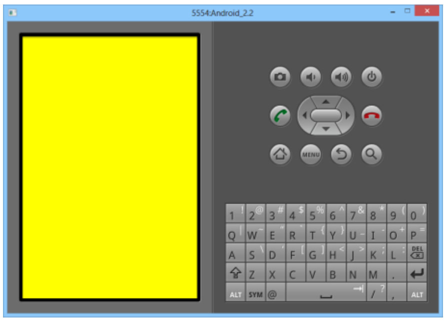


Figura 3: Dispositivo virtual de prueba de App

LAS HOJAS DE TRABAJO

Dado que se pretende que la metodología de enseñanza esté centrada en el alumno y se procure su interacción con los conceptos, la construcción de un lenguaje común en el aula, la negociación de los significados y la comunicación de resultados, se diseñaron unas hojas de trabajo con las que se trataba de lograr los aspectos señalados. Se trata por tanto que los alumnos construyan los conceptos y desarrollen de manera colectiva los tópicos. Para ello se organizan grupos de entre cuatro y cinco alumnos procurando que den forma a sus ideas, construyendo enunciados y argumentos. En este sentido las hojas de trabajo guían al equipo para que organicen y plasmen sus ideas de tal manera que esta comunicación sea lo más provechosa posible y, algo muy importante, le transfieran la responsabilidad de su aprendizaje.

Esto es lo que nos ha llevado a tomar la decisión de incluir hojas de trabajo como mediador para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además se tuvieron en cuenta otras razones tales como: 1) cuando los estudiantes tienen la oportunidad de escribir se involucran en un proceso reflexivo para poder explicar su pensamiento y defender sus ideas, 2) un informe escrito (en nuestro caso una hoja de trabajo) constituye un reflejo de la discusión y ayuda a los alumnos a considerar todos los detalles importantes al responder una pregunta, y finalmente, 3) un informe escrito permanece una vez terminada la clase y puede retomarse y depurarse con posterioridad.

Se diseñaron dos hojas de trabajo, una para cada una de las aplicaciones. Su diseño tuvo en cuenta, en cada una de ellas, la temática, el objetivo didáctico que se persigue, los pasos de una indagación estadística y las preguntas o cuestiones que conforman el grueso del desarrollo de dicha hoja de trabajo. Concretamente la estructura estaba configurada con los siguientes apartados:

- Se enmarca la hoja con un título que indica la temática a tratar
- Se formulan los objetivos de la hoja de trabajo
- Se plantea una situación problemática.
- Se pide a los alumnos que en grupos de trabajo exploren, manipulen, discutan y/o resuelvan la situación planteada, apoyándose en la aplicación Android guiándose con preguntas y/o actividades que conducen a la solución final.
- Se les indica a los alumnos que deben rellenar la hoja de trabajo manifestando las ideas propias y de sus compañeros.
- Discusión y conclusiones. Es importante que los alumnos en pequeños grupos traten de extraer algunas conclusiones de la actividad y que las exponga ante el grupo para su discusión. En este caso se tiene que guiar a los alumnos para destacar los elementos más importantes de la actividad.

Un aspecto interesante en la forma de trabajo en el aula es el relativo a las interacciones entre alumnos (Cobb & Bauersfeld, 1995 y Yackel & Cobb, 1996). Las normas sociales y las socio-matemáticas correspondientes a las discusiones entre los estudiantes permiten la comunicación y condicionan la actividad dentro del marco de una clase**.** Las normas sociales diferencian las actividades que corresponden al profesor y las que corresponden al alumno. Se considera una norma social lo que se espera de los alumnos, por ejemplo, al intentar justificar las soluciones propuestas a las distintas preguntas. Las normas socio-matemáticas corresponden únicamente a la actividad matemática escolar, por ejemplo, esto ocurre cuando una respuesta se considera matemáticamente diferente, matemáticamente sofisticada, matemáticamente eficiente y matemáticamente elegante, además de “que se asume como una explicación o justificación matemáticamente aceptable” (Yackel & Cobb, 1996, p. 461). Estas normas, influyen en las oportunidades de aprendizaje y regulan la actividad en el aula.

La hoja de trabajo asociada a la aplicación *Colores* trata una experiencia sobre la aleatoriedad en la que los alumnos trabajan el concepto de azar, recogen los datos de la experiencia y los organizan, relacionan las matemáticas con la realidad y utilizan herramientas estadísticas básicas para obtener información.

Está organizada en cuatro partes. En la primera se formula la situación problemática. En la segunda los alumnos deben obtener datos mediante una simulación de carácter aleatorio y deben organizar dichos datos. En la tercera deben seleccionar la gráfica más adecuada (Espinel, González, Bruno y Pinto, 2009) para representar los datos y se les enseña a hacer gráficas de puntos. A partir de las gráficas deben extraer información acerca de los datos obtenidos, lo que dentro del pensamiento estadístico se conoce bajo el nombre de *transnumeración* (Wild y Pfannkuch, 1999). Se ha procurado además que los alumnos realicen una lectura de los gráficos según cuatro niveles: leer los datos, leer entre los datos, leer más allá de los datos, leer por detrás de los datos (Curcio, 1987, y Shaughnessy, 2007). Se introduce alguna medida de centralización (en este caso la moda) y finalmente los alumnos han de realizar un informe final a modo de cierre que responda a la pregunta inicial, al mismo tiempo que se plantea una nueva pregunta como consecuencia de las observaciones realizadas.

La segunda hoja de trabajo está asociada a la aplicación *Pingüinos*[i] y también parte de una situación de probabilidad en la que se trabaja acerca de la importancia de la selección de la muestra. En ella los alumnos deben recoger muestras de diferentes tamaños y hacer conjeturas acerca de la población de la que proviene la muestra. El tamaño de la muestra permitirá a los alumnos acercarse con más o menos precisión al tamaño de la población total. Los alumnos deben recoger los datos que van obteniendo en las sucesivas elecciones que hacen, en tablas de frecuencias, deben escoger un método para seleccionar muestras aleatorias, deben hacer estimaciones/conjeturas acerca del tamaño de la población y con muestras muy grandes utilizar diagramas de tallo y hojas. Deben utilizar la noción de rango, calcular la mediana y los cuartiles para diferentes tamaños de muestras, usar la noción de porcentaje y comparar diferentes tamaños de muestras utilizando los diagramas de caja y bigotes (para los que son necesarios cinco números: máximo, mínimo, mediana, primer cuartil y tercer cuartil). Como se puede comprobar, una parte importante del trabajo se refiere tanto a la obtención de los datos, como a la organización de estos en tablas y gráficos, tratando de incorporar en todo momento conceptos nuevos y actuales. Otra parte importante del trabajo se refiere a la interacción entre los alumnos para el intercambio y discusión de las ideas y razonamientos.

APLICACIÓN EN EL AULA

Las aplicaciones Android y las hojas de trabajo se han puesto en práctica con los alumnos de 4º del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Salamanca. Dado el carácter de las aplicaciones diseñadas, la app *Colores* podría también utilizarse en Educación Primaria y la app *Pingüinos* sería más adecuada en Educación Secundaria. En total trabajaron con estas aplicaciones aproximadamente sesenta alumnos distribuidos en grupos de cuatro o cinco alumnos.

Inicialmente tuvieron que descargar las aplicaciones. El enlace de las descargas se puso en Studium, la plataforma Moodle de la Universidad de Salamanca. Se les dieron instrucciones precisas para poder realizar la descarga sin problemas en sus móviles y se les indicó que no servían para dispositivos que no tuvieran como sistema operativo Android.

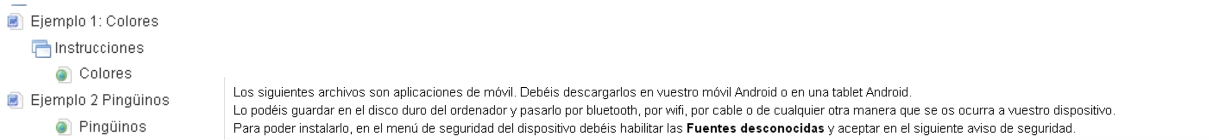


Figura 4: Aplicaciones e instrucciones en Studium

Además los alumnos disponían de las hojas de trabajo que se han descrito con anterioridad para poder organizar el trabajo y las cuestiones sobre las que debían ir trabajando en cada grupo. Dichas hojas también estaban disponibles en la plataforma Studium.

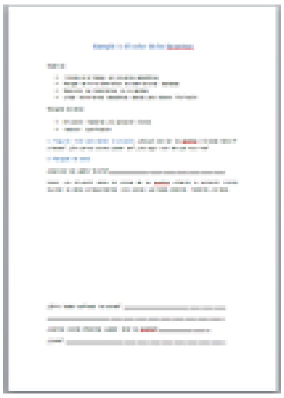


Figura 5: Hoja de trabajo relacionada con la aplicación “Colores”

Los alumnos dispusieron de dos horas de trabajo, una para cada una de las aplicaciones. En ese tiempo, los alumnos debían recoger los datos de cada simulación:

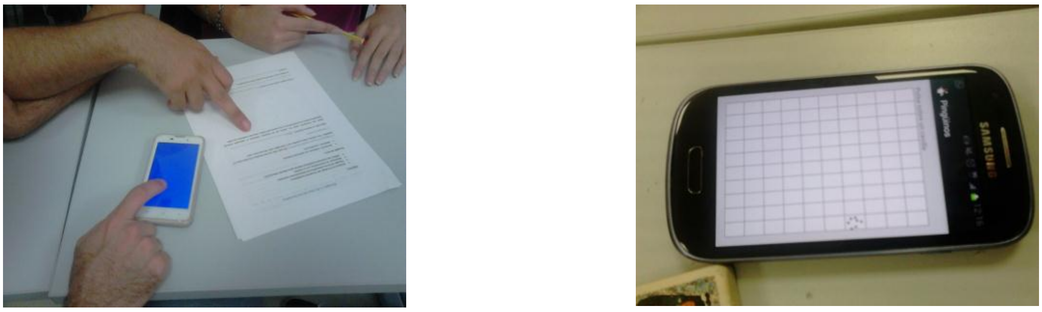


Figura 6: Recogida de datos en cada una de las aplicaciones móviles

Posteriormente, los alumnos organizaron los datos en tablas y gráficos de barras para así poder interpretar los resultados obtenidos.

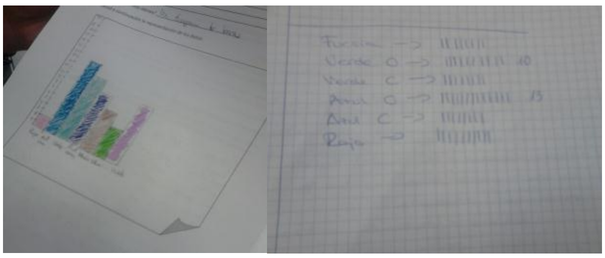


Figura 7: Tabla de frecuencias y gráfico de barras para la aplicación Colores

Obtuvieron algunas medidas como la moda, los cuartiles o la mediana. Establecieron conjeturas, hicieron gráficos de tallo y hojas y de caja y bigotes para el caso de la aplicación de los pingüinos y finalmente elaboraron un pequeño informe de los datos obtenidos. En resumidas cuentas los alumnos estuvieron implicados en un proceso de indagación, razonamiento, selección de las herramientas y gráficos estadísticos más apropiados, comparación de muestras y finalmente obtención de unos resultados y elaboración del informe final.

NOTAS FINALES

Con el uso de estas aplicaciones se pretende que el alumno utilice el móvil para la resolución de una actividad en clase y vea el resultado de sus decisiones. Se trata de realizar un aprendizaje real, significativo y activo, opuesto a la actividad pasiva tradicional que se produce cuando el alumno recibe los conocimientos del profesor o de un libro de texto. Este sistema consigue que los alumnos adquieran ciertas competencias tecnológicas, así como de otra índole. Tal es el caso de la capacidad de reflexión, de comunicación de ideas, de selección de las herramientas adecuadas, de toma de decisiones. En definitiva, un amplio abanico de competencias que el alumno deberá utilizar también a lo largo de su vida.

La metodología utilizada para la realización del trabajo logra fomentar el trabajo cooperativo y a partir del juego adquirir conocimientos estadísticos. Las aplicaciones son muy sencillas por lo que no necesitan un aprendizaje previo y permiten la experimentación por parte del alumno. El estudiante se siente de forma casi inmediata tentado a usar las aplicaciones espontáneamente para generar datos, lo que permite luego el estudio estadístico.

Mediante las aplicaciones móviles para el sistema Android, se ha pretendido lograr que los alumnos adquieran hábitos/actitudes investigadoras, que entiendan el significado de los estudios estadísticos así como las partes que lo componen, que adquieran conocimientos estadísticos y probabilísticos, que compartan significados con los compañeros o que se acostumbren a comunicar tanto oralmente como por escrito conocimientos y razonamientos matemáticos.

Además se ha roto con la idea de aula tradicional mediante el trabajo en grupo, la importancia concedida a la comunicación y la interacción con los compañeros, la discusión y uso del lenguaje matemático o el recurso al razonamiento estadístico. Los alumnos han adquirido cierta autonomía en el trabajo, han vivido una enseñanza muy alejada de la tradicional, han aprendido a trabajar en grupo y han valorado las ventajas e inconvenientes de esta metodología de enseñanza. Aunque en este caso la enseñanza y el aprendizaje se ha producido en el aula podría haberse realizado en cualquier lugar con lo que se tendría un auténtico mobile learning. Dado que para los alumnos no resulta muy familiar este tipo de enseñanza, estas actividades les permiten una introducción hacia la enseñanza mediada con dispositivos móviles. Además, con estas aplicaciones se ha logrado motivar a los alumnos en el estudio y aprendizaje de la estadística. La mayoría confirma que le ha agradado la forma de trabajo y que intentará trasladarla a su trabajo como futuros maestros en el aula.

Quizás el mayor problema inicial que se tuvo fue el de la descarga de las aplicaciones para luego poder utilizarlas en los móviles. Las opciones de seguridad no permitían realizar la descarga de la aplicación por lo que hubo que deshabilitar algunas para que no hubiera problemas.

REFERENCIAS

Brazuelo, F. y Gallego J. (2011) *Mobile Learning. Los dispositivos móviles como recurso educativo*. Sevilla: Editorial MAD, S.L.

Castells, M. y otros (2007) *Comunicación móvil y sociedad, una perspectiva global*, Edición electrónica. Texto completo en www.eumed.net/libros/2007c/312/ (Consulta 19 de octubre de 2014).

Chang, C.Y.; Sheu, J.P. y Chan, T.W. (2003). Concept and design of ad hoc and mobile classrooms. *Journal of Computer Assisted Learning, 19*(3), 336-346.

Cobb. P. & Bauersfeld, H. (Eds.), (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Curcio, F.R. (1987) Comprehension of mathematical relationships experienced in graphs. Journal for *Research in Mathematics Education, 18*, 382-393.

Espinel, M.C., González, M.T., Bruno, A. y Pinto, J. (2009) Gráficas Estadísticas. En En L. Serrano (ed.) *Tendencias actuales de la investigación en Educación Estocástica*. Melilla: Universidad de Granada,133-155.

Ibañez, A. Correa, J.M. y Asensio, M. (2011) Mobile learning y patrimonio: aprendiendo historia con mi teléfono, mi GPS y mi PDA. En A. Ibañez (ed.) *Museos, redes sociales y tecnología 2.0*. Zarautz: Universidad del País Vasco.

Naismith, L.; Lonsdale, P.; Vavoula, G.N. y Sharples, M. (2004) *Literature Review in Mobile Technologies and Learning*. Futurelab Series, Report 11. Texto completo en www.futurelab.org.uk/research/lit_reviews.htm (Consulta 18 de septiembre de 2008)

Serrano, L., Ortiz, J.J. y Rodríguez, J.D. (2009) La simulación como recurso didáctico en la enseñanza de la probabilidad. En L. Serrano (ed.) *Tendencias actuales de la investigación en Educación Estocástica*. Melilla: Universidad de Granada, 157-178.

Shaughnessy, J.M. (2007) Research on statistics learning and reasoning. En F.K. Lester (ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Greenwich, CT. NCTM, 957-1049.

Vavoula, G.N. y Sharples, M (2002). KLeOS: A personal, mobile, knowledge and learning organisation system. En Milrad, M, Hoppe, U. y Kinshuk (eds) *Proceedings of the IEEE International Workshop on Mobile and Wireless Technologies in Education (WMTE2002)*, Aug 29-30, Vaxjo, Suecia, 152-156.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999) Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review. 67*(3), 223-265.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996) Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Para hacer referencia al artículo

Martín, E. y González, M.T. (2015). Diseño de aplicaciones Android para la enseñanza de las Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: *·Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”.* (pp. 449-458). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

[i] Está hoja de trabajo está basada en una situación similar localizada en: http://www.learner.org/courses/learningmath/data/session9/part_b/index.html

UNA PROPUESTA INNOVADORA PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD ARITMÉTICA EN EL PRIMER CICLO DE ESO

Sergio Martínez[a], José María Muñoz[b], Antonio M. Oller[c], Cristina Pecharromán[d]

[a]IES Leonardo de Chabacier y Universidad de Zaragoza, [b]Universidad de Zaragoza, [c]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, [d]IES Recesvinto y Universidad de Valladolid

Resumen

La proporcionalidad aritmética es un tópico matemático de gran importancia curricular y práctica. Las, cada vez más de moda, pruebas internacionales así como abundantes estudios al respecto, muestran las dificultades que encuentran los alumnos al trabajar con las ideas implicadas en la proporcionalidad: razón y proporción, magnitudes proporcionales, etc. Pensamos que estas dificultades surgen en gran medida como consecuencia del modo en que tradicionalmente se plantea la enseñanza de este tema. Pese a ello, son escasas las investigaciones que abordan una revisión de este modo de enseñar y que plantean propuestas didácticas innovadoras. En esta comunicación presentamos las ideas básicas de una propuesta didáctica para la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de la E.S.O. y analizamos algunos puntos fuertes y debilidades detectados en un punto intermedio de su experimentación.

Palabras clave: *innovación curricular, proporcionalidad, aritmética, secundaria*.

INTRODUCCIÓN.

En la literatura sobre Educación, se encuentran abundantes referencias de trabajos y monografías acerca de qué se define como innovación educativa y sus principales objetivos (Canal de León, 2002; Fidalgo y Sein-Echaluce, 2011); así como ejemplos de experiencias y proyectos de innovación exitosos llevados a cabo en prácticamente todas las etapas educativas (Infantil, Primaria, Secundaria y Universidad) (Marcelo, Mayor y Gallego, 2010) y las principales fortalezas y posibles contratiempos a los que se tiene que hacer frente cuando se intenta implementar una innovación docente en un centro (Sánchez y Murillo, 2010). Al margen de artículos de investigación de índole teórica sobre los procesos de innovación educativa, encontramos experiencias de innovación educativa que abarcan muchos aspectos y facetas distintas: desde las innovaciones de naturaleza institucional que inciden en aspectos organizativos de un centro para la mejora de la convivencia en el aula y en los centros en general, a innovaciones de ámbito tecnológico asociadas al uso y perfeccionamiento de las habilidades en TIC por parte del equipo docente, pasando por otras innovaciones de carácter didáctico-disciplinar específico asociadas a la enseñanza de un determinado tópico (de lengua y literatura, ciencias, matemáticas, lengua extranjera,…). Atendiendo a este último enfoque, seguimos a Carbonell (2002, p.11) cuando señala que la innovación educativa es “[un] conjunto de ideas, procesos y estrategias, más o menos sistematizados, mediante los cuales se trata de introducir y provocar cambios en las prácticas educativas vigentes” y a Sánchez Ramón (2005, p. 646), que amplía algunos aspectos de la definición anterior, cuando señala que “la innovación educativa es el proceso realizado de forma deliberada, por un docente o varios, con el objetivo de mejorar la praxis educativa, a través de un cambio positivo originado como respuesta a un problema, a la revisión de la propia praxis inducida interna o externamente y en un contexto concreto como es el centro educativo y/o el aula”. En (Sánchez Ramón, 2005) se abordan las conexiones existentes entre la investigación educativa y la innovación educativa y se apunta que la Investigación-Acción (Elliot, 1990) es un método de investigación educativa que relaciona estos dos conceptos.

En este artículo presentamos el diseño de una propuesta que supone una innovación educativa de carácter curricular sobre la enseñanza de la proporcionalidad aritmética para primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria sustentado por resultados provenientes de la investigación educativa y los primeros resultados de la implementación de dicha propuesta que, bajo el método de Investigación-Acción, se está llevando a cabo en el Instituto de Educación Secundaria "Leonardo de Chabacier" de Calatayud (Zaragoza).

PROPORCIONALIDAD ARITMÉTICA COMO OBJETO DE ENSEÑANZA.

Puesto que nos proponemos plantear una propuesta de innovación curricular en el ámbito de la Proporcionalidad aritmética, parece interesante abordar, siquiera brevemente, el modo en que se presenta habitualmente dicho tópico en la Enseñanza Secundaria. El llamado "razonamiento proporcional", así como el manejo y la comprensión de situaciones relacionadas con la proporcionalidad constituyen unos de los tópicos matemáticos más importantes en la formación del alumnado de Primaria y Secundaria (Cramer y Post, 1993; Fernández, 2009; Freudhental, 1973; Lamon, 1993; Singer y Resnick, 1992). Tradicionalmente ha supuesto la culminación de la formación aritmética de los estudiantes y su cotidianidad, junto con sus numerosas aplicaciones prácticas, justifica que se le dedique gran atención y que esté presente en los currícula oficiales de Educación Primaria y Secundaria.

Actualmente, en el currículo oficial de Educación Secundaria Obligatoria todavía vigente se recogen los siguientes contenidos asociados a este tema:

Primer curso: Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa. Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. Cálculo mental y escrito con porcentajes habituales. (…) Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.

Segundo curso: Proporcionalidad directa e inversa. Análisis de tablas. Razón de proporcionalidad. Aumentos y disminuciones porcentuales. Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa. (…) Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales.

Sin embargo, dado que "el libro de texto […] en muchas ocasiones […] determina el currículo real" (Monterrubio y Ortega, 2009, p. 38), es de interés el análisis del tratamiento recibido por la proporcionalidad aritmética en los libros de texto. Gairín y Muñoz (2005) abordan, en el marco de un estudio más amplio, la utilización del número racional con sentido de razón en textos de Primaria y Secundaria. En (Oller, 2012, pp. 90-115) se analiza la propuesta completa (cursos 1º, 2º y 4º opción A) de una conocida editorial española en lo referente a la Proporcionalidad aritmética. Por su parte, Martínez, Muñoz y Oller (2014) han abordado el análisis del tratamiento de la Proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En otros países (Guacaneme, 2002; Pino y Blanco, 2008) también se han realizado estudios similares.

A partir de los análisis anteriores, podemos realizar las siguientes consideraciones respecto al estado actual de la enseñanza de la Proporcionalidad aritmética:

- Existe un desequilibrio entre los conocimientos de tipo conceptual y los de tipo procedimental, a favor de estos últimos.
- Se considera prioritariamente la razón entre números concebida como su cociente e identificada con una fracción. No se define la razón entre cantidades de magnitud entendida como la cantidad de una nueva magnitud.
- Se observa una gran despreocupación en el manejo de las magnitudes. A la hora de resolver problemas las manipulaciones se llevan a cabo tan sólo desde un punto de vista numérico.
- La proporcionalidad entre magnitudes es algo que se da casi por supuesto, reduciéndose los problemas a decidir si la proporcionalidad es directa o inversa.

- La caracterización de los distintos tipos de proporcionalidad (directa o inversa) se basa, en general, en criterios que requieren del conocimiento de convenciones o de la exploración de tablas. Ello favorece la implantación de ideas y razonamientos incorrectos (A más, más; a menos, menos, etc.). Se aprecia un escaso interés por la adecuada caracterización de la proporcionalidad compuesta.
- En cuanto a la tipología de problemas (Cramer y Post, 1993), existe un predominio absoluto de los problemas de valor perdido. Apenas aparecen problemas de comparación. Además, se observa una escasa cantidad relativa de problemas de proporcionalidad compuesta.
- A la hora de resolver problemas de valor perdido (tanto en el caso de proporcionalidad simple como de compuesta) hay una gran tendencia a presentar técnicas de resolución orientadas a la aplicación acrítica y automática de algoritmos.
- Se observa una gran tendencia a la algebrización y hacia el uso de lenguaje simbólico.
- La proporcionalidad simple directa e inversa son tratadas simultáneamente en el primer curso de ESO, pese a las orientaciones curriculares y a que ambos fenómenos están muy alejadas, tanto desde un punto de vista matemático como cognitivo (Gairín y Oller, 2011).
- Se presentan técnicas específicas para la resolución de problemas de proporcionalidad compuesta, sin ponerlas en relación con las presentadas en la proporcionalidad simple.

Como consecuencia de estas prácticas, son múltiples las evidencias de que existen problemas de comprensión por parte de los alumnos a la hora de trabajar con la Proporcionalidad.

En el estudio TIMSS 2011, llevado a cabo con alumnos de 4º curso de Educación Primaria[6] también encontramos relacionadas con el razonamiento proporcional (Figura 1).

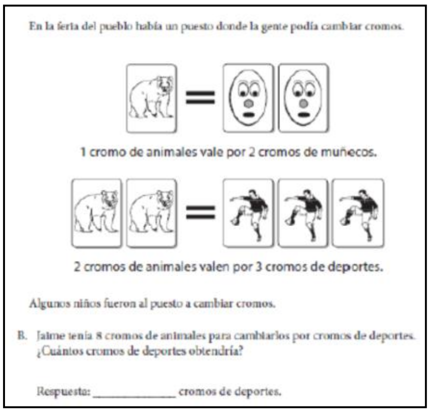


Figura 1. Pregunta sobre proporcionalidad (TIMSS, 2012, pp. 160-161).

Ante esta cuestión, la tasa de acierto de los alumnos españoles fue de un 20%, achacable sin duda a la escasa instrucción relacionada con aspectos de la proporcionalidad que han recibido los alumnos en ese punto de su formación.

[6] Dicho estudio también se lleva a cabo con alumnos del equivalente a 2º curso de E.S.O., pero España no participó en la edición de 2011.

No sucede los mismo en el estudio PISA, que se realiza con alumnos de 4º curso de E.S.O.

SALSAS

Estás preparando tu propio aliño para la ensalada.

He aquí una receta para 100 mililitros (ml) de aliño.

Aceite para ensalada:	60 ml
Vinagre:	30 ml
Salsa de soja:	10 ml

Pregunta 1

¿Cuántos mililitros (ml) de aceite para ensalada necesitas para preparar 150 ml de este aliño?

Respuesta: .... ml

Figura 2. Pregunta sobre proporcionalidad (PISA, 2012, p. 25)

En la Figura 2 se muestra una de las cuestiones liberadas del último informe PISA, correspondiente al año 2012. La tasa de aciertos a esta pregunta fue en España de tan sólo un 62,1%.

Por último, trabajos como (Nortes, Huedo, López y Martínez, 2003) o (Valverde y Castro, 2011), llevados a cabo con maestros en formación, ponen de manifiesto que las dificultades observadas en la escuela se prolongan en el tiempo. Valga como ejemplo la tasa de éxito del 43,8% obtenida en el estudio de Nortes et al. (2003, p. 72) al plantear el siguiente problema a 240 estudiantes de las distintas diplomaturas de maestro:

"En una oficina el Sr. Pérez va a trabajar 2 días a la semana, el Sr. Fuentes va a trabajar 4 días a la semana y el Sr. Espinosa va a trabajar 6 días a la semana. El coste total de iluminación de la oficina (los tres despachos), por semana, asciende a 2400 ptas. ¿Cuánto debe pagar cada uno de los tres señores?"

LA PROPUESTA DIDÁCTICA.

El Área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Zaragoza se ha preocupado especialmente en estudiar la didáctica de la aritmética en diferentes etapas educativas. Los trabajos de investigación sobre el número racional, significados y modelos de enseñanza (Gairín, 2001; Escolano y Gairín, 2005) propiciaron la elaboración de una propuesta de enseñanza del número racional en Educación Primaria y la validación de su viabilidad y pertinencia mediante su puesta en práctica (Escolano, 2007).

De los trabajos anteriores surgió la preocupación del estudio del número racional como razón y sus implicaciones para el tratamiento de la proporcionalidad aritmética. Además de diversos artículos de investigación (Escolano y Gairín, 2009; Gairín y Oller, 2011, 2012; Oller y Gairín, 2013; Martínez, Muñoz y Oller, 2014), se está elaborando una propuesta concreta para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de Educación Secundaria. El diseño de la propuesta y su experimentación en el aula se inició con la tesis doctoral de Oller (2012), defendida en la Universidad de Valladolid, y el desarrollo de la propuesta completa y su implementación en el primer ciclo de secundaria forma parte del proyecto de tesis doctoral de Martínez. El paradigma de investigación utilizado para el desarrollo e implementación de la propuesta es el de Investigación-Acción.

Nuestra propuesta de enseñanza es innovadora en dos aspectos: en cómo se aborda la enseñanza de los conceptos involucrados en la proporcionalidad, y en la secuenciación de dichos conceptos.

Tratamiento de las ideas clave.

Las ideas en torno a las que se articula la propuesta son: el trabajo con magnitudes, la idea de razón, las relaciones de proporcionalidad simple (directa e inversa) y compuesta, la resolución de problemas y las aplicaciones de la proporcionalidad (especialmente los porcentajes).

Trabajo con magnitudes (identificación y manipulación). Una de nuestras mayores preocupaciones es que los alumnos doten de significado a las cantidades que aparecen en las situaciones de proporcionalidad y las operaciones que realizan entre dichas cantidades. Para ello, es imprescindible hacer énfasis en el concepto de magnitud y su identificación en diferentes situaciones. Con este fin, presentamos actividades en la que los alumnos tienen que distinguir entre números utilizados para expresar una cantidad de magnitud y números empleados para otros fines (identificadores, ordinales, etc.). Además, en una determinada situación, no solo deben identificarse las magnitudes que aparecen, sino que también se deben discernir aquellas magnitudes relacionadas entre sí, es decir, aquellas en las que un cambio en una produce cambios en las demás. Por último, nos esforzamos en que los alumnos identifiquen posibles operaciones que pueden realizarse entre las magnitudes involucradas en una misma situación y en que identifiquen el resultado de dichas operaciones con una cantidad de magnitud.

La idea de razón. El concepto de razón y su tratamiento es uno de los pilares de nuestra propuesta. Frente a otras interpretaciones, priorizamos el significado de razón como "tanto por uno". De este modo, la razón entre una cantidad *a* de una magnitud *A* y una cantidad *b* de una magnitud *B*, que denotamos *a/b*, se identifica con la cantidad de la magnitud *A* que se relaciona con una unidad de la magnitud *B*. Así, al emplear la notación *a/b* no vemos ya dos números separados correspondientes a cantidades de magnitudes diferentes, sino que se considera como un único número que representa una cantidad de una magnitud cociente. Por tanto, damos libertad a los alumnos para utilizar el sistema de representación que consideren más adecuado, fraccionario o decimal, si bien se incide en la conveniencia de uno u otro según el caso.

Para introducir el concepto de razón recurrimos a modelos de aprendizaje definidos por situaciones de intercambio y de reparto. Las situaciones de compra-venta son especialmente útiles para este fin por su cercanía al alumno.

Otro aspecto esencial es la condición de regularidad que debe darse en una situación para que tenga sentido hablar de razón (realizar el reparto). La condición de regularidad consiste en explicitar las condiciones necesarias para que tenga sentido realizar un reparto igualitario entre las cantidades de las magnitudes involucradas, a saber: que las unidades de ambas magnitudes sean constantes y que a cada unidad de una de ellas le corresponda siempre la misma cantidad de la otra. Por ejemplo, en la situación siguiente:

Hemos ido de compras al supermercado y hemos comprado 30 productos y nos han cobrado 15€ ¿Cuánto cuesta 1 producto? ¿Cuántos productos puedo comprar con 1 €?

El reparto solo tendrá sentido si todos los productos son iguales y cuestan la misma cantidad (condición de regularidad). Esta situación de intercambio nos permite también presentar, previa discusión, las dos razones (inversas entre sí) que pueden calcularse.

Relación de proporcionalidad simple directa. El trabajo con el concepto de razón y la condición de regularidad desemboca naturalmente en la relación de proporcionalidad directa entre magnitudes. En un contexto determinado, caracterizamos la proporcionalidad simple directa como aquella relación entre dos magnitudes que hace que tenga sentido definir la razón entre ambas. Incidimos en que se trata de una relación particular de entre las muchas que pueden ligar a dos magnitudes. Creemos necesario trabajar con actividades que ejemplifiquen las diversas alternativas situaciones posibles: casos en los que no haya una pareja de magnitudes, casos en el que las magnitudes no estén relacionadas o casos en los que la relación existente no sea de proporcionalidad directa.

Relación de proporcionalidad simple inversa. En este caso, las ideas fundamentales son la idea de razón como "tanto por uno" y la de constante de proporcionalidad, dotando a ambos conceptos de significado concreto en cada situación. En torno a estas ideas gira la caracterización de las magnitudes inversamente proporcionales.

Caracterizamos la proporcionalidad simple inversa como aquella relación entre magnitudes en un contexto determinado en la que existe una tercera magnitud que se mantiene constante tal que tiene sentido definir la razón entre esta tercera magnitud y las dos magnitudes iniciales. Además las razones entre esta nueva magnitud y cada una de las presentadas en justamente la otra magnitud presentada. Por ejemplo, consideremos la siguiente situación:

Hemos comprado un televisor y tenemos que pagar 12 plazos de 85 euros para pagarlo.

En esta situación podemos considerar las magnitudes "número de plazos" e "importe de cada plazo". Evidentemente estas magnitudes están relacionadas pero no tiene sentido tratar de definir las razones entre ellas porque el importe de cada plazo no puede repartirse entre el número total de plazos. Sin embargo, si consideramos la magnitud constante (constante de proporcionalidad) "precio del televisor", sí que tiene sentido calcular la razón entre el precio del televisor y el número de plazos (obteniendo la magnitud importe de cada plazo) y entre el precio del televisor y el importe de cada plazo (obteniendo la magnitud número de plazos). Por tanto las magnitudes son inversamente proporcionales siempre que se cumplan las condiciones de regularidad. En este caso es necesario que se pague siempre lo mismo en cada plazo y que la duración de los plazos sea constante.

Relación de proporcionalidad compuesta. Proponemos dar un tratamiento mucho más próximo al que recibe la proporcionalidad simple frente a los procedimientos más artificiosos de la práctica habitual. La clave para abordar estas situaciones es considerar la relación existente entre una magnitud y cada una de las otras magnitudes involucradas, de tal modo que sólo seremos capaces de enfrentarnos a situaciones en las que cada magnitud es, bien directa, bien inversamente proporcional a cada una de las demás.

En este tipo de situaciones siempre es posible "amalgamar" todas las magnitudes menos una para fabricar una nueva magnitud. De esta forma traducimos la situación original a una nueva situación en la que solo intervienen dos magnitudes, la nueva magnitud y la magnitud que no ha formado parte de la amalgamación. Además, en esta situación traducida, la pareja de magnitudes tendrá una relación directa o inversa. Por tanto cualquier situación problemática se reducirá a una de las estudiadas con anterioridad. Por ejemplo, la siguiente situación:

Para alimentar a 3 gatos durante 4 días, son necesarios 480 gramos de pienso.

Se puede traducir como *480 gramos de pienso son 12 raciones de comida de gato*, como *3 gatos consumen 120 gramos de pienso al día* y como *para alimentar a un gato durante 4 días son necesarios 160 gramos de pienso* para reducir la situación anterior a una de proporcionalidad simple.

Resolución de problemas. Otra de las peculiaridades de nuestra propuesta es aumentar la tipología de problemas de proporcionalidad presentados a los alumnos, trabajando problemas de valor perdido, problemas de comparación cuantitativa y problemas de comparación cualitativa.

Los problemas de valor perdido son los que mayoritariamente se presentan a los alumnos en la enseñanza tradicional. Se trata de aquellos problemas en los que se presenta una situación de proporcionalidad indicando un conjunto de valores para todas las magnitudes relacionadas. A continuación, se da otro conjunto de valores para todas las magnitudes menos para una ("magnitud incógnita") y se pregunta por el valor que le correspondería a esta magnitud. Para la resolución de este tipo de problemas debemos atender exclusivamente a las situaciones simples, ya que como hemos comentado las situaciones compuestas se reducen, previa amalgamación, a una situación simple.

Para las situaciones simples proponemos la resolución mediante dos etapas multiplicativas. En el caso de relación directa, en la primera etapa se calculan las razones entre las cantidades dadas y se elige la que permite resolver el problema mediante un producto en una segunda etapa. Para el caso de la relación inversa, se calcula en la primera etapa el valor de la constante de proporcionalidad, que se utiliza en la segunda etapa para obtener el valor desconocido mediante el cálculo de una razón.

Los problemas de comparación son aquellos en los que se utiliza el valor de la razón o de la constante de proporcionalidad para comparar dos situaciones diferentes que involucran las mismas magnitudes y con la misma relación de proporcionalidad entre ellas. La diferencia entre la comparación cuantitativa y cualitativa es que, en la primera, la información proporcionada es el conjunto de valores para todas las magnitudes de las dos situaciones y, en la segunda, se conoce únicamente la relación de orden entre las cantidades de las magnitudes correspondientes en ambas situaciones y no su valor exacto.

Aplicaciones de la proporcionalidad. Existen múltiples aplicaciones del estudio de las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes. Además de la resolución de problemas antes citados, en nuestra propuesta trabajamos específicamente los porcentajes y los repartos proporcionales. Aunque otros tópicos como la Regla de Interés o las mezclas y aleaciones no reciben atención específica, entendemos que con el trabajo del resto de temas el alumno dispone de las herramientas suficientes para enfrentarse a estas situaciones.

Nuestra propuesta a la hora de presentar los porcentajes se basa en la introducción de la idea de “tanto por ciento” cuya analogía con la razón como “tanto por uno” es evidente. Así, si dos magnitudes A y B tienen una relación de proporcionalidad directa, presentamos el porcentaje que A representa respecto de B como la cantidad de A que se corresponde con 100 unidades de B. Luego si a/b es la razón entre A y B, es claro que el porcentaje que representa A respecto de B es $a/b \cdot 100$. Este proceso se puede presentar como un problema de valor perdido para proporcionalidad simple directa a los alumnos. Dado p, un porcentaje determinado, podemos definir al menos las razones: $p/100$, $(100+p)/100$, $(100-p)/100$ y sus correspondientes inversas $100/p$, $100/(100+p)$, $100/(100-p)$. Estas razones permiten traducir los problemas directos e inversos de cálculo de porcentajes y aumentos y disminuciones porcentuales a problemas de valor perdido entre dos magnitudes directamente proporcionales.

Para los repartos proporcionales, nuestra propuesta se basa en la idea de que al efectuar un reparto se produce la comparación entre dos situaciones. En la primera situación cada persona posee una cantidad de una cierta magnitud, en función de la cual se efectuará el reparto. En la segunda situación cada persona deberá poseer una cierta parte de la cantidad a repartir. El reparto deberá reflejar o equilibrar (según se trate de un reparto directa o inversamente proporcional) la situación inicial. Si se debe reflejar o equilibrar, es decir, si el reparto debe ser directa o inversamente proporcional, es algo que el alumno debe decidir en función del contexto en que se presente el problema. Entendemos que el reparto refleja la situación inicial si las razones entre las cantidades recibidas coinciden con las razones entre las cantidades iniciales. Entendemos que el reparto equilibra la situación si las razones entre las cantidades recibidas por cada persona son las inversas de las razones entre las cantidades que tenían asignadas.

Secuenciación de contenidos.

La mayoría de libros de texto consultados presentan la proporcionalidad simple (directa e inversa) en primero y la proporcionalidad compuesta en segundo. Como apuntamos en un apartado anterior, pensamos que es preferible posponer las relaciones de proporcionalidad inversa a un segundo curso para profundizar en el concepto y manejo de la razón y las relaciones directas en un primer curso. Esta profundización permite a los alumnos abordar situaciones de proporcionalidad compuesta con estructuras sencillas con muy poca instrucción por parte del profesor.

El trabajo realizado con magnitudes, que suele quedar al margen en las propuestas tradicionales, permite introducir mayor variedad de situaciones problemáticas de las que comúnmente se presentan. En particular, introducimos los repartos directa e inversamente proporcionales en el segundo curso.

Las propuestas para ambos cursos tienen una duración aproximada de 12 sesiones en las que se incluye una sesión para realizar una prueba objetiva final. El orden de presentación de los contenidos es el que sigue:

Primer curso E.S.O.

- Razón entre dos magnitudes: Razón como tanto por uno. Razón como resultado de un reparto igualitario. Razón inversa.
- Condición de regularidad: Magnitudes relacionadas. Uniformidad en las unidades de las magnitudes implicadas. Tiene sentido hacer reparto igualitario.
- Distinción de parejas de Magnitudes Directamente Proporcionales (MDP): tiene sentido calcular las razones entre las magnitudes involucradas.
- Problemas de comparación con MDP: comparación (posiblemente previo cálculo) de las razones.
- Problemas de valor perdido con MDP: doble problema multiplicativo en una etapa.
- Proporcionalidad compuesta: Amalgamación de variables para reducción a pareja de MDP.
- Porcentajes: Tanto por ciento como relación entre dos magnitudes, una con cantidad 100. Razón y razón inversa asociadas a un porcentaje dado. Cálculo del porcentaje representado por una cantidad, problemas de cálculo directo e inverso con porcentajes (problemas de valor perdido entre MDP).

Segundo curso E.S.O.

- Operaciones con magnitudes (amalgamación): producto de magnitudes, significado; división de magnitudes, significado, razón como cantidad de magnitud.
- MDP: condición de regularidad, razón y razón inversa.
- Distinción de parejas de Magnitudes Inversamente Proporcionales (MIP): tiene sentido el producto entre las magnitudes y éste es constante en el contexto. Tratamiento como magnitud intensiva de una de las magnitudes involucradas. Constante de proporcionalidad inversa como cantidad de magnitud.
- Problemas de comparación con MDP y MIP: comparación (posiblemente previo cálculo) de las razones o constantes de proporcionalidad inversa.
- Problemas de valor perdido con MDP y MIP: doble problema multiplicativo en una etapa.
- Proporcionalidad compuesta: Amalgamación de variables para reducción a pareja de MDP o MIP.
- Repartos directa e inversamente proporcionales: obtención de razones o constantes de proporcionalidad.
- Porcentajes: Razón asociada a un porcentaje, a un aumento porcentual y a una disminución porcentual. Explicitación de magnitudes y cantidades involucradas. Cálculo directo e inverso con porcentajes y aumentos y disminuciones porcentuales (problemas de valor perdido entre MDP).

DESARROLLO Y VALORACIÓN DE LA PROPUESTA.

El desarrollo e implementación en el aula de nuestra propuesta se encuentra actualmente en curso. En el curso 2009-10, con motivo de la tesis de Oller (2012), se implementó parte de la propuesta en dos grupos de 1º de la ESO del IES Avempace de Zaragoza. Como es característico en la metodología Investigación-Acción, de las observaciones surgidas durante la experimentación y la reflexión posterior a la implementación de una innovación, se modificaron ciertos aspectos de la misma y en el pasado curso 2013-14, se llevó a la práctica con 3 grupos de 1º de la ESO en el IES Leonardo de Chabacier de Calatayud que han permitido obtener interesantes resultados que presentamos más adelante. La recepción por parte del equipo docente de este instituto ha sido muy buena y para este curso académico 2014-15, está previsto continuar con la propuesta en 1º de la E.S.O. en, al menos, otros 3 grupos más y comenzar con la implementación de la propuesta en 2º de E.S.O. en 2 grupos. Además, en el curso 2015-16, está programado que se volverá a impartir en, al menos, 3 grupos de 2º de la E.S.O.

A continuación, realizamos una valoración de los puntos fuertes y débiles de nuestra propuesta detectados durante estos cursos. Advertimos que necesariamente éstos son parciales puesto que nos encontramos a mitad de la experimentación. Por tanto, estas conclusiones corresponden a la experiencia ya realizada con cinco grupos de primer curso de secundaria (aproximadamente un total de 115 alumnos) que ya han cursado estos contenidos. Las valoraciones están determinadas a partir de la observación directa de la actuación de los estudiantes y registrada en el diario de clase del profesor, el análisis de todas las producciones escritas de los alumnos, el análisis de las actuaciones del profesor mediante la grabación con cámara digital de todas las sesiones, la realización de entrevistas semiestructuradas con los estudiantes y la comparación de aquellos grupos en los que se presenta la propuesta con un grupo de control que sigue una enseñanza tradicional de la proporcionalidad aritmética.

Puntos fuertes de la propuesta.

- El número de sesiones asignadas al tópico de proporcionalidad aritmética (12 en primer curso y 12 en segundo curso) no varía sustancialmente el previsto por la programación que seguía el centro y resulta asumible por parte de todo el profesorado del Departamento de Matemáticas.
- Se comprueba que la implementación de esta propuesta novedosa en el aula es viable.
- Se contribuye a que los alumnos profundicen y hagan mejor uso de sus conocimientos sobre el significado de las operaciones aritméticas con naturales y racionales a la hora de resolver problemas relacionados con la proporcionalidad.
- Se evita el recurso a técnicas algorítmicas que, además de requerir una memorización, hacen que el alumno identifique la resolución de problemas con la aplicación acrítica de algoritmos. La necesidad de reflexionar sobre las condiciones en que es necesario aplicar la técnica de resolución de problemas de valor perdido consigue evitar, en parte, fenómenos como la llamada “ilusión de linealidad” (Van Dooren, De Bock, Janssens y Verschaffel, 2008; Fernández y Llinares, 2012).
- Se ha aumentado la tipología de situaciones problemáticas planteados a los alumnos y que les permite resolver nuevas situaciones que apenas se presentaban en la enseñanza tradicional (por ejemplo, los problemas de comparación cuantitativa y cualitativa).
- Los cambios propuestos en cuanto a la secuenciación tradicional (por ejemplo, con la inclusión de la proporcionalidad compuesta) que planteamos en primero de Educación Secundaria no plantean mayores problemas respecto a los que aparecen en la enseñanza tradicional en segundo.
- Surgen de manera espontánea procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad compuesta que no habían sido presentados previamente.
- Se detecta una mejora en los procesos de argumentación que realizan los alumnos para justificar sus respuestas en cuanto a cantidad y calidad.
- A pesar de trabajar con la razón como unidad, muchos alumnos son capaces de emplear estrategias de factor de cambio y dotar de significado a esas tareas de manera espontánea.

- Los resultados de la resolución de problemas de valor perdido mediante regla de tres que se llevó a cabo con el grupo de control no son mejores que los resultados obtenidos por los alumnos sobre los que se ha implementado nuestra propuesta.
- Con posterioridad a la implementación de la propuesta, los estudiantes han sido capaces de aplicar de manera espontánea el concepto de razón y de ideas de proporcionalidad directa en otros ámbitos como la obtención de fórmulas geométricas como las del cálculo de la longitud de un arco y el área de sector circular.
- Se mantiene la distribución relativa de las calificaciones de los estudiantes con respecto a las obtenidas en otros temas.
- Se ha conseguido implicar a todos profesores del Departamento de Matemáticas del IES, fomentando la discusión y el debate entre ellos sobre estos contenidos y sobre la manera de abordarlos. Existen, por tanto, perspectivas favorables para la continuación de dicha propuesta más allá del periodo de investigación programado.

Puntos débiles de la propuesta.

- Hemos detectado que el número racional se entiende principalmente como decimal. Los alumnos muestran dificultades al aplicar los algoritmos para operar con fracciones y evitan en lo posible su uso. Como consecuencia surgen multitud de situaciones en las que los alumnos tenían que aplicar técnicas de aproximación, obteniendo resultados inexactos a pesar de que el procedimiento seguido era adecuado. Para solucionar este problema sería necesario incidir especialmente sobre el número racional como reparto y medida, fomentando la representación fraccionaria del número racional y trabajando cuidadosamente las operaciones con fracciones y la relación de los algoritmos con los repartos o medidas.
- El trabajo con los porcentajes ha resultado especialmente complejo. Un gran número de alumnos había sido instruido, en el último curso de Primaria, en el uso de algún algoritmo para calcular el porcentaje de una cantidad. Esta instrucción previa supuso un gran obstáculo para los alumnos a la hora de enfrentarse a las tareas propuestas, puesto que les resultó muy difícil dejar de lado aquello que ya habían interiorizado. La solución de este problema pasaría, necesariamente, por un trabajo previo con maestros de Primaria en ejercicio y en formación en la misma línea de la propuesta presentada.
- Algunos alumnos reciben algún tipo de ayuda a la hora de resolver las tareas de casa o de preparar la asignatura. Estas ayudas externas (familias, profesores de apoyo, etc.) suponen un problema por cuanto provienen de personas cuyos conocimientos se basan necesariamente en la manera tradicional de presentar la Proporcionalidad aritmética. En consecuencia, presentan al estudiante ideas que chocan frontalmente con lo que se le ha presentado en clase. Para tratar de paliar esta influencia, detectada principalmente en la implementación realizada en el curso 2009-10, hemos hecho partícipes a las familias para conseguir su colaboración mediante entrevistas y circulares. Del mismo modo hemos diseñado un cuadernillo que recoge las ideas clave de la propuesta y que se entrega a los alumnos permite minimizar la búsqueda de ayudas externas. Si bien hemos seguido detectando ese fenómeno en la implementación realizada en el curso 2013-14, lo ha sido en una frecuencia mucho menor.
- Se ha observado que el cambio en la metodología de trabajo en el aula (trabajo en parejas, ausencia de libro de texto, institucionalización posterior a la resolución de situaciones problemáticas) provoca un cierto desconcierto inicial en los alumnos ya que se aparta del esquema de clase magistral tradicional a la que están acostumbrados. En cualquier caso, con el transcurso de las sesiones, los alumnos se adaptan a ese método de trabajo y se aprecian sus ventajas.

- Otra fuente de disrupción en el aula es la propia naturaleza investigadora del proceso. Así, la recogida diaria de fichas de trabajo y, especialmente, el uso de una cámara para la grabación de las sesiones de clase suponen novedades que distraen inicialmente la atención de los alumnos. Como en el caso anterior, el transcurso de las sesiones supuso la normalización de dicha situación.

Referencias.

CAÑAL DE LEÓN, P. (coord.) (2002). *La innovación educativa*. Madrid: Akal.

CARBONELL, J. (2002). El profesorado y la innovación educativa. En P. Cañal de León (coord.), *La innovación educativa,* pp. 11-26. Madrid: Akal.

CRAMER, K. y POST, T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher*, 86(5), 404-407.

ELLIOT, J. (1990). *La Investigación-Acción en Educación*. Madrid: Morata.

ESCOLANO, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.

ESCOLANO, R. y GAIRÍN, J.M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática,* 1, 17-35.

ESCOLANO, R. y GAIRÍN, J.M. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Suma*, 62, 35-48.

FERNÁNDEZ, A. (2009). *Razón y proporción: Un estudio en la escuela primaria*. Valencia: Publicacions de la Universitat de València.

FERNÁNDEZ, C. y LLINARES, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(1), 129-142.

FIDALGO, A. y SEÍN-ECHALUCE, M.L. (coord.) (2011). Aprendizaje innovación y competitividad. *ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura*, 187, extra 3.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

GAIRÍN, J.M. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos: un estudio con maestros en formación. *Contextos educativos*, 4, 137-159.

GAIRÍN, J.M. y MUÑOZ, J.M. (2005). El número racional en la práctica educativa: estudio de una propuesta editorial. Comunicación al grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. *Investigación en Educación Matemática IX*. Córdoba: SEIEM.

GAIRÍN, J.M. y OLLER, A.M. (2011). Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. En J.L. Lupiáñez, M.C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática 2011,* pp. 179-189. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

GAIRÍN, J.M. y OLLER, A. M. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI*, pp. 249-259. Jaén: SEIEM.

GUACANEME, E.A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA*, 7(1), 3-42.

I.E.A. (2013). *PIRLS-TIMSS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias.* Volumen I: Informe Español. Madrid: MECD.

LAMON, S.J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 41-61.

MARCELO, C., MAYOR, C. y GALLEGO, B. (2010). Innovación educativa en España desde el punto de vista de sus protagonistas. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado,* 14 (1), 112-134.

MARTÍNEZ, S., MUÑOZ, J.M. y OLLER, A. M. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.*) Investigación en Educación Matemática XVIII*, pp. 435-444. Salamanca: SEIEM.

MONTERRUBIO, M.C. y ORTEGA, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII,* pp. 37-53. Santander: SEIEM.

NORTES, A., HUEDO, T., LÓPEZ, J.A. y MARTÍNEZ, R. (2003): Conocimientos matemáticos de maestros en formación. *Suma*, 44, 71-82.

O.C.D.E. (2013). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe Español.* Volumen I: Resultados y contexto. Madrid: MECD.

OLLER, A.M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid. Recuperable en http://uvadoc.uva.es/handle/10324/1118

OLLER, A.M. y GAIRÍN, J.M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 317-338.

PINO, J. y BLANCO, L.J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88.

SÁNCHEZ, M. y MURILLO, P. (2010). Innovación educativa en España desde la perspectiva de grupos de discusión. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 14 (1), 171-189.

SÁNCHEZ RAMÓN, J.M. (2005). La innovación educativa institucional y su repercusión en los centros docentes de Castilla-La Mancha. *REICE - Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 3 (1), pp. 637-664.

SINGER, J.A. y RESNICK, L.B. (1992). Representation of Proportional Relationships: Are Children Part-part or Part-whole Reasoners? *Educational Studies in Mathematics*, 9, 55-73.

VALVERDE, A.G. y CASTRO, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII,* pp. 523-531. Santander, España: SEIEM.

VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., JANSSENS, D., y VERSCHAFFEL, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' over-use of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 311-342.

Para hacer referencia al artículo

Martínez, S., Muñoz, J.M., Oller, A.M. y Pecharromán, C. (2015). Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de ESO. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 459-470). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

MATEMÁTICAS DIVERTIDAS: “GYMKANA EN GREDOS”

Ana Yolanda Miranda López

I.E.S Valle del Tiétar

Resumen

Esta comunicación trata sobre la experiencia llevada a cabo durante diez años en Arenas de San Pedro de una gymkana matemática. Cada año la preparación se ha venido realizando en el marco de diferentes grupos de trabajo dependientes del C.F.I.E de Ávila y se ha ido transformando en lo que ahora es. ¿Son las matemáticas divertidas? Si nos preguntan a los profesores de matemáticas, la respuesta es obvia, si preguntamos a los alumnos de secundaria…lamentablemente no piensan como nosotros. Nuestro reto es conseguir que piensen que sí, que no solo son divertidas sino que además se puede disfrutar aprendiendo con ellas. A través de la búsqueda de diferentes metodologías para aplicar dentro y fuera del aula intentamos conseguirlo.

Palabras clave: *metodología*, *matemáticas*, *innovar*, *gymkana*

ORIGEN DE LA EXPERIENCIA.

Esta experiencia lleva ya diez años y es valorada muy positivamente tanto por los profesores como por los alumnos participantes en las diferentes ediciones.

Ante la preocupación como profesores de *matemáticas* de que nuestra asignatura no tuviera el tirón lúdico entre los alumnos que otras pueden ofrecer y sabiendo como sabemos lo divertidas que las *matemáticas* pueden ser, se decidió crear un grupo de trabajo con el fin de poder transmitírselo a nuestros alumnos. Uno de los profesores tuvo la idea de organizar una *gymkana* matemática coincidiendo con el 12 de mayo, día Internacional de las Matemáticas y poco a poco ha ido tomando forma y se ha convertido en el modelo actual. Cada año la preocupación es la misma y las ganas de llegar a nuestros alumnos es mayor por eso el éxito de esta experiencia, en la que van participando diferentes profesores a lo largo de los años, con diferentes formas de entender las *matemáticas* distintas *metodologías*, para aplicar en el aula y muchas ganas de transmitir y compartir con los demás.

Yo solo llevo tres años en esta aventura matemática y ya voy a por el cuarto, mis compañeros me han animado a venir y estoy aquí porque creo que compartir diferentes experiencias es enriquecedor y positivo.

Cuando empecé a dar clases me costaba mucho cambiar la *metodología* hacer cosas diferentes que no fueran la clase teórica y la corrección de los ejercicios y la razón era que no me atrevía, no confiaba en tener éxito al usar otras herramientas de las que no me sentía segura. Empecé a participar en grupos de trabajo con otros compañeros profesores de *matemáticas* y fue compartiendo sus diferentes experiencias y diferentes *metodología*s como comencé a atreverme a *innovar* un poco en el aula.

Descubrí que como complemento del currículo se podían proponer juegos matemáticos, por ejemplo los últimos quince minutos de la clase de un viernes, un acertijo o reto matemático en cualquier momento e incluso la hora entera realizando un juego como resumen del tema.

Poco a poco he ido aprendiendo que a veces es realmente instructivo y refrescante cambiar la *metodología*, hasta me atreví a representar una obra de teatro matemático para la semana de la ciencia, experiencia que creo no olvidarán nunca mis alumnos.

DINÁMICA DE TRABAJO.

Las reuniones son mensuales desde septiembre hasta mayo y tienen un doble fin, preparar la *gymkana* como objetivo final y compartir experiencias y diferentes *metodología*s en el aula. Voy a hacer referencia al trabajo realizado por los 11 profesores del año pasado de diferentes centros de la zona.

Fomento de la lectura

Durante las reuniones comentamos diferentes libros que cada uno ha leido y que nos parecen interesantes para los alumnos. Indicamos para que curso podía estar recomendado y como lo podemos utilizar en el aula.

Compartiendo experiencias

Presentamos diferentes actividades a realizar con los alumnos como complemento a los temas del currículo, dominos con diferente temáticas como fracciones, áreas de figuras planas,expresiones algebraicas, puzles con el sistema sexagesimal, adivinanzas que tienen que ver con las ecuaciones o trabajando con bingo de operaciones, pirámides para completar con diferentes operaciones con fracciones…

Todo este material es sacado de muchos libros , entre otros los dos que tiene Ana García Azcárate sobre juegos en clase de *matemáticas* nos han sido muy útiles e interesantes.

Se comparten las dificulades que observamos para que nuestros alumnos aprendan algunos conceptos matemáticos y aportamos las diferentes estrategias que usamos en el aula para conseguirlo.

Lo importante no es encontrar un material sino que un compañero nos cuenta como lo ha utilizado, qué variación le ha hecho al juego para que sea más efectivo, y como lo ha adaptado al aula. Compartimos actividades que podemos realizar en determinados temas y las prácticas que hemos utilizado con más éxito en el aula, con las que han aprendido y se han divertido más. Es este tipo de *,experiencia,* el que realmente nos ayuda a planificar una actividad y contar con la *metodología* más adecuada para utilizarla.

Selección de pruebas para la Gymkana

La *gymkana* va dirigida a alumnos de 1º y 2º de E.S.O, por tanto las pruebas se adecúan a esos niveles. Durante los primeros meses vamos buscando diferentes pruebas de forma individual, que llevamos a las reuniones para su estudio y debate. Incluso las realizamos nosotros para valorar su dificultad. Buscamos muchas y descartamos otras, pero todas nos sirven, la que no es utilizada en la *gymkana* nos sirve como material para el aula y van quedando como material de trabajo.

Las pruebas tienen que ser lo más variadas posibles, suele haber alguna de geometría, en otras aprovechando los elementos del entorno se usan mapas y escalas, hay pruebas de lógica con diferentes enigmas, codificación de mensajes, pruebas de orientación y uso de las coordenadas cartesianas, álgebra, algo de combinatoria, equivalencia de medidas, sucesiones…

Normalmente se realizan 7 pruebas, pero este año como eran cuatro los centros participantes y 11 profesores, para que participaran más alumnos se hicieron 8 pruebas. En las diferentes sesiones vamos eligiendo las pruebas y finalmente, cada profesor les da la forma final. Al ser una actividad al aire libre usamos diferentes materiales, a veces se necesita construir un dominó gigante o usamos paneles que hacen la prueba más visual, intentando sobre todo que sea más manipulativo (se han utilizado hasta neumáticos para medir distancias).

Las pruebas se adaptan al entorno, los enunciados se redactan de forma que tengan que ver con el lugar de realización de *la gymcana.* Muchas de las pruebas son inventadas y otras las hemos rescatado de problemas que nos gustan o atraen de diferentes libros.

Como la experiencia nos ha demostrado que algunos grupos terminan la prueba antes de tiempo, tenemos preparadas adivinanzas *matemáticas* y juegos de tungras para tener material adicional para completar el tiempo de la prueba.

Pruebas utilizadas.

Presento un resumen de las ocho pruebas de este año. Los enunciados son mucho más elaborados y divertidos, aquí solo expongo un breve resumen de cada una con el objetivo final de la prueba.

- Prueba 1A y B. La altura del Cervunal[i]. En esta prueba se utiliza un teodolito, una regla, un mapa a escala, una mesa de trabajo, calculadora y transportador de ángulos. Cada grupo debe calcular la altura del Cervunal. Figura1

Figura 22. La altura del Cervunal.

- Prueba 2A. Averiguar medidas. Con dos garrafas de 3 y 5 litros respectivamente, deben encontrar la forma de conseguir 1, 2 y 4 litros. Disponen de una fuente y las garrafas indicadas. (Esta prueba les encanta)

- Prueba 2B. Averiguar medidas. Con dos varas de 60cm y 70cm respectivamente, deben encontrar la forma de conseguir 1, 2 y 4 metros.

- Prueba 3A y B. Robín Hood en Littel Crag[ii]. En el torneo junior nuestros arqueros tienen que averiguar cuántas dianas de tres colores se pueden construir sin importar el orden con estos 5 colores diferentes, rojo, amarillo, azul, blanco y negro. En el senior cada diana debe tener los cinco colores pero en distinto orden desde el centro de la diana hacia afuera.

- Prueba 4A Recorrido por el bosque[iii]. Orden con los decimales. Disponen de un panel de tamaño grande y diferentes piedrecitas de colores para indicar el camino seguido. Hay una casilla de salida con un número decimal. Deben saltar de una casilla a otra contigua que tenga un número mayor y llegar al final al final del recorrido. Figura 2

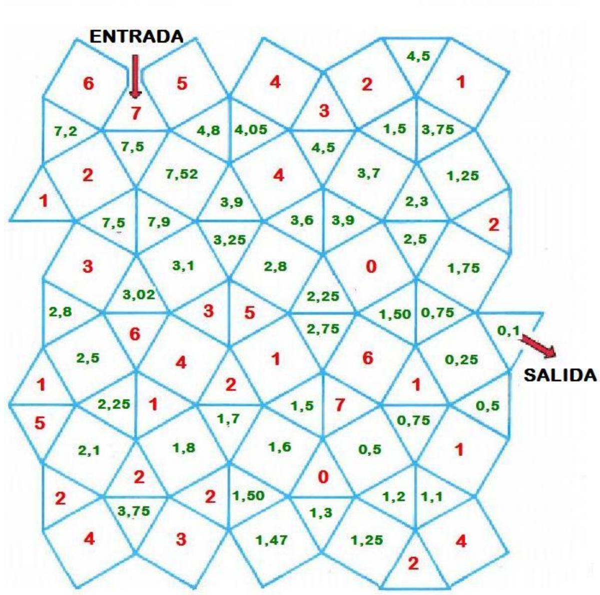


Figura 2. Recorrido de decimales

- Prueba 4B. La abeja del parque[iv]. Disponen de un panel gigante imitando un panel. La abeja debe recorrer las celdas de un panal con las celdillas numeradas y solo puede moverse de una a otra contigua y con un número mayor. Deben averiguar cuántas rutas hay que seguir para alcanzar la celdilla número 8 y también tendrán que encontrar en que celdilla terminarán si hay 2.584 rutas para llegar a ella.
- Prueba 5A. Hexágonos en el dodecágono. Hay que calcular el área del dodecágono basándonos en los dos hexágonos formados por triángulos equiláteros, que tienen el mismo lado que el dodecágono y manejando las figuras como un puzle se puede calcular fácilmente el área. Figura 3

Figura 3. Hexágonos en dodecágonos

- Prueba 5B. Puzle de triángulo equilátero. Un triángulo equilátero está dividido no tan caprichosamente en cuatro trozos. Deben averiguar tres ángulos ocultos utilizando sus conocimientos. Por último transformarán el triángulo equilátero en un rectángulo resolviendo el puzle.[v]

- Prueba 6A y B. Frases *matemáticas.* Con ayuda de una pista, una rueda del saber y encontrando la dirección adecuada encontrarás dos frases de grandes matemáticos, con sus respectivos autores. No existen vocales, están han de ser encontradas por el contexto Encriptado 1: Clave numérica: 119 .Figura 4

ჯ□ꕤ ✦□❈⊠✦□❈⧈⅄□ꕤ ꕤ⊡& ⊠ჯ □ჯ❍□◎⊠❈⊡ ⅄⊡& ⊠ჯ ⅄■□ჯ ⌖⧈⊡ꕤ ⌑□ ⊠ꕤ⅄ഌ⧈❈⊡ ⧈ჯ ■&⧈♦⊠ഌꕤ⊡ (⌘□ჯ⧈ჯ⊠⊡ ⌘□ჯ⧈ჯ⊠⧈)

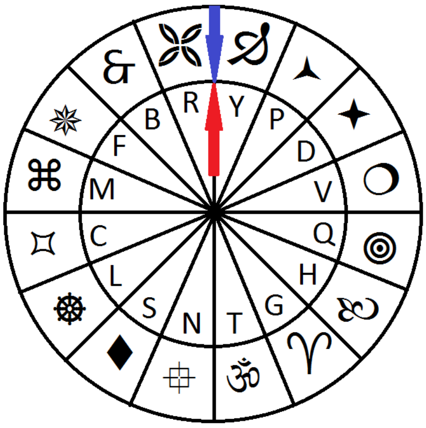


Figura 4. Rueda del saber

- Prueba 7 A y B. El Enigma juguetón. Un enigma matemático se encuentra escondido en un sobre. Dicho sobre está escondido en un lugar del parque. Para encontrarlo deben resolver una fácil ecuación que les permite encontrar el valor de la estrella pitagórica (la incógnita). Esta les indica el origen de coordenadas, siguiendo la dirección indicada encontraran el sobre que les permite concluir la prueba. Disponen de una fotografía de una determinada zona del lugar y una cuadricula transparente con los ejes cartesianos dibujados.
- Prueba 8 A y B. Letras y números se entretienen.[vi] Con una tabla que contiene letras del alfabeto relacionadas con números que obtienen del mensaje que encierran, se pide codificar un mensaje para el equipo contrario. Cada equipo debe codificar un mensaje y descodificar el mensaje que le llega.

Preparación de la *Gymkana*

Primero elegimos el lugar, debe reunir una serie de condiciones, sitios amplios, sin tráfico, cada año un pueblo diferente de la zona, los últimos años se ha realizado en Mombeltrán, en el Monasterio de San Pedro, el año pasado en el Risquillo en Guisando y este año estamos pensando celebrarla en Candeleda.

Nos ponemos en contacto con el ayuntamiento y también pedimos ayuda a la policía municipal por si la pudiéramos necesitar el día del evento. Al ayuntamiento le solicitamos que nos compren las camisetas para los alumnos, con el logo de la *gymkana* (Figura 5) y un pequeño picnic con bocatas y bebidas refrescantes, también contactamos con los colegios del pueblo dónde se realiza en invitamos a los alumnos de 5º y 6º de primaria a participar.

Las camisetas no solo son un regalo, sino que tienen una utilidad estratégica, previamente hemos organizado los diferentes equipos por colores, se reparten en cada centro antes de salir, de modo que al llegar al punto de encuentro, se deben reunir con los compañeros con los que van a hacer las pruebas, para irse conociendo antes de empezar el juego.

La prueba se realiza el 12 de mayo y si cae en fin de semana se elige el día más próximo lunes o viernes. La actividad dura toda una mañana. Participan un total de 64 alumnos de 1º y 2º de E.S.O repartidos de forma equitativa entre los diferentes centros y también 18 alumnos de 4º de E.S.O de los diferentes centros, como alumnos ayudantes. Muchas veces se da la circunstancia de que alumnos que participaron un año están deseando participar como ayudantes, un total de 82 alumnos de secundaria más 16 alumnos de 5º y 6º de primaria del CRA de Guisando, el Hornillo y el Arenal que este año nos acompañaron.

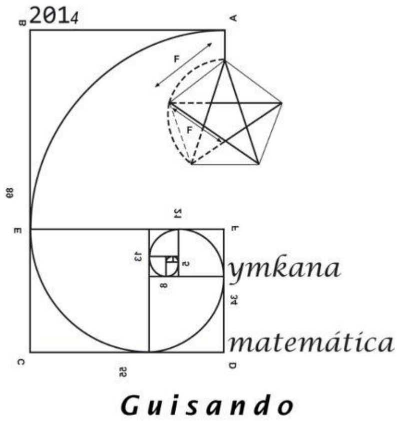


Figura 5.

Se forman 16 grupos de 4 alumnos que pertenecen a un centro diferente, repartidos por niveles, centros, e incluso intentamos la paridad de sexos, para que sean lo más heterogéneo posible.

No se conocen y por tanto otro de los objetivos es fomentar las relaciones entre los centros y que aprendan a trabajar en equipo. Es muy interesante observar como empiezan la primera prueba de forma tímida, sin ninguna cohesión como grupo, actúan de forma individual (es la que se les suele dar peor a todos los grupos) y van pasando las pruebas y en la prueba final se observa cómo han evolucionado como grupo, dan su opinión, intervienen, se han ido conociendo y confiando unos en otros y toman las decisiones casi de forma conjunta.

Hay 8 pruebas dobles, unas llevan la letra A y otra la B. En los días previos hemos buscamos el emplazamiento para cada prueba, las que llevan el mismo número son la misma prueba con alguna pequeña variación y se sitúan relativamente cerca. El resto se reparten por los diferentes alrededores no demasiado lejos pero lo suficiente para dar un pequeño paseo de un par de minutos.

Los equipos son numerados del 1 al 8 con letras A y B y cada grupo empieza en la prueba de su número y letra. Los que pertenecen al grupo A cambian de prueba en orden natural y los de la letra B en orden descendente hasta realizar las 8 pruebas que tiene el circuito.

Cada prueba tiene un profesor supervisor y de cada grupo se encarga un alumno de 4º de E.S.O, unos minutos antes de comenzar la *gymkana*, los profesores informamos a los alumnos de 4º de la prueba que deben coordinar, como hay que puntuarla y que indicaciones pueden hacer, también disponen de la solución. Son ellos los encargados de explicar y controlar la prueba que les ha correspondido, plantearla y guiar a los diferentes grupos que pasan por ella. Son los responsables de puntuarla a través de una plantilla previamente preparada. Los profesores estamos atentos por si necesitan nuestra ayuda, sobre todo en los dos primeros grupos, pero luego dominan perfectamente la situación, se encargan de conducir la prueba a la perfección.

Cada prueba dura 15 minutos, si algún grupo acaba antes se le entrega un acertijo o adivinanza matemática, o deben realizar un trangram, con lo que consiguen algún punto extra. Pasado el tiempo se toca un silbato o vuvucela y pasan a la prueba siguiente. Tenemos dos alumnos ayudantes de 4º que se encargan de este cometido, además hacen un trabajo de campo, controlan los recorridos de los alumnos para que no se pierdan y lleguen a la prueba adecuada, van haciendo un seguimiento de las diferentes pruebas anotando cual les parece más complicada, si han tenido tiempo suficiente para realizarlas, observan cómo van funcionando los grupos y que grupo está más cohesionado, información que luego comparten con los profesores para tener también una visión de los alumnos.

Finalmente una vez terminada la *gymkana*, se toman el picnic mientras un grupo de profesores recogen los resultados de las pruebas para poder hacer entrega de los premios.

Al principio se daban premios a todos: el grupo más simpático, el más colaborativo, el más rápido,…pero los propios chicos querían que se dieran puntos y querían saber quien había ganado. Damos medallas a los tres primeros equipos y siempre decimos que las puntuaciones de los demás han estado muy igualadas.

Aprovechamos el lugar al que vamos para realizar una visita guiada. En la Villa de Mombeltrán nos enseñaron el castillo, en el Monasterio de San Pedro, el padre prior nos enseñó la biblioteca e hicimos un recorrido por el monasterio, y en Guisando visitamos la Casa del parque del Risquillo.

Figura 6. Gymkana 2014.

Valoración de la Gymkana

A los participantes les pasamos una encuesta con diferentes preguntas para conocer que prueba les ha gustado más y que opinan de las pruebas *matemáticas.* Un alto porcentaje dice que las *matemáticas,* no son tan “rollo” como parecían.

Muchas veces es un punto de inflexión para las clases, su actitud cambia, son ellos los que nos piden que pongamos alguna prueba parecida, les gusta que les propongamos estas actividades.

Como profesores observamos que nuestros alumnos han disfrutando de una forma de resolver problemas matemáticos totalmente diferente a la habitual, han trabajado en equipo, han utilizado su razonamiento para convencer a los demás, han tenido que usar la lógica, su intuición y conocimientos matemáticos y nos han confesado que se han divertido con las *matemáticas*.

Reto superado, nuestro siguiente objetivo, algo más difícil pero no imposible, es conseguir que sigan disfrutando de ellas en el día a día. Figura 6.

Profesores participantes

Ángeles Bodego Sánchez y Rita María Docio Solé del I.E.S Candavera (Candeleda), Carmen Arévalo Martín del C.C Divina Pastora (Arenas de San Pedro) ,Inmaculada González Cano y Flor María Ontañón Rodríguez del I.E.S Juana De Pimentel(Arenas de San Pedro) , Verónica Iglesias Rodríguez del I.E.S Sierra del Valle (La Adrada), Antonio González Fernández, Juan J. Hernández de la Torre Benzal, , María Merino Doncel, Rosa Montesinos de la Puente y Ana Yolanda Miranda López del I.E.S Valle del Tiétar.

Referencias.

Prueba 5B. Según un teorema demostrado por uno de los más importantes matemáticos del siglo XIX, el alemán David Hilbert cualquier polígono (regular o no) puede transformarse en cualquier otro mediante su partición en un número finito de partes. En el caso de un triángulo equilátero el número mínimo de partes cuyo reordenamiento conduce a un cuadrado es 4, como surge de la necesidad de generar sus 4 ángulos rectos. El rompecabezas que aquí se presenta es una de las maneras de generar tal subdivisión del triángulo equilátero, propuesta por un experto en matemática recreativa, el inglés Henry Ernest Dudenev en su primer libro, *The Canterbury Puzzles*.

Para hacer referencia a este artículo:

Miranda, A.Y.. (2014). Matemáticas divertidas: “Gymkana en Gredos”. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: *·Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas”.* (pp. 471-478) Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

---

[i] Montaña conocida como Cabeza Nevada, en la sierra de Gredos

[ii] Traducción libre de “El Risquillo”

[iii] Prueba sacada del libro de Ana García Azcárate “Pasatiempos y juegos en la clase de matemáticas. Números y Álgebra” Ed. Avinareta.

[iv] Problema número 3 de la fase semifinal de las Olimpiadas matemáticas de Madrid 1999.

[v]Extraído del libro de Ana García Azcárate : Pasatiempos y juegos en la clase de matemáticas. Geometría” ed. Avinareta.

[vi] Prueba que utiliza la actividad 14, del libro” Sesión 3”. Números y calculadora de la sociedad ESTALMAT-Andalucía.

MATEMÁTICAS "EDUCA-ACTIVAS" DESDE LA FACULTAD DE EDUCACIÓN

María Luisa Novo Martín.
Facultad de Educación y Trabajo Social de Valladolid.

Resumen

Se presenta una metodología activa y participativa para cimentar el conocimiento matemático y ayudar a los estudiantes del Grado de Educación Infantil a desarrollar su competencia en esta materia. Esta metodología está basada en: El diseño de clases prácticas, talleres con materiales didácticos, recursos telemáticos interactivos, análisis de textos escolares y bibliografía sobre Investigación en Educación Matemática en Infantil. A su vez, los alumnos realizaron trabajos cooperativos cuya presentación en el aula se grabó en soporte audiovisual para su posterior análisis por cada grupo de trabajo.

En la comunicación se presentarán algunas de las experiencias realizadas en las clases prácticas, materiales didácticos construidos por los propios estudiantes y material audiovisual.

Palabras clave: *competencia matemática, metodología activa, trabajo cooperativo, actividades para pensar.*

INTRODUCCIÓN

Consideramos que las matemáticas juegan un importante papel formativo, instrumental y aplicado, justificando su destacada presencia en todos los currículos de la Enseñanza Obligatoria. Un maestro debe no sólo consolidar su formación en esta disciplina sino también adquirir herramientas didácticas suficientes para su trabajo en el aula en este campo. Para aterrizar en la realidad del aula se pasó un cuestionario el primer día de clase. No se va a presentar aquí un estudio pormenorizado de las conclusiones, sólo de algunos aspectos que se consideraron relevantes para el desarrollo de nuestro trabajo en el aula. En general, se comprobó, por un lado, que nuestros estudiantes se quejaban de que no siempre el plan Bolonia respondía a sus expectativas y, por otra parte, que muchos de ellos habían tenido experiencias negativas en procesos formativos anteriores. Transcribimos el siguiente ejemplo:

P: ¿Qué esperas de esta asignatura?

R: Aprender estrategias útiles para el aula, que sirvan para enseñar a los niños matemáticas de una manera divertida y sin que al final acaben cogiendo manía a esta asignatura, como me llegó a pasar a mí en cursos superiores.

Por ello, se planteó como objetivo primordial: disfrutar "haciendo matemáticas" para perder el miedo y, en consecuencia, lograr que los futuros docentes fueran capaces de transmitir a los niños y a las niñas el gusto por el descubrimiento en nuestra asignatura.

Compartimos la opinión de Vidal (2010) sobre que hay que contrarrestar el poco entusiasmo que origina esta materia con la fascinación del profesor en la transmisión de estos conocimientos.

ORGANIZACIÓN DE LAS CLASES PRÁCTICAS

La experiencia se llevó a cabo desde el curso 2011-2012, cuando se implantaron las nuevas titulaciones de Grado de Maestro/a en Educación Infantil por la Universidad de Valladolid hasta el curso 2013-2014 con los estudiantes de segundo curso.

Es importante considerar que las clases prácticas son posteriores a una introducción teórica con todos los estudiantes mediante diversas presentaciones con numerosos ejemplos y una selección de películas educativas. El alumnado participa planteando dudas, debates y análisis de los aspectos más significativos de los bloques de contenido para la enseñanza –aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil: La lógica, el aprendizaje y la enseñanza de los números naturales del cálculo, de aspectos topológicos y geométricos básicos, de la introducción a la medida y del planteamiento y la resolución de problemas.

La Facultad de Educación dispone de un taller de matemáticas equipado con numerosos materiales didácticos, pizarra interactiva, pizarra…Es el lugar ideal para desarrollar una metodología activa.

En las clases prácticas se divide a los estudiantes en dos grupos, de tal forma que el trabajo desarrollado es más eficaz. Se pretende un acercamiento a la realidad escolar desde la Facultad y trabajar distintos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil. A continuación, explicaremos las diferentes actividades que se plantean en las clases prácticas con nuestros estudiantes.

ANÁLISIS DEL CURRÍCULO A PARTIR DE DISTINTAS EDITORIALES

En un principio, es necesario conocer el currículo oficial vigente en esta etapa educativa. En este caso dicho currículo se presenta en la publicación del Ministerio de Educación y Ciencia, Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se regula la ordenación de la Educación Infantil. Además del currículo oficial, se realizó un análisis curricular de las publicaciones de textos escolares de diversas editoriales comparando unas con otras y escogiendo de cada una las actividades matemáticas más adecuadas. Teniendo en cuenta, que el trabajo sobre papel solamente se puede realizar después de proponer numerosas actividades previas, que no siempre aparecen recomendadas en los textos. Con el alumnado observamos que existen algunos aspectos en los que no se presenta una enseñanza globalizada. Pero casi todos los textos van pasando del viejo sistema de manual de nociones a la nueva interpretación de texto activo que sirve para reforzar la asimilación de conceptos y sobre todo para la adquisición de hábitos y destrezas.

Esta actividad de análisis del currículo y de textos educativos nos encamina a la siguiente etapa de trabajo práctico que consiste en la programación de actividades didácticas a través de modelos y patrones que se presentan a continuación.

PROGRAMACIÓN DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

Para que el trabajo sea más eficaz y activo se realiza dividiendo a los estudiantes por grupos de seis alumnos. Se trata de realizar programaciones de actividades didácticas para los niños siguiendo el modelo adaptado de Antón y otros (2004): Descripción del material utilizado, que puede ser ambiental o estructurado, tipo de actividad, metodología y cómo concluye la actividad. Las propuestas de actividades han de ser distintas de las trabajadas como ejemplos en el aula. Según qué aspectos teóricos hayamos estudiado previamente las actividades servirán para llevar a la práctica dichos aspectos, para desarrollar la lógica, construir los números, descubrir el espacio. Y el patrón que se seguirá es de Canals (1992): Actividades para identificar. Actividades para relacionar. Actividades para operar.

Las actividades de identificación tienen como objetivo reconocer cualidades de los objetos, cantidades, formas…

Cuando realmente se comienza a hacer matemáticas es en el momento en el que se relacionan unos objetos con otros o unas acciones con otras, por ejemplo: Un ratón es grande si se le compara con una hormiga y pequeño si se le compara con un gato.

Operamos cuando, partiendo de un estado inicial, se realiza un cambio, es decir, realizamos una operación cuando partimos de un elemento de un conjunto y obtenemos otro. Los operadores pueden ser neutros, directos e inversos.

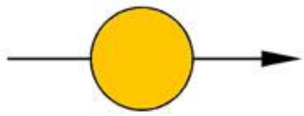
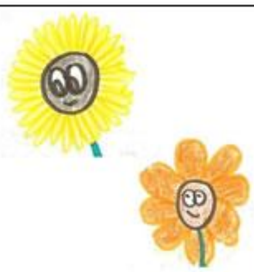
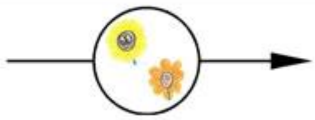
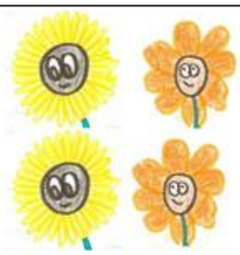
El operador es neutro cuando no se realiza ninguna transformación.

Se denomina directo cuando partiendo del estado inicial, la transformación busca obtener el estado final.

Se llama inverso cuando tenemos la situación inicial y final y nos falta el cambio o cuando tenemos la transformación y la situación de salida y nos falta la situación de entrada.

El cambio puede ser de cualidad (color, textura…), pero también se pueden trabajar las cantidades, partimos de dos piedrecitas y añadimos tres el estado final o de salida es cinco piedrecitas. También podemos tener cambios de aspectos geométricos como giros o simetrías.

Tabla 1: Tipos de operadores. Versión propia adaptada de Alsina (2006, p. 69)

Tipo de operación	Situación Inicial	Transformación, Cambio	Situación Final
Lógico-matemática		 Cambiamos el color	
Aritmética		 Añadimos	
Aritmética utilizando símbolos matemáticos	2	$\longrightarrow (+2) \longrightarrow$	4
Geometría		Eje de simetría	

Presentamos a continuación ejemplos de actividades propuestas por los grupos de estudiantes del grado de Educación Infantil siguiendo los tipos de Canals (1992) y el modelo de Antón y otros (2004):

EJEMPLO 1

Actividad de **IDENTIFICAR: “Conocemos las cucharas”**

Actividad de identificación de cualidades sensoriales: Agrupaciones de elementos por una cualidad común.

Material: Cucharas de distintos materiales, tamaños y formas

Metodología:

Los niños trabajan en pequeños grupos y la aplicación es directa. Se pide a los niños que nombren los distintos tipos de cucharas que conocen y su utilización. Por ejemplo: la cuchara para cocinar, la de comer, la de postre, la del café…Posteriormente se les pide que identifiquen los distintos tamaños para luego agrupar las que tengan la misma cualidad.

Duración actividad: 10-15 minutos.

Cierre actividad: Se colocan las cucharas en el rincón de la cocinita.

El planteamiento de este tipo de tareas tiene como objetivo que nuestros estudiantes comprendan que para desarrollar las competencias matemáticas en la Educación Infantil es imprescindible provocar situaciones de aprendizaje en las que los contenidos matemáticos adquieran sentido. Además, paulatinamente, nuestro alumnado, va asimilando que las matemáticas forman parte de su propia vida y de la de los niños y, además se va enfrentando a las tareas sin miedo.

EJEMPLO 2

Actividad de **RELACIONAR**: **“Cada palo con su cubilete”**

Además de identificar los colores, realizan una clasificación de los mismos colocando cada uno en su lugar.

Material: Cartulinas de diferentes colores y palos de madera de los mismos colores.

Metodología:

Se colocan cubiletes de varios colores en una fila, formando una gama de color y se le da al niño varios palos de madera de los colores de los cubiletes. Tendrá que ir colocando los palos dentro de cada cubilete correspondiente, teniendo cuenta los colores. Es decir, el palo tiene que ir dentro del cubilete del mismo color.

Duración actividad: 5 min.

Cierre actividad: Se realiza un diálogo para explicar el siguiente refrán: “Cada oveja con su pareja” con la ayuda del maestro.

Figura 1: Material para hacer clasificaciones por colores

EJEMPLO 3

Actividad de **OPERAR**: **“Cambia el color”**

Con esta actividad pretendemos que el niño aprenda a transformar las cualidades de los objetos atendiendo a una cualidad propia de éste, buscando, a través de la misma, el desarrollo se su pensamiento lógico-matemático desde edades tempranas.

Material: Los materiales utilizados para esta actividad son una cartulina grande, piezas en goma Eva de diferentes colores y velcro.

Metodología:

En la actividad se presenta una cartulina en la que aparecen dos columnas. En la primera columna hay diferentes siluetas de un mismo color, por ejemplo 5 siluetas de color verde. Y en la segunda columna el niño tiene que cambiar el color de las figuras anteriores según el color que se le indica en la parte superior de la cartulina. Por ejemplo, si arriba aparece el color naranja, en la segunda columna tiene que haber las mismas siluetas que en la primera columna pero transformadas en color naranja.

Duración actividad: 10 min.

Cierre actividad: Se ordenan las formas y se guardan juntas las que tengan la misma forma.

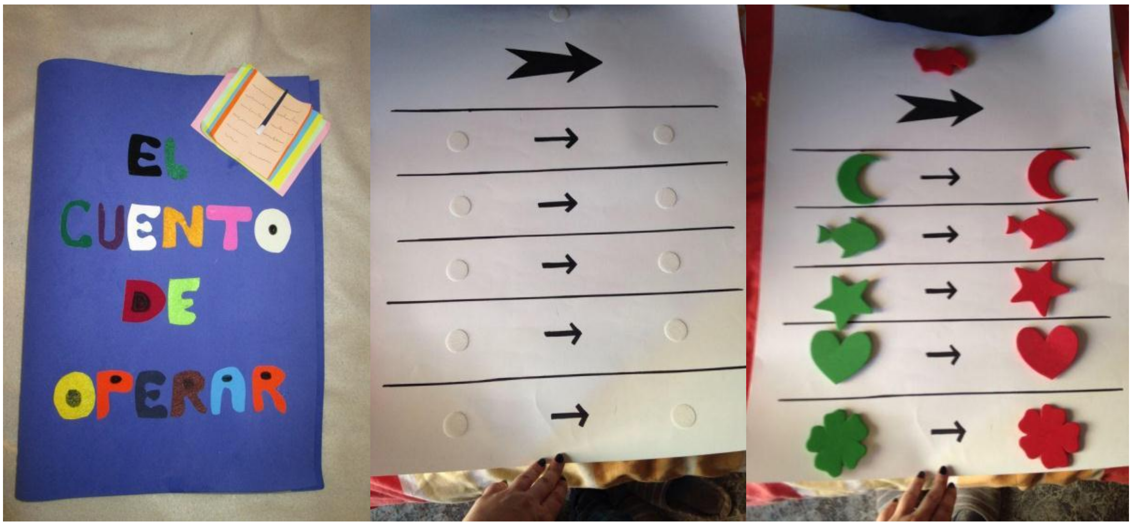


Figura 2: El cuento de operar

MATERIALES DEL TALLER DE MATEMÁTICAS

Utilizando los recursos disponibles en el taller de matemáticas de la Facultad de Educación y Trabajo Social de Valladolid, se llevaron a cabo actividades con los materiales didácticos, juegos disponibles en el taller y actividades encaminadas al aprendizaje de las diferentes herramientas de la PDI y su manejo eficaz, además se programaron búsquedas de portales educativos de Internet de interés:

http://www.udg.edu/tabid/17145/language/ca-ES/Default.aspx

Ejemplo de juego planteado con el material del taller destinado a niños y niñas de segundo de educación infantil:

Juego de las mariposas

Competencias matemáticas: Asociación de número a cantidad, ubicadores espaciales: izquierda derecha arriba y abajo, discriminación de los colores, comprensión de las reglas del juego, observación de estas reglas, disposición para hablar y capacidad para expresar las acciones realizadas.

Material: Cuatro tableros con una mariposa en la que aparecen desde un punto a seis puntos en distintas partes: cabeza, cuerpo, alas. Y un punto externo que indica el color de las fichas a colocar. Las configuraciones de los puntos son distintas en cada tablero. Un dado, fichas pequeñas de colores: azul, verde, rojo y amarillo.

Metodología (reglas del juego)**:** Cada jugador recibe una mariposa. Un punto en color sobre el tablero indica el color de las fichas que debe coger para cubrir los puntos de la mariposa. Todas las fichas pequeñas están sobre la mesa. Los jugadores tiran por turnos el dado. Con un número de fichas igual que el número de los puntos que sale en el dado, se cubre el ala, la cabeza o el cuerpo de la correspondiente mariposa. Es importante que el niño exprese con palabras lo que hace, por ejemplo, "coloco cuatro fichas azules sobre el ala superior izquierda de la mariposa". Si al jugador le sale un número de puntos que ya está cubierto, deja de jugar una vuelta. Gana el jugador que cubre primero su mariposa.

Figura 3: El juego de las mariposas

Duración actividad: 15 min.

Cierre actividad: Se ordenan los materiales del juego realizando una clasificación en su caja.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Otro de los aspectos que hemos considerado en las clases prácticas es el enfoque de resolución de problemas. Se puede considerar como el sinónimo de "aprender haciendo". Se proporcionaban ejercicios y problemas con tiempo suficiente y se resolvían en la clase para desarrollar el razonamiento y romper las barreras de etapas educativas anteriores.

Según G. Polya (1992, p. 5): "*Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello*"

Compartimos la opinión de Alsina (2006) que defiende que si al profesorado le gustan las matemáticas en general y los problemas en particular, todo ello se transmite y los niños disfrutarán también haciéndose preguntas y buscando soluciones. Sin embargo, cuando el maestro tiene miedo, no responde a las preguntas y le cuesta gestionar bien la clase se cierran puertas para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático del alumno. La escuela está obligada a abrir nuevos caminos, que, además, ayudarán a que los niños y niñas sean cada vez más autónomos.

TRABAJOS COLABORATIVOS

Una parte importante de la asignatura consistió en la realización de trabajos por equipos con los siguientes títulos: Las matemáticas de los cuentos y las canciones. Lógica en Educación Infantil. Los números y el cálculo en Educación Infantil. La geometría en Educación Infantil.

A cada grupo se le proporcionó un esquema posible de trabajo teórico- práctico con varias fases que se especifican a continuación. En primer lugar, una pequeña introducción de los conceptos matemáticos que se van a trabajar en cada caso. Después los estudiantes deben aportar propuestas didácticas para el aula de Infantil basadas en prácticas con materiales didácticos, juegos, selección de recursos…En esta fase la profesora proporciona bibliografía recomendada sobre investigación en Educación Matemática Infantil y su aplicación a la realidad escolar, que el alumnado completará añadiendo lo que considere oportuno, así como webgrafía. Como tercera fase el trabajo, además de por escrito, es expuesto por los alumnos al resto de los compañeros y compañeras. Tras la exposición, se produce un debate entre todo el alumnado centrado en una valoración del trabajo expuesto, aspectos que más atención han suscitado, aportaciones más novedosas y orientaciones para mejorar. El resultado es que muchos grupos diseñan materiales propios e inventan juegos. La evaluación del trabajo tiene en cuenta la creatividad y la exposición al resto de la clase.

Figura 4: Alumna presentando uno de los trabajos

Se grabaron todas las actividades didácticas presentadas, los juegos en los que participó toda la clase y los materiales diseñados por todos los estudiantes. Se hicieron fotos de las presentaciones. A final de curso se entregó un DVD a cada grupo de trabajo, ya que se considera muy importante para su futura labor docente que el alumnado sea consciente de cómo ha realizado la exposición en público ante sus compañeros, sirviendo su análisis para mejorar sus competencias profesionales.

Figura 5: DVDs entregados a los grupos de trabajo

A continuación vamos a presentar algunos resultados en forma gráfica que muestran por sí mismos el trabajo desarrollado por los alumnos. Fueron numerosos y de alta calidad. Exponemos tres ejemplos: Un trabajo previo para interiorizar el trazado de los números (figura 6), un juego inventado para trabajar los números con preguntas y respuestas (figura 7) y un sudoku realizado con cartones para trabajar las formas geométricas (figura 8).

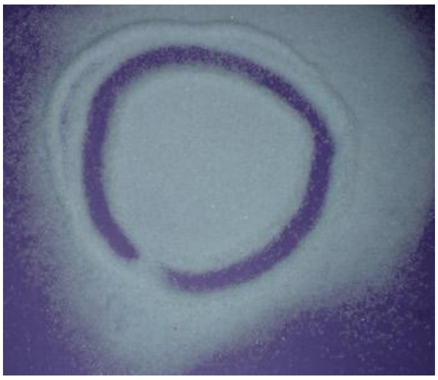


Figura 6: Pintar con el dedo

Figura 7: Juego de números

Figura 8: Sudoku de formas

Ejemplo de actividad interactiva creada por los estudiantes para trabajar la lógica**:**

http://maniatic-gamer.wix.com/elmundodelalogica#!

CONCLUSIONES

Finalmente, se evaluaron las experiencias tanto individuales como grupales, y se completó el proceso evaluativo con la realización de una prueba final escrita.

El objetivo principal que se pretendía lograr con esta metodología activa y participativa era hacer que el alumnado disfrutara "haciendo matemáticas" y perdiera el miedo hacia ellas. Para comprobar y ratificar en qué medida se ha cumplido este objetivo, durante el curso siguiente hemos realizado varias entrevistas a estudiantes voluntarios. A modo de ilustración recogemos a continuación las respuestas proporcionadas por los futuros maestros a una de las preguntas:

P: ¿Te parece que ha aumentado tu interés por las matemáticas después de la experiencia del curso pasado?

R_1: Sí porque por la metodología de la profesora hizo que yo perdiera el miedo a las matemáticas ya que a ella le gustaba explicarlo y las prácticas en el taller fueron interesantes.

R_2: Sí porque la metodología era activa, participábamos mucho en las tareas en el aula y me parece importante que manejásemos todo el material que había en el taller de matemáticas. Siempre me gustaron las matemáticas, pero ahora me gustan más.

R_3: Sí porque las prácticas que realizamos con la profesora (en cuanto a conocimiento de materiales didácticos, textos educativos, usos de la PDI) me abrieron multitud de posibilidades en cuanto a formas de poder trabajar las matemáticas en educación Infantil y eso hizo que cambiara mi forma de pensar en cuanto al aprendizaje. Ahora es más dinámico y cuando yo era pequeña era más rígido y sobre todo se rellenaban fichas.

R_4: Sí porque siempre me han enseñado matemáticas de una forma más abstracta sin aplicación para la vida cotidiana y en las clases tanto la teoría como las actividades prácticas estaban enfocadas a nuestra futura práctica docente.

R_5: Sí porque aunque siempre me han gustado las matemáticas la metodología variada, motivadora y participativa me ayudó a aumentar mi interés. Me gustaría haber vivido en mi primer contacto con las matemáticas la experiencia que creo que voy a poder llevar a cabo en el aula con los niños en mi futuro desarrollo profesional.

R_6: Sí porque al principio pensaba que las matemáticas en este nivel se reducían a enseñarles los números y las formas geométricas básicas. Gracias a la metodología llevada en el aula me ha dado cuenta de que debemos fomentar la autonomía intelectual ya desde pequeños. Me gustó mucho conocer la variedad de recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas anteriormente desconocidos. Los trabajos realizados en grupo nos sirvieron para profundizar en un tema y darnos cuenta de las distintas metodologías que se pueden llevar a cabo para el trabajo con los niños. Al final del curso se nos entregó un DVD con las exposiciones de cada grupo. Me ayudó a reflexionar sobre la manera de actuar en público.

R_7: Aunque siempre he tenido interés por las matemáticas lo que me ha aportado esta asignatura es que he aprendido cómo se debe trabajar con los niños gracias a los recursos utilizados por el docente y mi participación activa en el aula tanto en la resolución de problemas como en todo lo demás.

R_8: Sí, previamente ya me gustaban pero con la metodología llevada a cabo siento más interés por aprender dicha asignatura. Se reforzaba la teoría con prácticas de aula, ya que en otras asignaturas no se concretaba tanto en dichas prácticas.

R_9: A mí no me gustaban las matemáticas porque no les veía utilidad en la vida diaria y a través de esta asignatura he perdido el miedo y he visto las posibilidades de aplicación que tienen las matemáticas tanto en la vida diaria de los adultos como en la de los niños.

R_{10}: Nunca me han gustado las matemáticas porque al empezar la Educación secundaria obligatoria no entendía nada y aunque siguen sin gustarme he comprendido la importancia que tienen en la vida cotidiana. A pesar de eso yo no voy a trasmitir mi miedo a las matemáticas a los niños porque he aprendido a trabajarlas desde otra perspectiva con muchos recursos y me siento motivada para ello.

A juzgar por los resultados de las evaluaciones de los aprendizajes, y las respuestas aportadas por los estudiantes en la entrevista, podemos afirmar haber conseguido un avance notable en el logro de nuestro objetivo inicial. El alumnado ha comenzado a vivir y a detectar las matemáticas en muchos aspectos de su vida diaria comprobando su utilidad y su necesidad pero siendo conscientes de que las matemáticas son una ciencia con rigor y abstracción. También han descubierto que se pueden trabajar de muchas formas, que no se reducen al estudio de los números en este nivel educativo y que tienen una contribución fundamental al desarrollo de la autonomía intelectual.

Compartimos y hemos comprobado experimentalmente la opinión de Sarabia e Iriarte (2011) y afirmamos que existe una relación muy importante entre las actitudes de los alumnos y los logros en matemáticas, ya que los buenos resultados conseguidos por los alumnos en la evaluación de la asignatura han venido acompañados de muchas afirmaciones relacionadas con la pérdida de los miedos causados por experiencias negativas anteriores. Esta experiencia les ha hecho reflexionar sobre cómo se debe trabajar en Educación Matemática Infantil para lograr que este primer contacto formal que tienen los niños con las matemáticas sea positivo.

Agradecimientos

Agradezco a Matías Arce Sánchez, compañero de Departamento, por sus comentarios al texto, y sobre todo a todos los estudiantes del grado de Educación Infantil por sus ganas de aprender y por su creatividad. Nosotros también aprendemos mucho con nuestro alumnado. Se trata de avanzar juntos en algo tan importante como la Educación de los más pequeños.

Referencias

Alsina, A. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona: Octaedro-Eumo.

Alsina, A (2011). *Educación matemática en su contexto*. Barcelona: Horsori.

Antón Rosera, M. y otros (2004). *Educación Infantil. Orientaciones y recursos*. Barcelona: Praxis.

Canals, M.A. (1992*). Per una didàctica de la matemàtica a l'escola*. Vic: Eumo Editorial.

Cazcarro Castellano, I. y Martínez Caraballo, N. (2011). La grabación en vídeo en el aula como herramienta de mejora de la competencia de la comunicación oral. *Educatio siglo XXI*, Vol. 29 nº 2, pp. 255-282.

Polya, G. (1992). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Sarabia Liaño, A. e Iriarte Redín, C. (2011). *El aprendizaje de las matemáticas: ¿Qué actitudes, creencias y emociones despierta esta materia en los alumnos?* Navarra: Eunsa.

Vidal Raméntol, S. (2010). La comunicación en la didáctica de las matemáticas. *Vivat Academia*, nº 112, pp.1-9. Descargado de: http://www.ucm.es/info/vivataca/numeros/n112/DATOSS.htm, el 7 de octubre de 2014.

Fuentes electrónicas

Gabinete de Materiales y de Investigación para la Matemática en la Escuela consultado por última vez 23-10-2014 en http://www.udg.edu/tabid/17145/language/ca-ES/Default.aspx

Ejemplo de actividad interactiva creada por los estudiantes para trabajar la lógica consultado por el última vez 23-10-2014 en http://maniatic-gamer.wix.com/elmundodelalogica#!

Para hacer referencia al artículo

Novo, M.L. (2015). Matemáticas "Educa-activas" desde la Facultad de Educación. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 479-489). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

EL DOMINÓ PARA APRENDER MATEMÁTICAS.

Sánchez Barbero, B.[a], Chamoso Sánchez, J.Mª.[a], Cáceres García, Mª. J.[b] y Rodríguez Sánchez, Mª. M.[a]

[a]Departamento Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales (Universidad de Salamanca)y
[b]Departamento Didáctica de las Ciencias Experimentales y Matemáticas (Universidad de Extremadura)

Resumen

Cualquier instrumento cotidiano puede servir como un instrumento para experimentar matemáticas. En este caso, se considera el dominó, algo usual y de fácil acceso, que puede proporcionar oportunidades para motivar y, a la vez, conseguir aprender matemáticas de manera significativa y en diferentes sentidos.

Se propone una metodología activa utilizando el dominó, que se puede adaptar a diferentes niveles educativos (Infantil, Primaria, Secundaria y formación del profesorado) y con el que se pueden realizar actividades diversas de distinto nivel de dificultad, tipología y desarrollo tanto de números, geometría, medida, patrones y organización de la información, como comprensión de principios matemáticos, tales como el de inducción.

Palabras clave: *dominó, didáctica matemática, material didáctico, juegos matemáticos.*

INTRODUCCIÓN

Las recomendaciones más insistentes para mejorar la Educación Matemática enfatizan la necesidad de un cambio en cuanto a la forma en que se enseñan y aprenden las Matemáticas en los centros de enseñanza (por ejemplo, NCTM, 2000). Este cambio va dirigido, fundamentalmente, a que los estudiantes sean participantes activos en la construcción del conocimiento, capaces de trabajar en equipo, de investigar, discutir y validar. Para ello el profesor debe facilitar ese aprendizaje en diferentes sentidos como proporcionar instrumentos para el desarrollo de actividades motivadoras que permitan, a los estudiantes, la exploración, experimentación y realización de conjeturas cuando trabajan en forma de resolución de problemas mientras interactúan entre ellos.

Una posibilidad es por medio del juego (Chamoso y Durán, 2002). El juego es un elemento motivador que permite potenciar la reflexión de los alumnos para construir matemáticas. Según Piaget (1985, p. 20),

> los juegos ayudan a construir una amplia red de dispositivos que permiten al niño la asimilación total de la realidad, incorporándola para revivirla, dominarla, comprenderla y compensarla. De tal modo que el juego es esencialmente de asimilación de la realidad por el yo.

Los juegos son actividades libres pero exigen el respeto de una serie de normas o reglas.

> ¿Dónde termina el juego y dónde comienza la matemática seria? Una pregunta capciosa que admite múltiples respuestas. Para muchos de los que ven la matemática desde fuera, ésta, normalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego. En cambio, para los más de entre los matemáticos, la matemática nunca deja totalmente de ser un juego, aunque además de ello pueda ser muchas otras cosas (Guzmán, 1988, pp. 23-24).

En este trabajo se va a utilizar el dominó clásico. Se trata de un juego de mesa accesible por su popularidad y bajo coste. Está formado por 28 fichas dobles rectangulares, divididas en dos cuadrados, cada uno de las cuales lleva marcados de cero a seis puntos sin que se repita ninguna ficha (González, 2010). Se pretende llevar el dominó al aula de matemáticas con una metodología que obligue al alumno a participar en la construcción del conocimiento.

ALGUNAS POSIBILIDADES DEL DOMINÓ

A continuación se presentan, organizadas, algunas de las muchas posibilidades con las cuales se pueden utilizar el dominó en el aula de matemáticas (más detalle, Chamoso, Graña, Rodríguez, y Zárate, 2005):

Organizar la información

En la mesa hay 25 fichas de dominó. Faltan 3 para que estén las 28 necesarias para jugar. ¿Cuáles son? Organiza las fichas de dominó que hay utilizando el criterio que te parezca para descubrir las que faltan. Explica el criterio que has elegido.

Buscar patrones

a) Calcula la suma de los puntos de cada una de las fichas de dominó y escribe cada resultado en el cuadrado correspondiente siguiendo la organización que has decidido anteriormente. Por ejemplo:

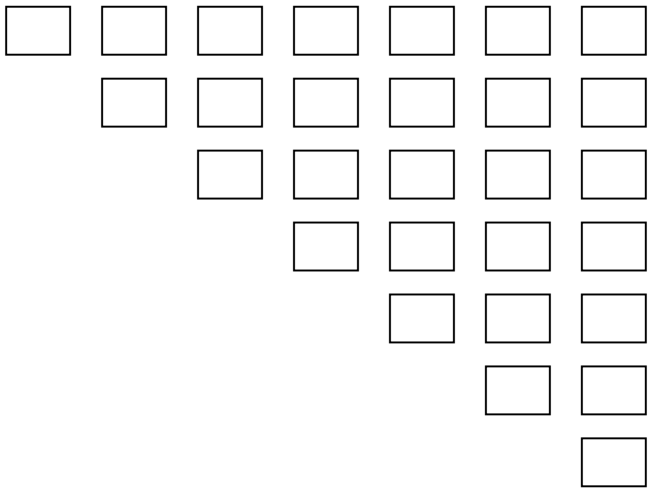


Figura 23. Plantilla para la búsqueda de patrones

Observa si se producen regularidades en los números que se han obtenido mirando los números de las filas horizontalmente, verticalmente y en diagonal en diferentes sentidos y con distinta inclinación.

b) Realiza la sustracción de los puntos de cada una de las fichas de dominó, el mayor menos el menor, y escribe cada resultado en el cuadrado correspondiente siguiendo la organización que decidiste.

Observa si se producen regularidades en los números que se han obtenido mirando los números de las filas horizontalmente, verticalmente y en diagonal en diferentes sentidos y con distinta inclinación.

c) Halla el producto de los puntos de cada una de las fichas de dominó y escribe cada resultado en el cuadrado correspondiente siguiendo tu organización.

Observa si se producen regularidades en los números que se han obtenido mirando los números de las filas horizontalmente, verticalmente y en diagonal en diferentes sentidos y con distinta inclinación.

d) Establece tu propio criterio para rellenar los cuadrados. Por ejemplo, escribe en cada cuadrado el cociente de la división entre el número mayor de los puntos de cada ficha de dominó y el número menor de la misma ficha, olvidando el resto de la operación que resulta.

Observa si se producen regularidades en los números que se han obtenido mirando los números de las filas horizontalmente, verticalmente y en diagonal en diferentes sentidos y con distinta inclinación.

Realizar operaciones

a) Observa que se pueden ordenar tres fichas de dominó de manera que se obtenga una adición correcta, es decir, los números de la ficha de abajo sea el resultado de la suma de los números de las de arriba. Por ejemplo 32 + 11 = 43

3	2
1	1
4	3

Figura 2. Ejemplo de realización de suma

¿Te atreves a conseguir una de 9 sumandos?

Figura 3. Plantilla para la búsqueda de suma con nueve sumandos

b) Utilizando todas las fichas de dominó, excluyendo la blanca doble, se pueden ordenar en 3 filas de 9 columnas de manera que la ficha de debajo de cada columna sea el resultado de sumar los puntos de las fichas que están por encima de él. Por ejemplo**:**

4	1	4	4	2	2	3	1	4	2	5	2	6	0	1	5	2	3
1	2	1	0	3	3	3	0	2	0	1	1	0	4	5	0	4	3
5	3	5	4	5	5	6	1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6

Figura 4. Ejemplo de sumas completas

¿Eres capaz de encontrar otras posibilidades?

Figura 5. Plantilla para la búsqueda de sumas completas

c) También se pueden ordenar tres fichas de dominó de manera que se obtenga una sustracción correcta, es decir, los números de la ficha de abajo sea el resultado de la diferencia entre los números de las de arriba. Por ejemplo 32 - 11 = 21

3	2
1	1
2	1

Figura 6. Ejemplo de realización de resta.

Intenta encontrar otros ejemplos:

Figura 7. Plantilla para la búsqueda de restas

d) Ampliando el número de fichas se pueden conseguir números de más de dos cifras para realizar sustracciones. Por ejemplo:

3	2	4	3	6	4
1	1	3	3	4	4
2	1	1	0	2	0

Figura 8. Ejemplo de restas con más de dos cifras

Ahora inténtalo tú:

Figura 9. Plantilla para la búsqueda de restas con más de dos cifras

¿Es posible conseguir una sustracción utilizando las 27 fichas de dominó excluyendo la blanca doble? Inténtalo.

Figura 10. Plantilla para la búsqueda de la resta con 27 fichas

e) También se pueden ordenar tres fichas de dominó de manera que se obtenga una multiplicación correcta, es decir, los números de la ficha de abajo sea el resultado del producto de los números de las de arriba. Por ejemplo 21 x 03 = 63

2	1
0	3
6	3

Figura 241. Ejemplo de realización multiplicación

Intenta encontrar otros ejemplos.

f) ¿Sería posible ordenar tres fichas de dominó de manera que una de ellas sea el cociente de las otras dos? Por ejemplo 42 : 02 = 21

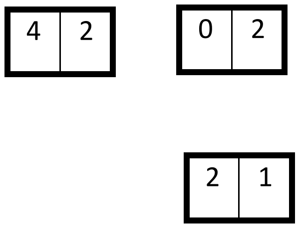


Figura 252. Ejemplo de realización de división

Intenta encontrar otros ejemplos.

Realizar operaciones de otra forma

Observa cómo se pueden ordenar 5 fichas de dominó en forma de puente de manera que la suma de los puntos de los dos pilares y la de la arcada sean, en ambos casos, 5. Para ello ten en cuenta las normas del juego, es decir, que dos fichas consecutivas tengan el mismo número de puntos en los cuadros de contacto.

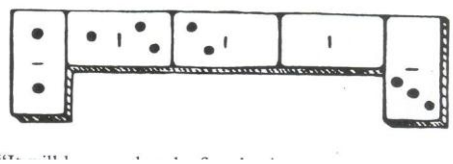
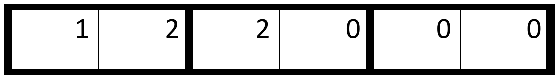


Figura 263. Ejemplo de puente

Observa:



1 + 2 + 2 + 0 + 0 +0 = 5

1 +1 + 0 + 3 = 5

Figura 274. Comprobación del cálculo del ejemplo del puente

Intenta encontrar otras posibilidades:

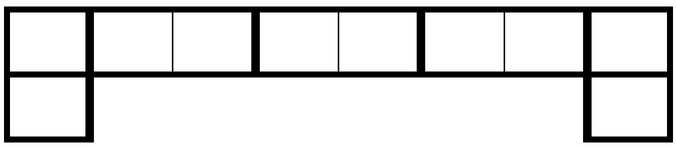


Figura 285. Plantilla para la búsqueda de más posibilidades

Haz lo mismo pero ahora trata de conseguir 6. Es decir, ordena 5 fichas de dominó en forma de puente de manera que la suma de los puntos de los dos pilares y los de la arcada sean 6, en ambos casos, teniendo en cuenta las normas del juego, es decir, que dos fichas consecutivas tengan el mismo número de puntos en los cuadros de contacto.

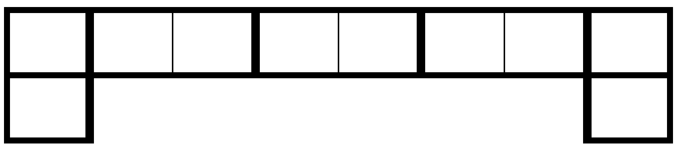


Figura 296. Plantilla para la búsqueda de más posibilidades

Ahora ordena 5 fichas de dominó en forma de puente de manera que la suma de los puntos de los dos pilares y la de la arcada sean, en ambos casos, el mismo número teniendo en cuenta las normas del juego, es decir, que dos fichas consecutivas tengan el mismo número de puntos en los cuadros de contacto.

Cuadrados mágicos

Observa que el siguiente cuadrado que está formado por 4 fichas de dominó es un cuadrado mágico, entendiéndose con ello que la suma de los puntos que hay en cada uno de los lados del cuadrado siempre valga lo mismo.

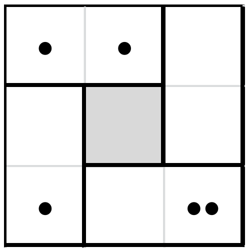


Figura 307. Ejemplo de cuadrado mágico

Intenta hacer lo mismo:

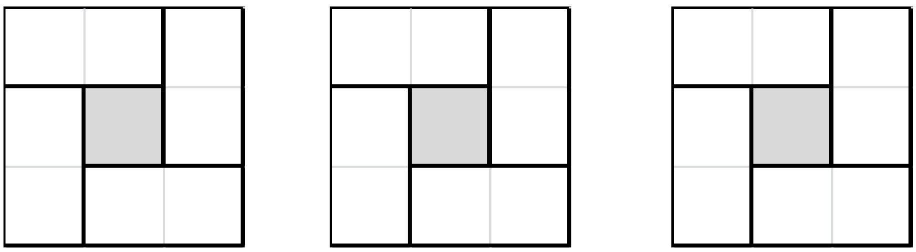


Figura 318. Plantilla para la búsqueda de cuadrados mágicos

Ahora, intenta hacer lo mismo en cuadrados mayores como los siguientes:

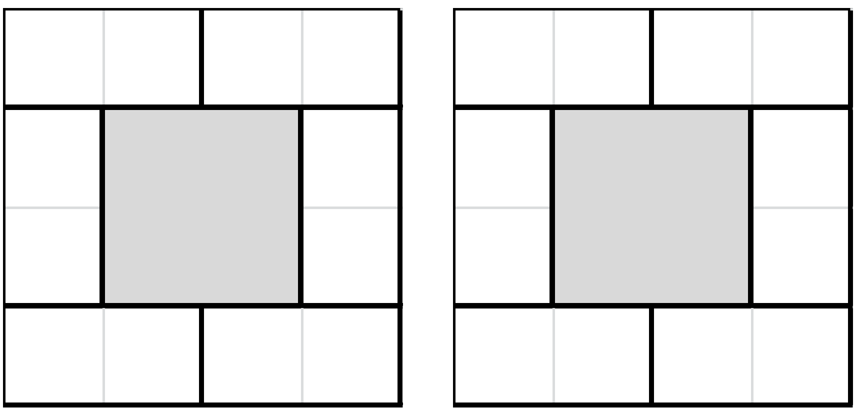


Figura 329. Plantilla para la búsqueda de cuadrados mágicos

Investigar

Coloca todas las fichas de dominó que puedas de manera que estén encadenadas como en el juego del dominó, es decir, que las caras que están en contacto deben tener los mismos puntos.

Sería correcto:

No sería correcto:

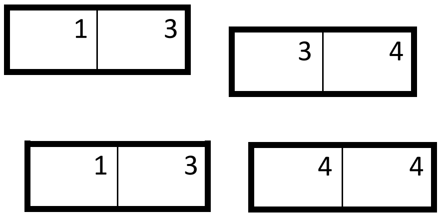


Figura 20. Ejemplo de fichas encadenadas

¿Serías capaz de hacerla en forma de 8? ¿Serías capaz de hacerla la más grande posible? ¿Y la más pequeña posible?

Resolver problemas

Este rectángulo 3x4 está formado por fichas de dominó, unas en posición vertical y otras en horizontal. Observa cómo está situada cada una de ellas.

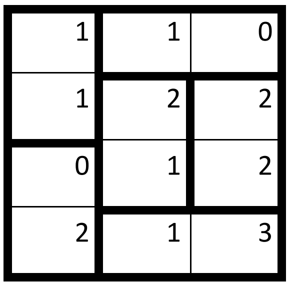


Figura 21. Ejemplo para descubrir la colocación de las fichas

Intenta descubrir cómo están colocadas las fichas de dominó en este caso:

2	3	2	4	0	5	5	6
3	3	6	4	1	1	5	5
6	6	0	0	6	3	4	5
6	0	4	2	0	4	2	5
1	5	6	3	4	4	4	2
2	0	2	2	5	3	1	1
0	3	1	6	1	1	0	3

Figura 22.Plantilla para descubrir la colocación de las fichas

Triángulo de Tartaglia

Coloca las fichas de dominó en vertical y entiende cada una de ellas como si fuera un número combinatorio. Coloca las adecuadas para formar el triángulo de Tartaglia.

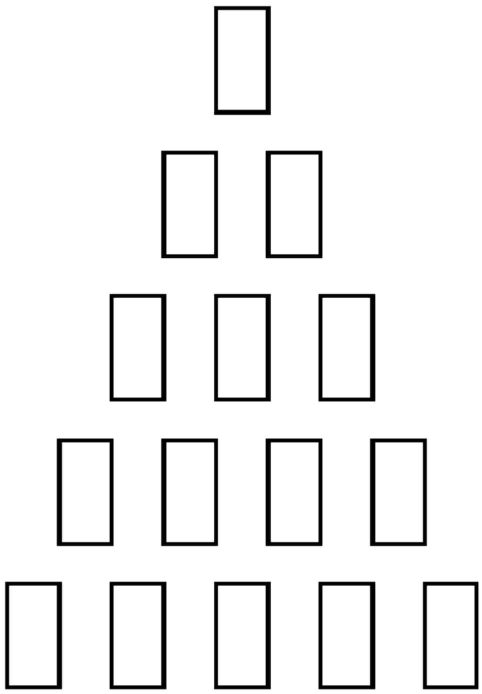


Figura 23. Disposición de las fichas en el triángulo de Tartaglia

Descubrir Fibonacci

Observa que la longitud de cada ficha de dominó es doble que su anchura. Eso permite colocar las fichas de dominó de diferente forma. Por ejemplo, una sola ficha de dominó tiene una única forma de colocarla. En cambio, dos fichas tienen dos formas. Con tres fichas habrá tres posibilidades si se pretenden colocarlas para formar rectángulos con un lado de largo el de una de ellas y el otro variando en los diferentes casos.

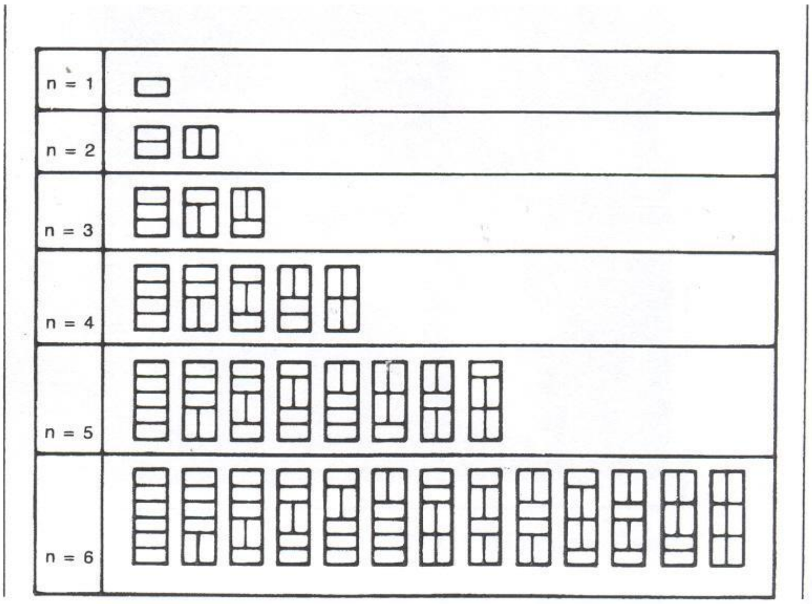


Figura 24. Disposición de las fichas para descubrir Fibonacci

Calcula los casos que faltan.

Observa la sucesión que ha salido. Cada término se construye a partir de la suma de los dos anteriores: 1, 2, 3, 5, 8, 13... Es la sucesión de Fibonacci.

Entender el principio de inducción

Coloca una hilera de fichas de pie sobre sus bordes más pequeños, cada una separada de la siguiente por una distancia menor que la longitud del lado mayor. Entonces, si cae la primera de la fila, se derrumbarán todas pero, si no lo hace y cae la situada en el lugar 6º, o en el 1000º, se desplomarán las situadas a continuación de ella.

Fíjate que se dan dos condiciones:

1. Cada ficha está situada a una distancia de la posterior de manera que, si cae, también arrastrará a la siguiente. Eso ocurre con todas las fichas.
2. Es necesario que caiga una ficha para que arrastre a la posterior y ésta, a su vez, derrumbe a la siguiente, y así sucesivamente. Entonces, con que caiga una cualquiera, lo harán todas las que están detrás.

Esas dos condiciones son la base de un principio matemático, el principio de inducción completa, que permite pasar de un número finito de pasos a uno infinito.

Proponer problemas imposibles

Considera un tablero de ajedrez. Observa que tiene 64 casillas. Intenta completarlo con fichas de dominó. Es sencillo hacerlo con 32 fichas.

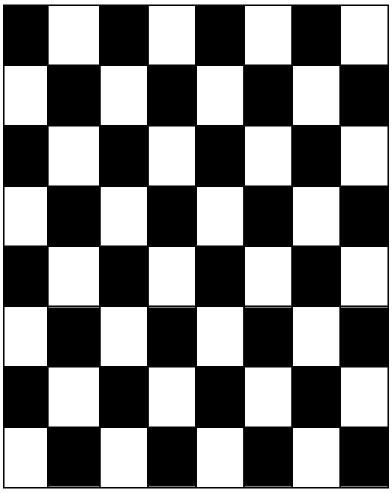


Figura 25. Tablero de ajedrez

Supongamos que ahora se eliminan el vértice superior izquierdo del tablero de ajedrez y el vértice inferior derecho de un tablero de ajedrez. Intenta completar este nuevo tablero con 31 fichas de dominó. Comprobarás que es imposible.

EXPERIMENTACIÓN

Contexto:

El dominó se experimentó en diferentes ocasiones y con diferentes objetivos en formación de docentes de Primaria, tanto con futuros docentes como con docentes en ejercicio, en España, México y Venezuela.

Objetivo:

El objetivo fue descubrir cómo, algo tan usual, conocido, económico y al alcance de cualquier persona como el dominó, permite una gran cantidad de posibilidades para aprender matemáticas. Además, que experimentar con el dominó permite que los estudiantes consigan soluciones no previstas y sugieran nuevas posibilidades para utilizarlo en las clases de Primaria.

Actividades:

Las actividades variaron dependiendo del contexto y los objetivos de la sesión, utilizando contenidos matemáticos desde numeración y organización de la información, hasta geometría o explicaciones de conceptos matemáticos, incluyendo patrones y probabilidad.

Procedimiento:

El desarrollo de una sesión normal trabajando el dominó fue, usualmente, trabajo en grupos de unos 4 estudiantes y una puesta en común al final de cada una de las actividades realizadas.

Valoración del desarrollo de las sesiones:

En general, los alumnos se encontraron muy motivados y se dieron cuenta de que un juego tradicional y conocido como el dominó puede convertirse en un recurso motivador para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de actividades lúdicas. Algunas actividades como, por ejemplo, la de organización de la información, permitió que los estudiantes sugirieran soluciones imprevistas, algunas de las cuales posibilitaron la utilización de los números enteros. Ello hizo que se convirtiera en una actividad abierta lo que conlleva que el profesor no conozca previamente ni la solución ni el procedimiento de resolución, lo que puede ser un estímulo para el docente pero también una responsabilidad para poder responder adecuadamente a las diversas propuestas que surjan. Algunos de los grupos, mientras trabajaban matemáticas con el dominó, inventaron otras actividades entre las que se incluyen algunas relacionadas con geometría o probabilidad.

Se trabajaron contenidos matemáticos muy diversos donde surgieron aspectos de especial interés como la importancia de la verbalización de la respuesta, el descubrir distintos caminos para encontrar la solución, realizar conjeturas, y comprobar y revisar el resultado. Además fue patente el estímulo por obtener la solución a la vez que la necesidad de saber comportarse en grupo y respetar a los demás.

Analizando las respuestas dadas por los estudiantes por escrito al final de una de las sesiones, consideraron que se trata de una actividad entretenida, con la que poder trabajar diferentes contenidos matemáticos dependiendo del nivel académico en el que se considere, de diferentes niveles de dificultad y que se puede llevar a cabo trabajando fundamentalmente en grupos reducidos: "*Es una actividad entretenida que activa la coordinación en equipo y con la que se puede trabajar diferentes contenidos matemáticos dependiendo del nivel académico en el que nos encontremos*". "*Llama la atención cómo una vez organizadas las fichas se pueden sacar numerosas conclusiones, que sirven para poder introducir la teoría o poder explicar en el aula esos conceptos. En definitiva, ver cómo con un juego tan tradicional podemos trabajar las matemáticas*". "*La aplicación en el aula es viable, siempre y cuando se realicen los ejercicios en grupos reducidos. Algunas de esas actividades son un poco complicadas aunque depende de en qué curso se trabajen*". "*Favorece el trabajo en equipo para la consecución de objetivos planteados con todo lo que ello conlleva, como cooperación, tolerancia, respecto, resolución de problemas…*"

CONCLUSIONES

El dominó no es más que uno de los muchos recursos que se pueden utilizar en el aula de matemáticas. Permite muchas posibilidades como, por ejemplo, proponer actividades motivadoras, de diferentes niveles de dificultad y abiertas. No sólo desarrolla competencias matemáticas en diferentes sentidos sino también puede hacerlo con otras relacionadas con el trabajo en equipo como cooperación, tolerancia y respecto. Para ello es fundamental el trabajo del profesor y la forma en que utilice el dominó en el aula para cumplir los objetivos que pretenda. Cuando se ha experimentado, los alumnos estuvieron motivados y descubrieron que un juego tradicional como el dominó puede convertirse en un recurso para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En definitiva, el dominó puede ser un instrumento que permita desarrollar una metodología activa, motivadora y en la que el estudiante construya el conocimiento.

Ello abre caminos a otras posibilidades futuras que permitan descubrir otros recursos cercanos, ya sean juegos, pasatiempos u otras cosas, que pueden ser instrumentos para enseñar y aprender matemáticas de manera divertida sin olvidar la necesidad de planificar rigurosamente su utilización en el aula.

REFERENCIAS

Chamoso, J.M. y Durán, J. (2002). Algunos juegos para aprender Matemáticas. *Actas del VII Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática*, pp. 163-176. Ponferrada (León).

Chamoso, J.; Graña, B.; Rodríguez, M. y Zárate, J. (2005). *Matemáticas desde la prensa.* Colección Diálogos de Matemáticas. Madrid: Nivola

González Sanz, J. L. (2010). *El arte del dominó. Teoría y práctica.* Barcelona: Paidotribo.

Guzmán, M. (1988). *Aventuras matemáticas.* Barcelona: Labor.

N.C.T.M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Virginia: Reston, NCTM.

Piaget, J. (1985). *Seis estudios de psicología*. Barcelona: Planeta.

Para hacer referencia al artículo

Sánchez, B., Chamoso, J.Mª., Cáceres, Mª. J. y Rodríguez, Mª. M. (2015). El dominó para aprender Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 491-504). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

LAS MATEMÁTICAS EN PISA, MARCO TEÓRICO Y PREGUNTAS LIBERADAS

Luis Sanz San Miguel

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE)

Resumen

Desde el año 2000, primera edición, España participa en el programa de evaluación internacional de los estudiantes de quince años (PISA, Programme for de International Student Assessment) que coordina la OCDE. Tres son las áreas tradicionalmente evaluadas: lectura, matemáticas y ciencias y en cada edición una de ellas es objeto de evaluación principal. En 2012 ha sido matemáticas. PISA evalúa la competencia adquirida por los estudiantes en las áreas objeto de la evaluación. En particular, la competencia matemática en 2012 se desglosa en cuatro sub-áreas de contenido: cambio y relaciones, espacio y forma, cantidad e incertidumbre y datos. En esta comunicación se presentan las líneas generales del marco teórico sobre la que se basa la evaluación de la competencia matemática, junto con algunos ejemplos de preguntas liberadas, que muestran lo que se pretende valorar en estas pruebas.

Palabras clave: *PISA, competencia matemática, dominios de evaluación, procesos cognitivos, diseño del test, preguntas liberadas*.

EL MARCO TEÓRICO DE EVALUACIÓN DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

El marco de evaluación define lo que se pretende medir con la evaluación y cómo se va a medir. Ello incluye la descripción del programa de evaluación, la definición de la competencia matemática, la descripción de las variables, la guía para la construcción de las pruebas así como modelos de preguntas.

La competencia matemática, evaluada en PISA 2012 como área de evaluación principal, pretende medir el éxito con el que los estudiantes extrapolan lo que han aprendido aplicando sus conocimientos y destrezas a contextos particulares. Esta competencia se define como "**la capacidad de los estudiantes para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, datos, procedimientos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a las personas a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir juicios y decisiones bien fundamentadas que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos"**.

En la evaluación de 2012, PISA incluyó una evaluación de las matemáticas en soporte electrónico, opcional para los países participantes, que permite unas preguntas de evaluación más atractivas para los estudiantes, con más colorido y próximas a la experiencia cotidiana de los estudiantes de 15 años.

La evaluación de la competencia matemática en 2012 se desglosa en cuatro **sub-áreas** o **dominios** que abarcan los conocimientos que deben tener los estudiantes de 15 años de edad. La información que ofrecen los resultados de cada uno de estos cuatro dominios permite analizar en cuáles de ellas existe mayor margen de mejora y qué partes del currículo trabajado en las aulas se ha adaptado mejor o peor a la evaluación por competencias. Estos dominios son:

- **Cambio y relaciones.** Incluye expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones, representaciones tabulares, gráficas de datos estadísticos, medidas geométricas y relaciones entre longitudes de los lados de un triángulo.
- **Espacio y forma.** Incluye el reconocimiento de formas en diferentes representaciones y dimensiones, las posiciones relativas y las propiedades de objetos geométricos, la orientación espacial, la relación

.

entre formas e imágenes, la representación en dos dimensiones de objetos tridimensionales, la formación de las sombras y cómo interpretarlas y el concepto de perspectiva y su funcionamiento.

- **Cantidad.** Incluye el procesamiento y compresión de los números y el reconocimiento de regularidades numéricas, el uso de números para representar cantidades y atributos cuantificables de objetos del mundo real, La representación de los números en formas diferentes, la comprensión de las operaciones con números, el cálculo con números y la estimación y el cálculo mental.
- **Incertidumbre y datos.** Incluye conceptos de estadística y probabilidad, recogida de datos y reconocimiento de los errores de medida, el análisis y la presentación de datos, la interpretación y valoración de datos estadísticos y de situaciones de incertidumbre.

Los procesos matemáticos, **formular**, **emplear** e **interpretar,** ofrecen una estructura útil para organizar lo que hacen las personas cuando resuelven un problema situado en un determinado contexto, relacionándolo con las matemáticas:

- **Formular**. La formulación matemática de situaciones contextuales se refiere a la capacidad del individuo para reconocer e identificar las matemáticas presentes en dicha situación para, a continuación, asignar la estructura matemática al problema contextualizado.
- **Emplear**. Este término hace referencia a la capacidad de los estudiantes para aplicar conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos a la resolución de problemas previamente formulados con la finalidad de llegar a resultados coherentes.
- **Interpretar**. Se refiere a la capacidad del estudiante para reflexionar sobre el resultado obtenido e interpretarlo en el contexto real en el que se planteó la situación, incluyendo la aplicación y valoración de la solución alcanzada.

Las preguntas de las pruebas en PISA 2012 se insertan en contextos reales atendiendo a cuatro tipos: personal, social, profesional y científico y evalúan las capacidades matemáticas fundamentales: comunicación; representación; diseño de estrategias; matematización; razonamiento y argumentación; utilización de operaciones y lenguaje simbólico, formal y técnico; utilización de herramientas matemáticas

DISEÑO Y ELABORACIÓN DE LAS PRUEBAS

En soporte impreso, los instrumentos para la evaluación contienen material de matemáticas distribuido en nueve bloques de preguntas, cada bloque de 30 minutos de duración. De los nueve bloques, tres incluyen preguntas de enlace utilizadas en evaluaciones anteriores, cuatro son bloques estándar con preguntas nuevas y dos son bloques con preguntas “fáciles”, de nivel de dificultad muy bajo. La evaluación en España incluye los bloques de enlace y los bloques estándar.

Los bloques de preguntas se distribuyen en cuadernillos, siguiendo un diseño rotatorio. Cada cuadernillo consta de cuatro grupos de preguntas de matemáticas, de lectura y de ciencias. El tiempo total de la prueba es de 120 minutos, según el diseño que puede verse en la presentación.

Las preguntas se enmarcan en una situación (personal, social profesional o científica) mediante la presentación de un estímulo, que consiste en texto e imágenes. Texto extraído de anuncios, medios de comunicación, instrucciones, catálogos, carteles, diálogos, textos literarios o científicos, etc. Imágenes, provenientes de fotografías, dibujos, mapas, etc.

Y las respuestas a las preguntas pueden ser de elección múltiple, cerradas, abierta construida y abierta.

Para la selección de las preguntas que se incluyen en la evaluación se sigue un procedimiento en varios pasos:

- **Primer paso**: se genera un banco con un elevado número de ítems que cubren los diferentes niveles de la competencia matemática. Cada pregunta tiene su criterio de codificación, incluyendo graduación de la respuesta cuando proceda.
- **Segundo paso**: se revisa la calidad de los ítems, mediante pruebas prepiloto y piloto, que incluye la corrección de los defectos de redacción, el control de la adecuación de las respuestas previstas, la adaptación a los niveles previstos y su independencia de otros ítems, entre otros aspectos.
- **Tercer paso**: selección de los ítems, que tiene en cuenta la cobertura de las competencias objeto de evaluación, la presencia de todas las categorías de respuesta, que discriminen entre niveles de competencia, que no sean ni muy fáciles ni muy difíciles, que sean equiparables con otros modelos de pruebas,….
- **Cuarto paso**: aplicación en el estudio principal.

Numerosos ejemplos de preguntas de diferentes ediciones del estudio PISA se pueden encontrar en http://www.mecd.gob.es/inee/Recursos.html

Finalmente, señalar que el estudio PISA 2012 no solo proporciona información acerca de los resultados del aprendizaje en matemáticas, sino que además evalúa cómo influyen en el rendimiento delos estudiantes, aspectos relacionados con su contexto personal, familiar, etc., que se recogen en un cuestionario personal del alumno. Así, se tienen en cuenta factores tales como la actitud y la disposición hacia las matemáticas que pueden influir para que los estudiantes utilicen las matemáticas en su propio beneficio, ya sea este personal o social. También se miden variables que ayudan al análisis de la competencia matemática en distintos subgrupos de la población objeto de estudio: chicos y chicas, inmigrantes, nivel socioeconómico, etc.

Referencias

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2013). *Marcos y Pruebas de Evaluación de PISA 2012. Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. http://www.mecd.gob.es/inee/portada.html

OECD (2013). *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do. 4 vols. Paris: OECD.* www.pisa.oecd.org

OCDE (2012). *PISA 2009 Technical report. Paris OECD.* www.pisa.oecd.org.

Para hacer referencia a este artículo:

Sanz, L. (2015). Las matemáticas en PISA, marco teórico y preguntas liberadas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 505-507). Lugar: Academia de Artillería de Segovia

“MAT-EMOCIÓN”. UNA MIRADA AL DESARROLLO LÓGICO- MATEMÁTICO EN EDUCACIÓN INFANTIL DESDE UNA PERSPECTIVA EMOCIONAL

Beatriz Suárez Quijada

CEIP Pablo Picasso. Valladolid.

Resumen

Esta comunicación plantea intervenir en las aulas de Educación Infantil desde una perspectiva emocional, ofreciendo un modelo educativo activo en el que se dé respuesta al aprendizaje de las matemáticas a partir de actuaciones que aúnen vida y conocimiento, evitando la desconexión entre realidad y procesos cognitivos. La intervención temprana, desde las primeras etapas de escolaridad, es fundamental para adquirir estructuras o “andamiajes” que les servirán de instrumento consolidador para futuros conocimientos. Es por ello por lo que proponemos una idea de aula como espacio vital y de experiencias, “un laboratorio” en el que los niños y niñas sean los principales investigadores elaborando hipótesis y manifestando certezas a partir de su propia acción en conexión con la propia vida, relacionando emociones y experiencias significativas.

Palabras clave: emoción, matemáticas vivenciadas, vínculo, juego, pensamiento simbólico.

REFERENTES TEÓRICOS Y EXPERTOS.

“Piensa el sentimiento, siente el pensamiento” (Miguel de Unamuno 1907)

Partiendo de esta afirmación que manifiesta la relación entre emociones y procesos de aprendizaje y teniendo en cuenta la opinión experta que corrobora dicha reflexión, es preciso mencionar las investigaciones de Ledoux (1986) cuando afirma que “La emoción precede al pensamiento y la inteligencia queda marcada por ella” , así como las que fundamentan la evolución en estadios de los procesos mentales elaborada por Jean Piaget (1948) : “Las operaciones lógico matemáticas antes de ser una actitud puramente intelectual requieren de la construcción de estructuras internas y del manejo de ciertas nociones que son, ante todo, producto de la acción y relación del niño con objetos y sujetos” y la teoría de Howard Gardner (1983) en cuanto a la existencia de inteligencias múltiples: “La inteligencia no sólo se reduce a lo académico sino que es una combinación de todas las inteligencias. La lógico matemática es la que nos ocupa en esta comunicación.

En la actualidad el tratamiento del aprendizaje de las matemáticas tiene referentes clave que buscan metodologías más activas y cercana a los niños y niñas. Es el caso de Patricia Sadovsky que propone un modelo de enseñanza en el que docentes y alumnos interactúen de forma conjunta para adquirir conocimientos: “se necesita una generosa confluencia de miradas para que las producciones de quienes estudian y también de quienes actúan en la escuela puedan constituir aportes sustantivos a fin de elaborar estrategias de mejora” (Sadovsky 2014).

Un ejemplo de docente emocionalmente implicado y competente en la enseñanza de las matemáticas es Francisco Bellot, catedrático del instituto Emilio Ferrari de Valladolid y miembro del proyecto ESTALMAT para la detección y estímulo del talento precoz en matemáticas. Considera que esta disciplina está presente en la base de todas las demás ciencias. Para Bellot (2014) “Las matemáticas no consisten en hacer cuentas muy deprisa y sin equivocarse, si no que deben razonarse siguiendo los criterios de la lógica”.

Destacar también la figura de Jaime Escalante como docente implicado en la motivación de los alumnos. Aunque su trabajo se realizó en enseñanzas medias, es un ejemplo de docente apasionado y volcado en el desarrollo de la competencia matemática en todos los niveles sociales

Para terminar con las referencias que avalan esta comunicación y como homenaje al recientemente fallecido Leonardo Moledo, científico y matemático, citaré una frase que recoge todo el sentir de lo que creo que debe ser el tratamiento de las matemáticas en el aula y por ende, del proceso de desarrollo lógico: "Más que dar respuestas, hay que estimular las preguntas" (Moledo 2014).

LAS EXPERIENCIAS MATEMÁTICAS: EL AULA COMO LABORATORIO Y APRENDIZAJE DE VIDA.

En Educación infantil el desarrollo de la competencia matemática tiene en cuenta que los niños y niñas se encuentran en el estadio Preoperacional que abordó Piaget. Es la etapa del pensamiento y del lenguaje que gradúa su capacidad de pensar simbólicamente, imita objetos de conducta, juegos simbólicos, dibujos, imágenes mentales y el desarrollo del lenguaje hablado. Por ello la actuación en el aula debe tenerlo en cuenta y abordar los procesos desde esta perspectiva. Las propuestas que planteo en relación con el desarrollo de la competencia matemática, forman parte de un proceso vivenciado en el que se vincula la propia acción en situaciones cotidianas, con aspectos matemáticos que surgen de la propia interacción entre alumnos y los procesos que tiene lugar en el aula. En los siguientes apartados se desarrollan cada una de las propuestas o proyectos de innovación que han tenido lugar y que son objeto de la presente comunicación. Se han sucedido a lo largo de la escolaridad de niños y niñas durante el 2º ciclo de E. Infantil, correspondiendo a edades 3 y 6 años.

Los Proyectos de aula como parte de la metodología innovadora.

Matemáticas "a mi medida"

Deducciones acerca de la posibilidad de cuantificar algunos aspectos materiales o inmateriales, ¿Se puede medir el cariño, la alegría, la sorpresa? ¿Y la longitud de un libro o de la mesa? Juegos de ensayo-error.

Esta propuesta se construye a partir de una situación cotidiana que tiene lugar en el aula cuando una familia participa dentro de la actividad ofreciendo un material de medida, una regla graduada. Ésta sirve de vínculo para interactuar con el resto de objetos que forman parte del espacio escolar. En un principio la manejan para detenerse y observar cuál es su función. A partir de ahí comienzan a experimentar con el resto de objetos. Cuando comprenden que es un instrumento que les permite conocer si es grande o pequeño y que éste tiene símbolos numéricos, entonces elaboran diferentes hipótesis sobre longitudes y tamaños de sus propios materiales: mesas, armarios, la superficie del suelo…

No sólo establecen hipótesis sobre los diferentes objetos, sino que lo trasladan a su propio cuerpo midiendo distancias entre personas o sobre la medida de las diferentes partes de su anatomía: piernas, manos…

Estas certezas son extrapoladas a un tipo de pensamiento más abstracto: la medida de los sentimientos. Se les insta a reflexionar sobre si es posible medir aspectos emocionales como el cariño, la simpatía, el amor…ellos extraen conclusiones extraordinarias utilizando el método de medida que han manipulado y lo hacen interponiendo entre ellos la regla graduada. De esta experiencia afirman que es posible cuantificar "la medida de los sentimientos" a partir de la proximidad y de la distancia. Toda una filosofía…

Figura 1. La medida a partir de objetos materiales y de la propia identidad.

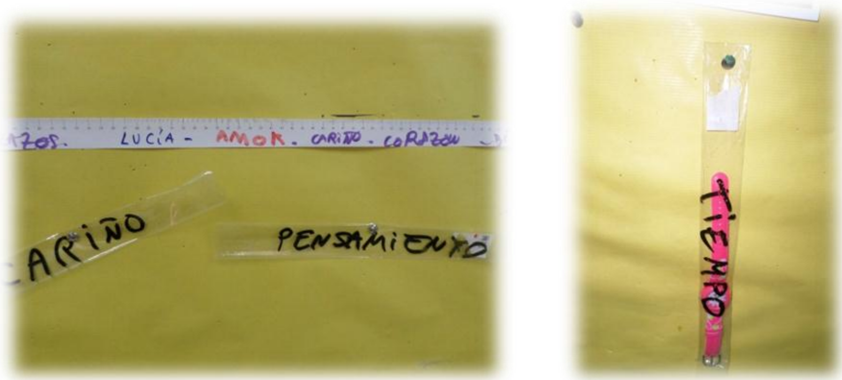


Figura 2. La Hipótesis ¿Se puede medir?

Las Matemáticas y su relación con el cuerpo humano.

Desde la propia individualidad es posible vincular los procesos matemáticos con situaciones vivenciadas: el cuerpo, su medida. Comparaciones entre pesos y tallas de los niños y niñas.

Procesos que se desarrollan a partir de la propia identidad corporal calculando su talla y medida a partir de balanzas y cintas métricas. Establecen comparaciones entre ellos y elaboran conclusiones sobre aspectos como mayor y menor. Lo vinculan a la edad cronológica: más peso y altura “mayor qué”. Incluso calculan la medida de un bebé en el seno materno utilizando cintas métricas y estableciendo comparaciones con otra persona en igual situación. Las familias se integran en la actividad y se ofrecen a mostrarnos ecografías en las que aparece la medida y peso de los niños que nacerán.

Figura 3.Experiencias de medida a partir de acontecimientos vitales.

Figura 4. Comparaciones entre los procesos vivenciados.

Matemáticas y métodos arqueológicos. La Excavación.

Otras experiencias matemáticas que se suceden en el aula es el desarrollo de intuiciones que se resuelven a partir de intereses de los alumnos y alumnas. En esta propuesta y con motivo de un tema que les resulta especialmente atractivo: La Prehistoria, se realiza en el aula una instalación que recrea una prospección arqueológica. Se utilizan métodos reales que forman parte de las excavaciones arqueológicas, como es la cuadriculación para acotar la superficie a estudiar.

Aparecen objetos enterrados que deben analizar a partir de su tamaño y medida. Para que la actividad sea más precisa se establece un cuadrante para localizar los hallazgos, dando lugar a la realización de un producto cartesiano que surge desde la intuición. Éste permite situar exactamente lo que han encontrado y elaborar hipótesis sobre su procedencia o localización. Es la matemática intuitiva propia del estadio mental en el que se encuentran los niños y niñas de Educación infantil.

Figura.5. La excavación arqueológica como proyecto de innovación. Métodos matemáticos para la investigación: la cuadriculación y acotamiento de una superficie para localizar hallazgos. Representación gráfica de uno de los alumnos (Carlos 5 años).

Figura 6. El producto cartesiano como recurso para localizar los objetos hallados.

Matemáticas y Land-art. Matemáticas del paisaje.

Identificación de formas geométricas en la naturaleza. Especialmente nos detendremos en la figura representativa de la espiral a partir de su identificación en objetos cotidianos.

Introducción a la secuencia de Fibonacci de forma sencilla: números y operaciones.

Teniendo en cuenta que las matemáticas son la propia vida, buscaremos referentes en la naturaleza que lo manifiesten. La figura de la espiral aparece en muchas de las formas cotidianas que nos muestra el paisaje. Las identificamos en experiencias que vivimos. En el aula descubren un fenómeno que se produce cuando quedan impresas las huellas de una silla. Lo identifican con un caracol y establecen hipótesis acerca de cómo se ha producido. A partir de ahí introducimos el estudio de números y operaciones vinculándolo con hechos vividos. La espiral de Fibonacci nos ayuda a entender los procesos de suma y resta

Figura 7. Descubrimiento y deducción de un fenómeno en el aula. Identificación y comparación con otras formas similares de la naturaleza.

Figura8. Land- Art. Spiral Jetty. Robert Smithson.

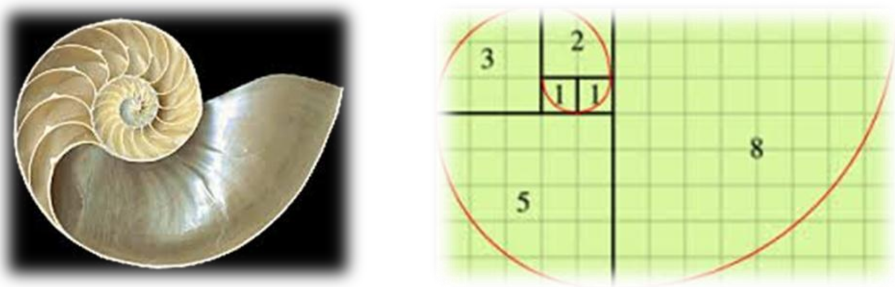


Figura 9. Espiral y sucesión de Fibonacci. La suma: 1; 2; 3, 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89....

Figura 10. Trazado de espirales a partir de su descubrimiento.

Arte y matemáticas.

El arte también aparece representado a partir de esta forma y se realizan trabajos por parte de los niños en los que la geometría está presente.

Figura 11. Obra de Mario Merz sobre la espiral de Fibonacci en Salzburgo.

Figura 12. Obras en la naturaleza a partir de la geometría.

Figura13. Marx Ernst. “Le Silence á travers les âges”. Trazado de una espiral a partir de una joya.

Matemáticas y las TIC.

Aplicación del programa Geogebra.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación son un recurso fundamental para intervenir y su manejo ayuda en la comprensión del hecho matemático desde una perspectiva interactiva, en la que tanto alumnos como docentes pueden servirse de ella para explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje.

El programa Geogebra es una herramienta clave que nos ofrece multitud de posibilidades.

La construcción de figuras geométricas y relacionarlas con objetos cotidianos ofrece una perspectiva de las matemáticas diferente, en la que es fácil integrar los conocimientos ya adquiridos con su recreación e identificación con figuras matemáticas. Los niños y niñas de Educación infantil son alumnos competentes en cuanto al manejo de los medios informáticos con los que conviven desde edades tempranas: en casi todos los hogares hay equipos informáticos o dispositivos al uso y en las escuelas existen recursos al respecto que suplen cualquier posible carencia, por lo que ningún niño escolarizado es ajeno a su existencia y uso.

Aprovechando esta realidad, se introduce el programa que les facilita la intervención a partir del dibujo de las diferentes formas geométricas asociándolas a aquellos aspectos que conocen, dejando clara así su vinculación con lo vivido. La capacidad de crear se ve así potenciada y facilita su representación en diferentes planos.

La construcción de triángulos, óvalos, cuadrados así como otras formas geométricas y relacionarlas con objetos cotidianos facilita el concepto y la abstracción: el trazado de líneas para construir estrellas, triángulos y cuadrados para simular una casa, circunferencias para crear un sol, no son más que unas pocas posibilidades que nos ofrece el programa.

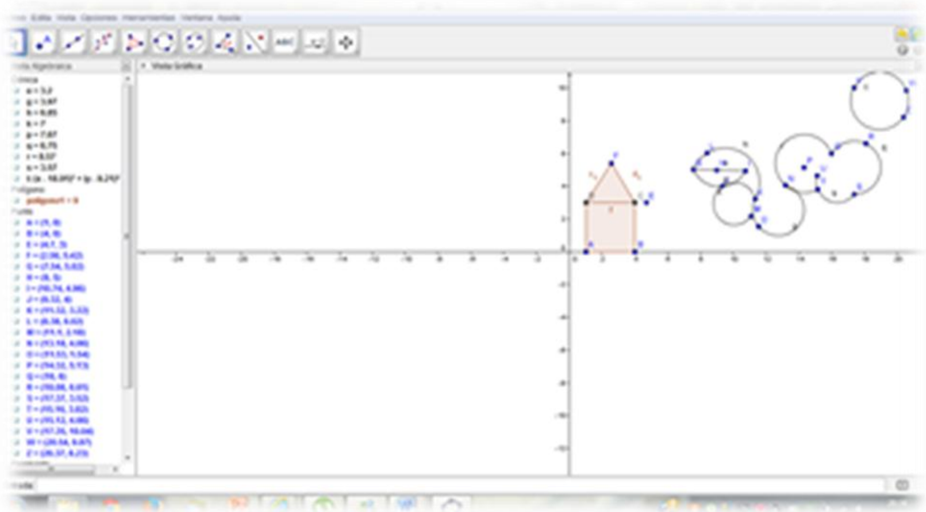


Figura14.Trabajo con Geogebra para representar objetos relacionados con la propia vivencia a partir de triángulos, cuadrados, circunferencias y otros trazos.

La PDI (pizarra digital) como soporte

Para avanzar en la identificación, conocimiento y relación de símbolos del lenguaje matemático la pizarra digital se convierte en una herramienta imprescindible que ayuda a comprender la simbología matemática**:** **suma +** , **resta –,** el concepto de vacío con el **número 0**. A partir de aquí comienzan a elaborar hipótesis sobre como calcular cantidades o el tiempo que debe transcurrir hasta que se produzca un acontecimiento: El nacimiento de un hermano, el tiempo que debe transcurrir hasta las próximas vacaciones…

Figura 15. Trabajo sobre la PDI (pizarra digital)

Matemáticas y vida cotidiana.

Relacionar y comparar objetos para elaborar secuencias y establecer conclusiones sencillas.

Juegos de simulación: desarrollo preoperacional y simbólico a partir de situaciones cotidianas. Juegos de las tiendas: precios de productos, peso de alimentos y manejo de monedas. Matrículas de coches, números y dirección de la vivienda, la agenda telefónica en los teléfonos móviles.

Figura 16. Instrumentos de medida para establecer hipótesis. Juego simbólico.

Matemáticas en la ciudad.

Elaboración de itinerarios en plano horizontal (suelo del aula) para localizar calles o sitios de interés y construcción de planos. Cálculo de distancias: concepto cerca-lejos. Evolución del plano horizontal al vertical.

Figura17. Elaboración de planos en el suelo del aula para localizar calles (con cinta de carrocero). Evolución del plano horizontal al vertical a partir de piezas de construcción. Desarrollo de la capacidad espacial. Realización de itinerarios.

Las matemáticas y la percepción del tiempo. Los Husos horarios.

Comparar y utilizar diferentes instrumentos de medida del tiempo: con arena, agua, relojes, etc... La fecha de nacimiento como recurso para elaborar hipótesis. Pasado, presente y futuro como introducción al pensamiento abstracto.

Figura18. Recreación de un reloj a partir de la propia corporalidad. Metáfora del tiempo.

Figura19. Medida del tiempo a partir de diferentes materiales: lanas que simbolizan un tiempo de mayor o menor duración, papeles que recortan, plumas y piedras que en su caída ofrecen una acción temporal o cadencia diferente…

Matemáticas y fenómenos naturales.

Experiencias con la luz, agua, tierra y aire. Medida de sólidos y líquidos.

El descubrimiento, la curiosidad forma parte del proceso de interrogarse acerca de los fenómenos que tienen lugar en nuestra vida. Nos hace avanzar hacia las metas que nos hemos fijado y responder a aquellas preguntas sobre lo que necesitamos para desarrollarnos a todos los niveles. Desde edades tempranas debemos favorecer la respuesta a las intuiciones que surgen en su intervención con todo aquello que les rodea. Las experiencias con fenómenos naturales son tan cercanas a la vida que el facilitar su observación se convierte en un potente recurso de reflexión y una herramienta imprescindible para el desarrollo de la capacidad lógica.

Figura 20. Observación y manipulación a través de linternas y bolas de luz.

.

Figura 21. Concepto de flotación con diferentes objetos y pesos. Propiedades del agua.

Esta experiencia pone de manifiesto como los conceptos de peso y cantidad se adquieren a partir de lo manipulativo y vivencial. Las características de los líquidos y su medida, son intuidas a partir de experiencias que aportan los prerrequisitos necesarios para establecer una base sólida que les permitirá más adelante establecer comparaciones, realizar operaciones y resolver problemas.

CONCLUSIONES.

Esta comunicación pretende poner de manifiesto que todo lo experiencial vivido y sentido, precede y consolida la adquisición de un mapa conceptual-emocional que dará lugar a un correcto desarrollo de la competencia matemática y por ende, de todas las capacidades que se integran en el individuo. La capacidad de resolución de problemas y planteamientos reflexivos es también una actitud emocional que se ve reconocida en las experiencias implementadas.

Es imposible resolver un problema si nunca se ha tenido la necesidad de preguntarse acerca de él: “Más que dar respuestas, hay que estimular las preguntas” (Molero 2014).

Pretender que los niños y niñas resuelvan operaciones sobre un soporte físico o digital sin haber tenido experiencias previas desde la manipulación y la reflexión, es el mayor problema que encontramos en las aulas cuando queremos que adquieran competencia en destrezas matemáticas.

Las matemáticas no son sólo herramientas o símbolos que de forma mecánica nos llevan a resolver una ecuación o a realizar un planteamiento para resolver un problema. La conciencia matemática forma parte de la vida y allí se encuentra. Sólo debemos permitirnos que ésta sea visible en cada acción cotidiana y lograremos fortalecer ese complejo sistema que nos capacitará en y para la vida.

“Piensa el sentimiento, siente el pensamiento”…

Referencias bibliográficas.

I. M. Gómez (2000): Matemática emocional: Los afectos en el aprendizaje matemático. Narcea, Madrid.

D. Chioffi y A. Spaggiari (2002): "Entre el seguro, el quizá y el imposible. El niño descubre la razón del probable". En Escuelas Infantiles de Reggio Emilia (Eds.), La inteligencia se construye usándola (3ª ed.) (pp. 183-193). Morata, Madrid

P. Sadovsky "Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos "Revista: Educación Matemática 2006 18(1)

J. Piaget (2001): La representación del mundo en el niño. Editorial Morata. Madrid.

C. Sanchidrián, J. Ruiz Berrio (Coords). Historia y perspectiva actual de la Educación infantil (2010) Editorial Graó, Barcelona.

H. Gardner. La inteligencia reformulada: Las inteligencias múltiples en el siglo XXI (2011). Editorial Paidós. Barcelona.

C. Alsina, C. Burgués, J. M. Fortuny, J. Jiménez, y M. Torra (1996). Enseñar matemáticas. Graó, Barcelona.

A. J. Baroody (1994): El pensamiento matemático de los niños: Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial. Visor. Madrid.

L. Carbó y V. Gràcia (Coords.) (2004): El mundo a través de los números. Milenio, Lleida.

M. Deaño (1993): Los conocimientos lógico-matemáticos en la Escuela Infantil: desarrollo, diseño y observación. CEPE, Madrid.

J. Dewey (2002): Democracia y educación: Una introducción a la filosofía de la educación. 5 ed. Morata, Madrid.

C. Kamii (1995): El número en la educación preescolar. 4ª edición,Visor, Madrid.

T. H. Kilpatrick (1918): "The Project Method". Teachers College Record, 19, pp. 319-34.

J. Ledoux (1999). El cerebro emocional. Editorial Planeta, Barcelona.

Para hacer referencia a este artículo:

Suárez, B. (2015). "Mat-emoción". Una mirada al desarrollo lógico-matemático en educación infantil desde una perspectiva emocional. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 509-522). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

INNOVACIÓN EN LA ESTIMULACIÓN COGNITIVA INTEGRAL A TRAVÉS DEL ÁBACO JAPONÉS. MÉTODO UCMAS A NIVEL CURRICULAR EN EDUCACIÓN INFANTIL

Noelia Valdueza Iglesias.
Escuela y Colegio Infantil Carlos María.

Resumen

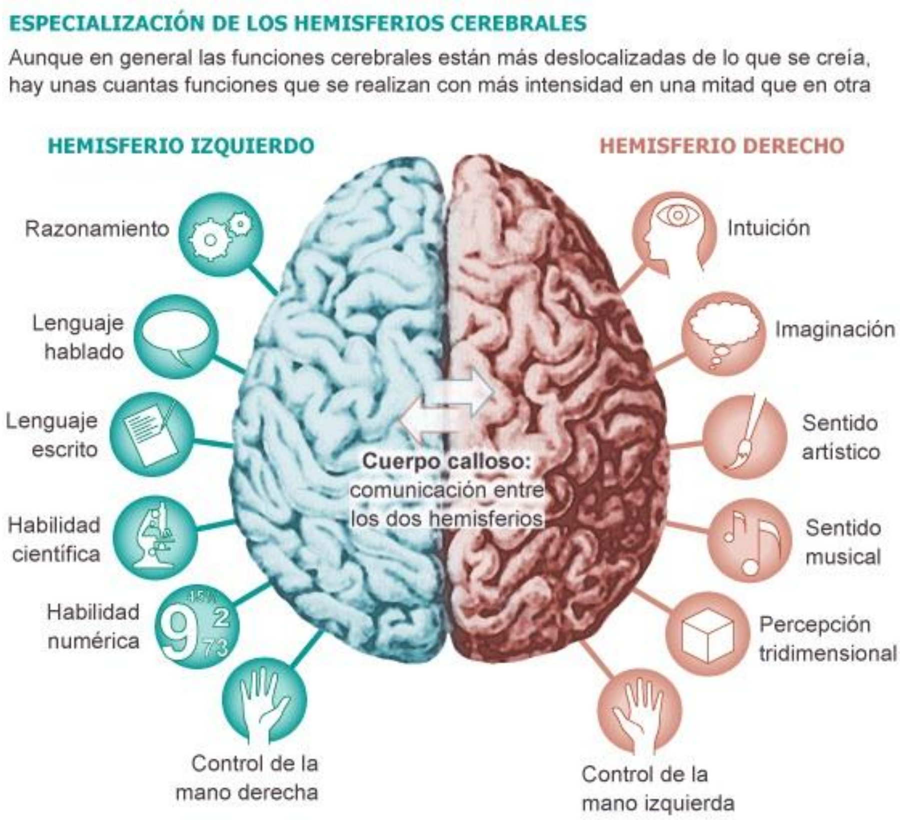
El Concepto Universal del Sistema de Aritmética Mental (UCMAS, por sus siglas en inglés Universal Concept of Mental Arithmetic System) es una representación moderna del arte ancestral de la aritmética mental. Un programa de desarrollo intelectual diseñado para estimular una utilización más completa del cerebro, especialmente del hemisferio derecho. El uso de una metodología determinada a través del ábaco sorobán japonés y unos recursos didácticos particulares, generan un modelo innovador y de gran eficacia. UCMAS incrementa la exactitud y velocidad en cálculos matemáticos, además de mejorar la memoria, atención y concentración. Ayuda a aumentar la capacidad de aprendizaje, lógica, análisis, investigación e imaginación . Garantiza el éxito escolar del niño desde la etapa de educación infantil hasta secundaria.

Palabras clave: *innovación, ábaco sorobán, infantil, primaria, éxito escolar.*

¿Qué es UCMAS?

El Concepto Universal del Sistema de Aritmética Mental (UCMAS, por sus siglas en inglés Universal Concept of Mental Arithmetic System) es una representación moderna del arte ancestral de la aritmética mental. Un programa de desarrollo intelectual diseñado para estimular una utilización más completa del cerebro, especialmente del hemisferio derecho. Está científicamente comprobado que sólo un pequeño porcentaje de personas utiliza plenamente ambos hemisferios cerebrales, siendo lo más habitual el uso preferente del hemisferio dominante*.

UCMAS busca siempre el equilibrio, resultado de conciliar polaridades entre ambos hemisferios cerebrales.



Origen y difusión.

El programa UCMAS, nace en Malasia en el año 1993, siendo su fundador el Dr. Dino Wong y su adaptación da lugar a un programa único que ayuda a estimular la actividad cerebral de los niños/as. Actualmente se imparte en más de 5000 centros educativos de 49 países distribuidos por Europa, Norteamérica, África y Asia. En definitiva, más de un millón de alumnos se benefician del programa UCMAS.

En España se establece en el año 2007 y el método UCMAS se ajusta a los requisitos de la certificación ISO 9001: 2008. Es miembro de la Asociación Mundial de Aritmética Mental con Ábaco (WAAMA por sus siglas en inglés) y está acreditado por entidades como "National Association for the Education of Young Children, USA", "The Chinese Zhusuan Association, China" y "Member ACEI".

El ábaco, ¿Un juego?

El uso de una metodología determinada a través del ábaco sorobán japonés y unos recursos didácticos particulares, generan un modelo innovador y de gran eficacia que forma al individuo en habilidades y capacidades, mejorando así el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En el programa UCMAS, el ábaco es un instrumento que se convierte en algo mágico, ya que junto con unas estrategias innovadoras, recursos didácticos originales y una metodología propia, aportará al niño una gran variedad de beneficios.

El secreto está sus fórmulas y en presentar el ábaco como un juego, una nueva oportunidad de aprendizaje que genera un contexto emocional y afectivo. Cuando los niños juegan, el nivel de ansiedad baja, la comunicación fluye, el interés crece y la concentración permanece.

Dirigido a niños de edades comprendidas entre los 3 y los 13 años, intervalo en el que está demostrado que es mayor la -capacidad de aprendizaje y de adquisición de habilidades. Con este método educativo de desarrollo cognitivo, se adquirirán destrezas únicas que se conservarán toda la vida.

Por este motivo, la Escuela y Colegio Infantil CARLOS MARÍA apuesta por metodologías innovadoras que estimulen el potencial de los niños desde la más tierna infancia.

Se sabe que desde los griegos, las matemáticas han sido consideradas como la forma más elevada de pensamiento intelectual. Sabemos que la capacidad de aprender de un niño pequeño es asombrosa y que absorbe de manera extraordinaria información de todo cuanto le rodea. La capacidad matemática, igual que el lenguaje, se adquiere con mayor facilidad a edad temprana. Es más fácil, hasta cierto punto, enseñar matemáticas a un niño cuanto menor es su edad (Doman,2010).

El aprendizaje del lenguaje matemático no puede empezar con abstracciones como son los símbolos de los números sino con la observación de objetos concretos (Gallese y Lakoff, 2005). Aprender es la aventura más grande de la vida. La regla principal consiste en que ambos, educador y niño, deben abordar alegremente el aprendizaje de las matemáticas como el magnífico juego que es.

A los niños les encanta aprender y lo hacen muy rápidamente. Nosotros los adultos hacemos casi todo demasiado despacio para los niños. Debemos acostumbrarnos como docentes a incrementar el ritmo de aprendizaje para evitar que los alumnos caigan en el aburrimiento.

Pequemás es la antesala al método UCMAS, es un programa de iniciación al cálculo mental y desarrollo intelectual para niños y niñas de 3 y 4 años. Pequemás es un programa introductorio al programa UCMAS que se complementa con otros elementos que ayudan al desarrollo intelectual de los niños de tan corta edad. Concretamente, se combinan elementos didácticos de tres líneas educativas diferenciadas aunque complementarias: el aprendizaje de la utilización del ábaco, el método Glen Doman de reconocimiento de palabras y el trabajo de desarrollo de la inteligencia emocional en el aula.

Al finalizar los dos cursos del programa Pequemás los niños estarán en condiciones de iniciar el nivel KG-1 del programa UCMAS con una base sólida de habilidades y conocimientos que harán más sencilla la iniciación en el cálculo aritmético mental.

Sentir y tocar para aprender

Cuando los niños empiezan a contar, su primera herramienta son sus propios dedos. El acto de contar, en ese momento inicial, es un acto concreto sobre objetos concretos del mundo físico (los dedos, piedras, juguetes, etc.) (Radford, 2013) Pero, cuando a los niños se les acaban los dedos, las matemáticas se vuelven abstractas, ya que resulta más difícil visualizar una cantidad para la que no hay dedos (Frank y Barner, 2011). Esto se hace muy evidente cuando los niños se enfrentan a los números 'once', 'doce', etc.

Con el ábaco, por el contrario, son capaces de visualizar todos los números y operaciones de varios dígitos de la misma forma que cualquier adulto puede visualizar la imagen del 'tres'.

De esta forma, "jugar" con el ábaco permite a los niños 'visualizar' los números del mismo modo que visualizarían un super héroe o cuerpo geométrico. UCMAS es una forma diferente de aprender matemáticas, es lúdica, divertida y estimulante, que capta la atención de los alumnos por la novedad y que les motiva a aprender. Pero también es más que solo matemáticas, porque es una herramienta para desarrollar un conjunto de habilidades intelectuales que los niños aprovecharán y se beneficiarán de ellas durante toda la vida (Fomina, 2014).

Primeramente, se enseña a los niños a hacer las operaciones en el ábaco con las dos manos, para estimular la coordinación y la activación de la mayor cantidad de neuronas que podamos conseguir (Fenglei et al, 2014). Utilizar las dos manos a la vez tocando las fichas en el ábaco es una parte fundamental de este programa de desarrollo intelectual.

Por otro lado, se sabe que es necesario el lenguaje (otro concepto abstracto para los niños) en la realización de las tareas de matemáticas. Cuando pensamos con palabras es muy difícil mantener la concentración. Este es uno de los principales motivos de falta de atención en las aulas (Radford, 2013).

En UCMAS, cuando se pregunta a los niños que sumen, por ejemplo, dos, más cuatro, menos tres y más cinco, se limitan a realizar movimientos con los dedos sobre las fichas del ábaco y esto no supone ninguna actividad intelectual compleja. Al finalizar, los niños solamente han de mirar y ver que las fichas que han quedado son la **imagen física** del número 'ocho'. De este modo,habrán realizado un conjunto de operaciones aritméticas sin haber utilizado en ningún momento el pensamiento abstracto.

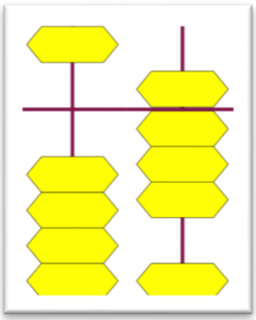


Fig 2. Representación del número

Pero desde muy pronto, los alumnos empiezan a practicar una nueva habilidad: se les pide que realicen las operaciones aritméticas sin su ábaco, solamente utilizando su imaginación para simular el movimiento de las fichas. A diferencia de los adultos, a los niños esto les resulta muy fácil y pronto se convierten en expertos calculadores mentales. En este punto, se ha dado el salto del mundo físico al mundo de lo imaginario y entramos a estimular su imaginación de una forma diferente y con mayor intensidad.

En el ábaco, cualquier cifra se representa como una combinación de un máximo de cinco fichas (las que hay en cada columna), por lo que el reconocimiento inmediato es siempre posible. Por esta razón, siempre es más sencillo reconocer una imagen que una cifra (que en el fondo es otra representación abstracta). Trabajar con imágenes, es además, trabajar con la imaginación. Los niños comprenden aquello que pueden imaginar.

Figura 3. Alumnos UCMAS practicando operaciones con el ábaco imaginario (mentals).

BENEFICIOS DEL MÉTODO UCMAS en los alumnos de la ESCUELA Y COLEGIO INFANTIL CARLOS MARÍA.

UCMAS contribuye a mejorar las siguientes habilidades y capacidades en los alumnos:

- Velocidad y precisión en operaciones aritméticas
- Concentración y atención
- Capacidad de escucha
- Habilidad para la observación
- Memoria visual y orientación espacial
- Imaginación y creatividad

- Habilidades analíticas
- Resolución de problemas
- Aprender a aprender
- Autoconfianza y autoestima

El proyecto educativo UCMAS contribuye a evitar el fracaso escolar, asegurando el éxito académico en el tránsito a primaria y a secundaria y capacitando al alumno para una formación a lo largo de la vida. Se les motiva fomentando la comunicación y las buenas relaciones, realizando tareas de grupo. Se les transmite constantemente que tomen los errores como nuevos momentos de aprendizaje, en UCMAS, no se tacha la equivocación, se intenta siempre dar una visión positiva poniendo un círculo. Así, al profesor, le queda constancia de la fórmula en la que están fallando y el alumno a su vez se queda con una sensación más agradable y satisfactoria.

No obstante, se requiere un esfuerzo para la obtención de los diferentes beneficios que conforman el método en la práctica diaria. El alumnado va mejorando en las diferentes áreas académicas y en consecuencia la motivación les acompaña durante todo el desarrollo del programa y continuará en el transcurso de toda su etapa escolar. UCMAS incrementa la exactitud y la velocidad, además de mejorar la memoria. Ayuda a aumentar la capacidad de aprendizaje, escritura, lógica, análisis e investigación. Estimula la concentración, así como la comprensión. Ayuda a desarrollar la imaginación, mejorar el rendimiento académico del niño y prepara a los niños para la competición.

Mejora la memoria visual, la confianza en uno mismo y reduce el tiempo de aprendizaje. Estimula el sentido del oído. Aumenta la atención del niño y le ayuda a manejar el estrés.

Algunos de los juegos que se realizan durante las clases son:

<u>Random Numbers</u> (Números aleatorios) – Se dicen en voz alta números al azar y los niños deben de escribirlos en sus ‘Fingering Speed Book’.

<u>Speed Writing</u> – Un juego que requiere concentración para escribir el mayor número de parejas de amigos pequeños o grandes en un minuto.

<u>Short Term Memory</u> – Se dicen en voz alta 5 números (a diferentes velocidades) y los alumnos tienen que escucharlos hasta el final. A continuación escriben la serie en su ‘Fingering Speed Book’. Se va aumentando la cantidad de números a recordar.

<u>Flashcards</u> –Una tarjeta tiene la imagen del número simbólico por una cara, y la imagen correspondiente de las fichas del ábaco por la otra. El alumno/a debe identificar el número simbólico visualizando la cara de la tarjeta que lleva la imagen del ábaco. Según el nivel del estudiante, la velocidad a la que se muestran las tarjetas va aumentando.

<u>Mentals</u> : El profesor dicta los números y controla que los movimientos de los dedos sea el correcto mientras que manipulan ‘fichas imaginarias’ sobre este ‘ábaco MENTAL’.

<u>Baile de los números</u>: Cada número del 0 al 9 se representa con el cuerpo de una manera diferente. Los niños “bailan” mientras el profesor “canta” los números o los enseña en el ábaco o flashcards.

APRENDER A APRENDER

A través de las actividades se contribuye a desarrollar la habilidad para superar los obstáculos con el fin de aprender con éxito. Los alumnos logran asimilar nuevos conocimientos y sentir el placer que produce entender algo que antes no comprendían, resolver problemas que se les resistían.

El trabajo colaborativo que se realiza en las clases de UCMAS constituye uno de los pilares de aprender a aprender. Trabajar con otros ayuda a tomar conciencia de los propios procesos cognitivos y emocionales. Se deben detectar errores propios y ajenos, y llegar a una solución compartida.

UCMAS ayuda a los estudiantes a que atribuyan los resultados de su proceso de aprendizaje a causas que están bajo su control y que son modificables.

Enseñar a aprender a aprender hace que los alumnos realicen atribuciones adecuadas de sus éxitos o fracasos.

¿Qué aporta el Método UCMAS en comparación con otros métodos de aprendizaje de las matemáticas?

- Es **multifuncional** pues permite el éxito académico en el acceso a primaria y a secundaria, la realización y el desarrollo personal a lo largo de la vida y la inclusión y la participación como ciudadanos activos.

- Es **transferible,** pues se aplica en múltiples situaciones y contextos para conseguir distintos objetivos, resolver diversas situaciones o problemas y realizar diferentes tipos de trabajos.

- Es **transversal e interdisciplinar** a las áreas y materias curriculares porque su aprendizaje no es exclusivo de una de ellas.

- Es **integrador**, porque permite combinar conocimientos (“saber”), destrezas (“hacer”) y actitudes (“querer”).

UCMAS facilita el aprendizaje significativo y contribuye a desarrollar la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar como fuera de él. Este hecho, evidentemente, favorece el progreso escolar. En definitiva, a través de técnicas adecuadas para calcular y representar la realidad se convierte en un método útil para aprender a aprender.

La principal finalidad es contribuir a hacer posible que la calidad educativa alcance a todos sin exclusión, proponiendo un método innovador, un original programa de actuación para orientar hacia la vida garantizando un aprendizaje permanente. UCMAS pretende responder a interrogantes para iniciar el camino a la mejora educativa.

Cuanto antes se comience, mejor para nuestros alumnos, mejor para el centro educativo, mejor para las familias, mejor para la sociedad, mejor para nuestro país.

Referencias.

Doman, G. (2010). Como enseñar a leer a su bebé: la revolución pacífica. Madrid: EDAF

Fenglei, D., Yuan, Y., Qiong, Z., y Feiyan, C. (2014) Long-term abacus training induces automatic processing of abacus numbers in children. *Perception,* (43), 694–704.

Frank, M. y Barner, D. *(2011)* Representing Exact Number Visually Using Mental

Abacus. *Journal of Experimental Psychology: General*

Fomina, C. (2014). Aprender matemáticas: ¿Ábacos mejor que tablets?. *Periódico ABC: Padres e Hijos.* 26-05-2014.

Gallese, V. y Lakoff, G. (2005) The brain´s concepts: the role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*.

Radford, L. y Andre, M.:(2009) Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa.* 12 (2): 215-250

Radford, L. (2013) Perceiving with the eyes and with the hands . *Ripem* 1: 56-77

Sitios web:

www.educacarlosmaria.es

www.ucmas.es

Para hacer referencia a este articulo:

Valdueza, N. (2015). Innovación en la estimulación cognitiva integral a través del ábaco japonés. Método UCMAS a nivel curicular en educación infantil. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: ·*Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas".* (pp. 523-529). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

CASTILLA Y LEÓN

2014

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Junta de Castilla y León